UNE CORRECTION DU TEST DE MATHEMATIQUES PE1 11/2009 (1h30)

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1

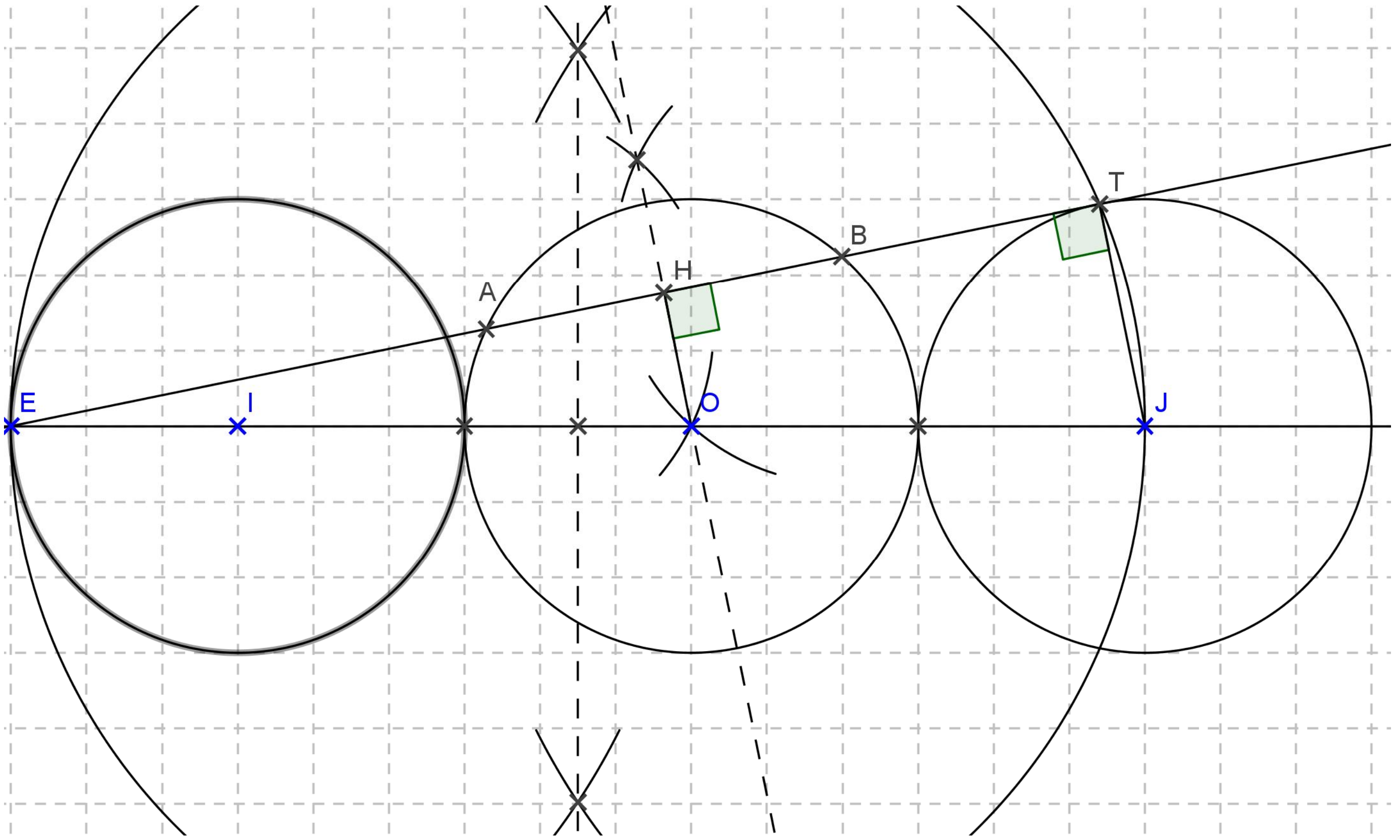
1. a. Dans le triangle ETJ, les points E, H, T d'une part, E, O, J d'autre part sont alignés. Par ailleurs, sachant que la droite (Δ) est tangente au cercle (C_3) en T, on sait que $(ET)\perp(TJ)$. Or $(OH)\perp(ET)$, donc $(ET)//(OH)$. Le théorème de Thales permet de dire que $\frac{OH}{TJ} = \frac{EO}{EJ}$. Or $TJ = r$, $EO = 3r$ et , $EJ = 5r$, d'où $OH = r\ \frac{3r}{5r}$. Après simplification par r, on a $a = \frac{3}{5}r$.

b. A et B étant deux points du cercle (C_2), on a $OA = OB$, donc O est un point de la médiatrice (D) de $[AB]$. Sachant que $(OH)\perp(AB)$, on en déduit que (OH) est la médiatrice de $[AB]$,, donc H est le milieu de $[AB]$.

c. a est un nombre entier si et seulement si $3r = 5a$, avec a et r entiers. On en déduit que 5 divise $3r$, avec 3 et 5 premiers entre eux. On conclut par le théorème de Gauss que 5 divise r.
Réciproquement, si 5 divise r, alors $r = 5r'$, avec r' entier, d'où $3(5r') = 5a$, d'où en divisant par 5, $a = 3r'$, d'où a est entier. Finalement, les valeurs de r pour lesquelles a est un nombre entier sont les multiples de 5.

d. Si le nombre a est-il un nombre premier, alors a est entier, donc, d'après la question précédente, $r = 5r'$ et $a = 3r'$. On en conclut que a est un nombre premier à condition que $r' = 1$, d'où $r = 5$.
Réciproquement, si $r = 5$, alors $a = 3$, qui est bien un nombre premier.
Finalement, la seule valeur de r pour laquelle a est un nombre premier est $r = 5$.

2. a. Ci-dessous, la figure à la taille réelle, la difficulté étant la construction du point T, qui, d'après le théorème de l'angle inscrit, appartient au cercle de diamètre $[EJ]$.



b. Dans le triangle OBH, rectangle en H, le théorème de Pythagore donne $OB^2 = HB^2 + OH^2$, d'où $HB^2 = OB^2 - OH^2$. On sait que $OB = 3$ et $OH = 3\times\frac{3}{5} = \frac{9}{5}$, donc $HB^2 = 9 - \frac{81}{25}$, d'où $HB^2 = \frac{144}{25}$.

Sachant que $\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$, On en déduit que $HB = \frac{12}{5}$. Par ailleurs, $AB = 2HB$, donc $AB = \frac{24}{5}$. Calculer

Sur la construction on voit que $AB \approx 48\ \text{mm}$, ce qui est conforme à l'égalité $\frac{24}{5} = 4{,}8$.

EXERCICE 2

1. $26 = 1\times11 + 3\times5$, $43 = 3\times11 + 2\times5$, $220\ 012 = 1\times7 + 5\times44\ 001$ sont des scores possibles.
$13 = 1\times11 + 2$, avec 2 score impossible, donc le score 13 ne peut pas être obtenu avec 11.
$13 = 1\times7 + 6$, et 6 n'est pas un multiple de 5, donc le score 13 ne peut pas être obtenu sans 11 avec 7.
On déduit des deux remarques précédentes que 13 ne pourrait être obtenu qu'avec des 5 : mais 13 n'est pas un multiple de 5. On en conclut que les score 13 est impossible.

2. a. $34 = 3\times11 + 1$, avec 1 score impossible, donc il est impossible d'avoir 3×11.
$34 = 2\times11 + 12$, avec $12 = 1\times7 + 1\times5$, écriture unique de 12, donc $34 = 2\times11 + 1\times7 + 1\times5$, écriture unique avec 2×11.
D'autre part, $34 = 1\times11 + 23$, avec $23 = 3\times7 + 2$ (2 est un score impossible), $23 = 2\times7 + 9$ (9 est un score impossible) et $23 = 1\times7 + 16$, où 16 n'est pas un multiple de 5. On conclut qu'il est impossible d'avoir 1×11.
La deuxième écriture demandée ne peut donc comporter que des 7 ou des 5.
$34 = 4\times7 + 6$, où 6 n'est pas un multiple de 5 : impossible avec 4×7.
$34 = 3\times7 + 13$, où 13 n'est pas un multiple de 5 : impossible avec 3×7.
$34 = 2\times7 + 20$, où $20 = 4\times5$, d'où $34 = 2\times7 + 4\times5$ écriture unique avec 2×7.
$34 = 1\times7 + 23$, où 23 n'est pas un multiple de 5 : impossible avec 0×11 et 1×7.
On a donc bien trouvé deux uniques jeux donnant 34 : $34 = 2\times11 + 1\times7 + 1\times5$, et $34 = 2\times7 + 4\times5$.

b. $40 = 3\times11 + 1\times7$, $40 = 1\times11 + 2\times7 + 3\times5$, $40 = 5\times7 + 1\times5$, $40 = 8\times5$.

3. On va présenter les résultats dans un tableau :

nombre de 11	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
nombre de 7	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
nombre de 5	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
score	33	29	27	25	23	21	21	19	17	15

Donc les seuls scores possibles avec 3 flèches sont 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 et 33.

Question complémentaire

1. Question 1 : d'après la question 2a de la partie précédente, le score 34 ne peut être obtenu que de deux façons : en lançant 6 flèches, avec le jeu $2\times7 + 4\times5$, ou en lançant 4 flèches, avec le jeu $2\times11 + 1\times7 + 1\times5$. Donc Guillaume a lancé 6 flèches dans les 2 zones 7 et 5, et Jeanne a lancé 4 flèches dans les 3 zones.

Question 2 : on sait que Camille a marqué $34 - 9 = 25$ points. Or $25 = 5\times5$ et $25 = 1\times11 + 2\times7$ (ce sont les 2 seules décompositions). On en conclut que Camille a atteint la cible soit 5 fois, soit 3 fois.

La donnée qui semble manquer est le nombre total de flèches. Elle est inutile ici, puisqu'il n'y a que deux cas possibles pour deux cas demandés.

2.

Groupes	Procédures	Erreurs
1	Additions réitérées Multiplications Calculs en lignes	Raisonnement cohérent (addition de nombres dans la cible). Résultats exacts.
2	Additions réitérées Multiplications Calculs en colonnes	Raisonnement cohérent (addition de nombres dans la cible). Calculs exacts. Jeanne et Guillaume ne sont pas nommés : si « Il » représente Guillaume, alors il y a confusion entre Jeanne et Guillaume (interprétation de « j'ai raté deux fois la cible » sous la forme de l'addition 4+2=6).. Erreur dans le décompte des fléchettes de la colonne de droite (compte le nombre d'opérations).
3	Additions réitérées Calculs en lignes	Raisonnement cohérent (addition de nombres dans la cible). Calculs exacts. Confusion entre Jeanne et Guillaume (interprétation de « j'ai raté deux fois la cible » sous la forme de l'addition 4+2=6).
4	Additions réitérées Calculs en lignes	Raisonnement cohérent (addition de nombres dans la cible). Calculs exacts. Donne la même réponse pour Jeanne et Guillaume ((interprétation de « j'ai raté deux fois la cible » non prise en compte).
5	Additions réitérées Calculs en lignes	Raisonnement cohérent (addition de nombres dans la cible). Calcul exact pour 11+11+7+5. Erreur pour l'addition réitérée 7+7+7+7+5 : tables d'addition à revoir ? Confusion entre Jeanne et Guillaume (interprétation de « j'ai raté deux fois la cible » sous la forme de l'addition 4+2=6).