Baccalauréat ES Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une buvette, située en bordure de plage, est ouverte de 12 heures à 18 heures. Elle propose des crêpes salées et des crêpes sucrées.
Chaque client achète une seule crêpe.
60 % des clients se présentent à l'heure du déjeuner (entre 12 heures et 14 heures).
Parmi les clients achetant une crêpe l'après-midi (à partir de 14 heures), 80 % choisissent une crêpe sucrée.
On appelle :
D l'évènement : « le client est venu à l'heure du déjeuner ».
A l'évènement : « le client achète une crêpe salée ». On sait que la probabilité qu'un client achète une crêpe salée est égale à 0,62.
On pourra représenter les différentes situations par des arbres pondérés.
Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Déterminer les probabilités des évènements D et $\overline{\text{D}}$.
2. **a.** Un client est venu l'après-midi. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une crêpe salée ?
   b. Calculer $P\left(\text{A} \cap \overline{\text{D}}\right)$.
   c. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(\text{A} \cap \text{D})$.
   d. Un client vient à l'heure du déjeuner ; montrer que la probabilité qu'il achète une crêpe salée est égale à $0,9$.
3. Un client a acheté une crêpe salée ; quelle est la probabilité, à $0,01$ près, qu'il soit venu l'après-midi ?
4. On vend 3 euros une crêpe salée et 2 euros une crêpe sucrée. La buvette reçoit 250 clients par jour. Quelle est l'espérance de la recette quotidienne due à la vente de crêpes ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x \longmapsto \text{e} + \dfrac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto \text{e}x + \ln 5$.
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\text{e}^x - 1)(\text{e}^x + 4) = 0$ est : $S = \{0\}$.
3. Si $\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^n \leqslant 0,7$ alors $n \geqslant \dfrac{\ln 0,7}{\ln 0,99}$.
4. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln\left(x^2 + 4x + 3\right) = \ln(5x + 9)$ est $S = \{-2\ ;\ 3\}$.
5. La limite quand x tend vers 1, $x < 1$, de la fonction $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}\right)$ est 0.

EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.

On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point E(0 ; 1) et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Vérifier que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. **a.** Calculer $f'(x)$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

   b. Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.
   (Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.)

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0\ ;\ 4]$.

Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression :

$$f(q) = (q+1)\mathrm{e}^{-q}.$$

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4 000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?