Baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un commerçant vendant des produits biologiques propose quotidiennement des paniers légumes frais contenant 2 kg de légumes ou des paniers contenant 5 kg de légumes.
35 % des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant.
Parmi ceux qui n'ont pas d'enfant, 40 % choisissent les paniers de 5 kg de légumes et les autres choisissent les paniers de 2 kg de légumes.
On interroge au hasard un client qui achète un panier de légumes.

On note E l'événement « le client interrogé a au moins un enfant » ;
on note C l'événement « le client interrogé a choisi un panier de 5 kg de légumes ».
Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire.

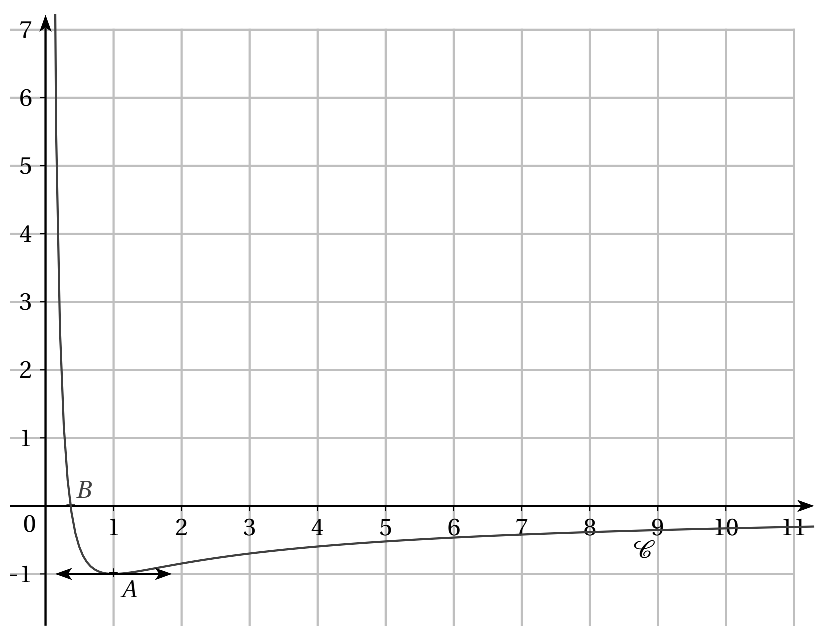
Tous les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie au millième.

1. Quelle est la probabilité que le client interrogé n'ait pas d'enfant ?
2. Sachant que le client interrogé n'a pas d'enfant, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier contenant 5 kg de légumes ?
3. Décrire l'événement $\overline{E} \cap C$, et montrer que $p\left(\overline{E} \cap C\right) = 0,26$.
4. On sait de plus que 30 % des clients qui achètent des paniers choisissent des paniers de 5 kg.
   a. Calculer $p(E \cap C)$.
   b. En déduire la probabilité conditionnelle de C sachant que E est réalisé.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.
Les axes (Ox) et (Oy) sont asymptotes à $\mathcal{C}$.
La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points $A(1 ; -1)$ et $B\left(\frac{1}{\mathrm{e}} ; 0\right)$ et admet une tangente parallèle à (Ox) au point A.



1. En utilisant les données ci-dessus, déterminer sans justification :
   a. $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   c. les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ et les solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
2. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$ où a et b sont deux nombres réels.
   a. Exprimer $f'(x)$ en fonction des réels a et b.
   b. Utiliser les résultats de la question 1a. pour montrer que $a = -1$ et $b = -1$.
   c. Retrouver les résultats de la question 1c par le calcul.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.

De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 personnes le quittent.

En 2005, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.

On note P_n la population de l'année $2005 + n$ exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminer P_0, P_1 et P_2. La suite de terme général P_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.
2. Expliquer pourquoi on obtient, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = 1{,}014P_n + 7$.
3. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = P_n + 500$ pour tout entier naturel n est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.
4. Exprimer U_n puis P_n en fonction de n.
5. a. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2010 ?
   b. Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublé par rapport à l'année 2005 ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne une estimation du montant des achats en ligne des ménages français, en millions d'euros, de 1998 à 2004.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Montant en millions d'euros y_i	75	260	820	1650	2300	4000	5300

1. Calculer l'augmentation relative entre 2001 et 2002 du montant des achats.
2. Représenter par un nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 cm pour 1 000 millions d'euros sur l'axe des ordonnées).
3. *Dans cette question, les calculs, effectués à la machine, ne seront pas justifiés et seront arrondis à l'unité.*
   Donner une équation des la droite d'ajustement affine D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter cette droite dans le repère précédent.
4. On propose un deuxième ajustement de cette série statistique par la fonction f définie, pour tout réel positif x, par : $f(x) = 130x^2 + 100x + 68$.
   Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

Construire la courbe représentative de la fonction f dans le repère précédent.

5. Le montant des achats en ligne en 2005 a été de 7 700 millions d'euros. Lequel de ces deux ajustements vous paraît-il le plus conforme à la réalité ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{x} - 1$.
Le tableau suivant est le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	-1	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

1. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a strictement positive. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \ln x$.

- **a.** Étudier la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.
- **b.** Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f.
- **c.** Étudier les variations de f puis établir son tableau de variations en admettant que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en prenant 0,57 comme valeur approchée de a.
(*Prendre* 4 *cm pour unité sur l'axe des abscisses et* 2 *cm sur l'axe des ordonnées*).

4. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan muni du repère ci-dessus tels que :

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

- **a.** Hachurer le domaine $\mathscr{D}$.
- **b.** Vérifier que la fonction H définie sur $]0 ; +\infty[$ par $H(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \ln x$.
- **c.** En déduire une primitive F de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- **d.** Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$, en unités d'aire, puis donner une valeur en cm^2, arrondie au dixième.