Université de Paris Ouest-Nanterre

Licence de Sciences Économiques 1ère année
Année 2008-2009

Cours de Mathématiques I

Patrice Bertail (UPA)   François Métayer (UPC)
Philippe Soulier (UPB)

Notes rédigées par Salah Mehdi, Laurent Mesnager et
Philippe Soulier

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions numériques d'une variable réelle

1.0 Intervalles

Les parties de $\mathbb{R}$ d'intérêt pour l'étude des fonctions sont les intervalles. Nous donnons dans cette section préliminaire quelques définitions qui seront utiles dans tous les chapitres.

Définition 1.1 (Intervalles)**.**
- *Intervalles fermés bornés : pour* $a \leq b$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
  Si $a = b$ *alors* $[a, b] = \{a\}$ *et l'intervalle est dit réduit à un point.*
- *Intervalles fermés non bornés : pour* $a \in \mathbb{R}$, $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ *;* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.
- *Intervalles ouvert bornés : pour* $a < b$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- *Intervalles ouverts non bornés : pour* $a \in \mathbb{R}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ *;* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ *;* $\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- *Intervalles bornés ni ouverts ni fermés : pour* $a < b$, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *;* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Définition 1.2 (Intérieur)**.** *Soit* I *un intervalle. On appelle intérieur de* I *le plus grand intervalle ouvert contenu dans* I.

Exemple 1.3. Pour $a < b$, Les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b]$ ont pour intérieur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Définition 1.4 (Point intérieur)**.** *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$. *On appelle point intérieur de* A *un point contenu dans un intervalle ouvert contenu dans* A.

Exemple 1.5. Soit $A = [-1, 3[\cup\{5\}$. Alors 1 et 5 ne sont pas des points intérieurs de A. Les points intérieurs de A sont les points de l'intervalle $]-1, 3[$.

Il sera utile d'avoir une définition rigoureuse de la notion intuitive de voisinage.

Définition 1.6 (Voisinage)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de x toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant x.*

L'expressions "au voisinage de x" signifie formellement dans un ensemble contenant un intervalle ouvert contenant x ou tout simplement dans un intervalle ouvert contenant x.

1.1 Fonction numérique d'une variable réelle

Définition 1.7. *Une fonction f d'un ensemble A dans un ensemble B (noté $f : A \to B$) est la donnée pour chaque élément de A d'un* ***unique*** *élément noté $f(x)$ de B appelé* image *de x. L'ensemble A est appelé l'*ensemble de départ *et l'ensemble B est appelé l'*ensemble d'arrivée*. Une fonction numérique d'une variable réelle est une fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

Il est important pour de ne pas confondre
– le nom de la fonction,
– l'expression définissant la fonction,
– la valeur de la fonction en un point de l'ensemble de départ.

L'argument d'une fonction est une variable dite muette, ce qui signifie qu'on peut utiliser n'importe quel symbole pour la désigner. Ainsi, les écritures $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2 + 1$ définissent la même fonction, notée f.

Domaine de définition Il arrive souvent qu'une fonction soit implicitement définie par une expression symbolique sans préciser l'ensemble de départ. La convention est alors de prendre pour ensemble de départ de la fonction le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans lequel l'expression est calculable. On appelle ce sous-ensemble, noté $\mathcal{D}_f$ l'*ensemble de définition* ou *domaine de définition* de f.

Exemple 1.8. Soit f la fonction numérique réelle donnée par l'expression

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}. \tag{1.1}$$

Déterminer le domaine de définition de f consiste à chercher le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ pour lequel on peut calculer la valeur $f(x)$ en tout point x de D. La valeur de f est calculable en tout point x tel que $x^2 - 4 \neq 0$ (le quotient de deux nombres réels n'est défini que si le dénominateur est différent de 0). Les racines du trinôme du second degré $x^2 - 4$ étant -2 et 2, le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$, est donc l'ensemble des réels différents de -2 et 2, noté

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup] - 2, 2[\cup]2, +\infty[\ .$$

Définition 1.9 (Antécédent)**.** *Soit une fonction $f : A \to B$. Soit $y \in B$. On dit qu'un point x de A est un antécédent par f de y si $f(x) = y$. Les antécédents par f de $y = 0$ sont aussi appelés les* racines *de f.*

Exemple 1.10. Soit f la fonction numérique réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}. \tag{1.2}$$

Les antécedents de $y = -\frac{5}{7}$ par f sont les solutions de l'équation (dont l'inconnue est x) :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = -\frac{5}{7}.$$

La résolution de cette équation donne

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = -\frac{5}{7} &\iff 7(x^2 - 1) = -5(x^2 - 4) \\ &\iff 12x^2 = 27 \\ &\iff x^2 = \frac{9}{4} \\ &\iff x = \pm\frac{3}{2}\ . \end{aligned}$$

Les antécédents par f de $-5/7$ sont les points $x_1 = -3/2$ et $x_2 = 3/2$.

Le point 1 n'admet pas d'antécédent par f.

1.2 Fonctions logarithme, exponentielle

On admettra l'existence des fonctions logarithme et exponentielle, et leurs propriétés fondamentales. Les fonctions exponentielles et logarithme ont pour domaines de définition respectifs

$$\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}\ , \quad \mathcal{D}_{\log} = \mathbb{R}_+^*\ .$$

Elles ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ \log(\exp(x)) = x\ ,\\
&\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\log(x)) = x\ ,\\
&\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ,\ \exp(x+y) = \exp(x)\ \exp(y)\ ,\\
&\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\ ,\ \log(xy) = \log(x) + \log(y)\ .
\end{aligned}$$

Définition 1.11. *Soit a un nombre réel strictement positif et α un nombre réel. On définit la puissance a^α par*

$$a^\alpha = \exp(\alpha \log(a))\ .$$

Exemple 1.12. Pour tout $x > 0$, on a $x^x = \exp(x\log(x))$. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left\{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}\ .$$

Remarque 1.13. Il existe un unique nombre réel, noté e, tel que $\log(\mathrm{e}) = 1$. Pour tout nombre réel x, on a donc $\mathrm{e}^x = \exp(x\log(\mathrm{e})) = \exp(x)$. Pour cette raison, on utilise indifféremment $\exp(x)$ ou e^x comme notation de la fonction exponentielle. Les premières décimales du nombre e sont

$$\mathrm{e} \simeq 2.718281828\ .$$

Proposition 1.14. *Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ et tout couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}\ ,\quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}\ ,\\
x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}\ ,\quad (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha\ .
\end{aligned}$$

Définition 1.15. *On appelle* fonction puissance *toute fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dont l'expression est de la forme $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1.3 Fonctions circulaires

On appelles fonctions circulaires les fonctions *sinus*, notée sin, *cosinus*, noté cos et *tangente*, notée tan ainsi que leurs inverses et leurs réciproques (cf. chapitre). On peut définir graphiquement les fonctions sin et cos. (Figure 1.1). Si on trace la demi-droite d'origine O (le centre du repère) et faisant un angle θ mesuré en radian

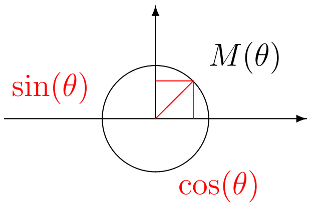

FIG. 1.1 – Le cercle trigonométrique.

(dans le sens direct) avec l'axe des abscisses et si on note $M(\theta)$ le point d'intersection de cette demi-droite avec le cercle de centre 0 et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique, alors les coordonnées du point $M(\theta)$ sont égales à $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Nous donnons ci-dessous les valeurs des fonctions sinus et cosinus en quelques points particuliers :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Les fonctions sin et cos ainsi définies sur $\mathbb{R}$ sont 2π-périodiques.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)\ , \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)\ .$$

Par périodicité, on en déduit que la fonction cosinus s'annule en tout point de l'ensemble $\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et la fonction sinus s'annule en tout point de l'ensemble $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Autres identités remarquables Pour tout nombre réel x, on a

$$\begin{gathered}
\cos(x+\pi) = -\cos(x)\ , \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)\ , \\
\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)\ , \qquad \sin(\pi/2 - x) = \cos(x)\ , \\
\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\ , \\
\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\ .
\end{gathered}$$

Proposition 1.16. *Pour tout nombre réel x, on a*

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \textit{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

Définition 1.17. *La fonction tangente est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ *par*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ .$$

La fonction cotangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ *par*

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ .$$

Proposition 1.18.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \tan(x+\pi) = \tan(x).$$

1.4 Valeur absolue

Définition 1.19. *On appelle valeur absolue d'un nombre réel* x*, notée* $|x|$ *est définie par*

$$|x| = \begin{cases} x \ \textit{si}\ x \geq 0\ , \\ -x \ \textit{si}\ x < 0\ . \end{cases}$$

Exemple 1.20. $|5| = 5$, $|e| = e$, $|-\pi| = \pi$, $|0| = 0$.

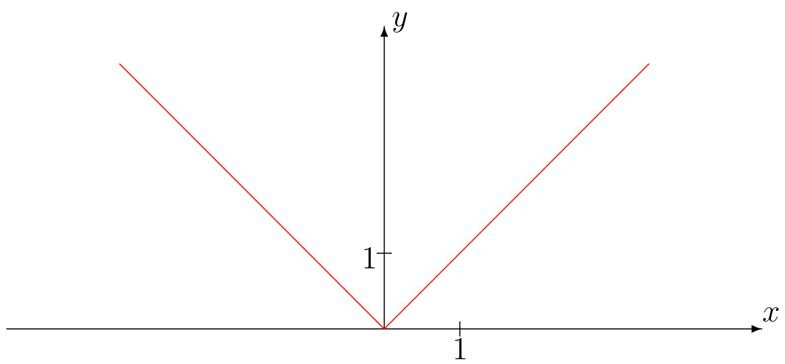

Fig. 1.2 – Graphe de la fonction valeur absolue.

Remarque 1.21.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \log(x^2) = 2\log\left(|x|\right).$$

Remarque 1.22. Une inégalité du type $-M \leq x \leq M$ peut-être écrite de façon équivalente sous la forme $|x| \leq M$. Par exemple, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\sin(x)| \leq 1.$$

1.5 Fonctions minorées, majorées, bornées

Définition 1.23. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Elle est dite*

– *majorée si il existe un nombre réel A tel que*

$$\forall x \in D\ , \quad f(x) \leq A\ ,$$

– *minorée si il existe un nombre réel B tel que*

$$\forall x \in D\ , \quad f(x) \geq B\ ,$$

– *bornée si elle est majorée et minorée.*

De façon équivalente, une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée si il existe un nombre réel M (nécessairement positif) tel que

$$\forall x \in D\ , \quad |f(x)| \geq M\ .$$

Il est important de remarquer que ces propriétés dépendent de l'ensemble de départ considéré.

Exemple 1.24. La fonction $f : x \to x$ est bornée sur tout intervalle fini $[a, b]$ mais elle n'est pas majorée sur un intervalle $[a, \infty[$, non minorée sur un intervalle $]-\infty, a]$.

Exemple 1.25. Les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$. Les fonctions log et exp ne sont pas bornées sur leurs ensembles de définition respectifs.

1.6 Composition des fonctions

Définition 1.26. *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. On appelle* composée *des fonctions f et g, notée $g \circ f$, la fonction de A dans C qui à x associe $g(f(x))$.*

Exemple 1.27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*, x \mapsto x^2 + 1$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{-1}$. La fonction composée $g \circ f$ est la fonction

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1} \ . \end{aligned}$$

La fonction composée $f \circ g$ est

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto f(g(x)) = \big(g(x)\big)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 \ . \end{aligned}$$

Remarque 1.28. Lorsqu'on omet de préciser l'ensemble d'arrivée dans la définition de deux fonctions, il faut faire attention avant de les composer. Plus précisément, étant données deux fonctions $f : x \in A \mapsto f(x)$ et $g : x \in B \mapsto g(x)$, pour pouvoir définir la fonction composée $g \circ f$, il faut s'assurer que :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in B$$

i.e. que les images des points de A par f appartiennent à l'ensemble de départ de g.

1.7 Fonctions paires et impaires

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *symétrique par rapport à* 0 si et seulement si il vérifie

$$\forall x \in A, \quad -x \in A$$

Exemple 1.29. Les sous-ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\star$, $[-1, 1]$ et $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$ sont symétriques par rapport à 0 alors que les sous-ensembles $\mathbb{R}^+$, $[-2, 4]$, $[0, 1]$ ne le sont pas.

Définition 1.30. *Soit A un ensemble symétrique par rapport à* 0 *et soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que*

- *f est* paire *si $\forall x \in A$, $f(-x) = f(x)$.*
- *f est* impaire *si $\forall x \in A$, $f(-x) = -f(x)$.*

Exemple 1.31. Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n+1}$ sont impaires. Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, sont paires.

Exemple 1.32. Soit les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^4 - 2x^2$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + x$. La fonction f est paire car

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^4 - 2\,(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x),$$

tandis que la fonction g est impaire puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -\left(x^3 + x\right) = -f(x).$$

Remarque 1.33. La fonction sin est impaire et la fonction cos est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Exemple 1.34. La fonction tan est une fonction impaire car, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Proposition 1.35. *Le produit de deux fonctions paires définies sur le même ensemble est une fonction paire. Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur le même ensemble est une fonction impaire. Le produit de deux fonctions impaires définies sur le même ensemble est une fonction paire.*

1.8 Sens de variation

Définition 1.36. *Soit une fonction $f : A \to B$. On dit que*
- *f est croissante sur A lorsque $\forall (x,y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow fx) \leq f(y)$.*
- *f est décroissante sur A lorsque $\forall (x,y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow fx) \geq f(y)$.*
- *f est strictement croissante sur A lorsque $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Rightarrow fx) < f(y)$.*
- *f est strictement décroissante sur A lorsque $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Rightarrow fx) > f(y)$.*
- *f est monotone sur A lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante sur A.*
- *f est strictement monotone sur A lorsqu'elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur A.*

Exemple 1.37.
- Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n+1}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

– Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.
– Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^{2n}}$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissantes sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple 1.38. La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha > 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha < 0$.

Exemple 1.39. Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + x$. Soit x et y de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$. Déterminons le signe de $f(y) - f(x)$. Pour cela, remarquons que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= y^3 + y - (x^3 + x) \\ &= y^3 - x^3 + y - x \\ &= (y - x)(y^2 + xy + x^2 + 1) \\ &= (y - x)\left(\frac{3}{4}y^2 + \left(\frac{y}{2} + x\right)^2 + 1\right) \geq 0\ . \end{aligned}$$

On a donc montré que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, i.e. que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.40. Les fonctions exp et log sont strictement croissantes sur leur domaine de définition.

Tableau de variation On indique généralement le sens de variation (au sens strict) d'une fonction dans un tableau appelé *tableau de variation.*

Exemple 1.41. Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus ne sont pas monotones sur leur domaine de définition. Le tableau suivant donne leurs variations sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

	-π -$\pi/2$	-$\pi/2$ 0	0 $\pi/2$	$\pi/2$ π
sin	0 $\searrow$ -1	-1 $\nearrow$ 0	0 $\nearrow$ 1	1 $\searrow$ 0
cos	-1 $\nearrow$ 0	0 $\nearrow$ 1	1 $\searrow$ 0	0 $\searrow$ -1

1.9 Graphe d'une fonction

Définition 1.42. *On appelle* graphe *ou* courbe représentative *d'une fonction numérique réelle $f : D \to \mathbb{R}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque x parcourt D.*

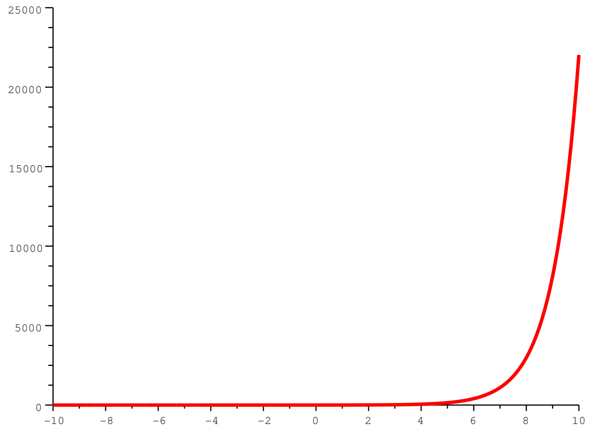

FIG. 1.3 – Graphe de la fonction exponentielle.

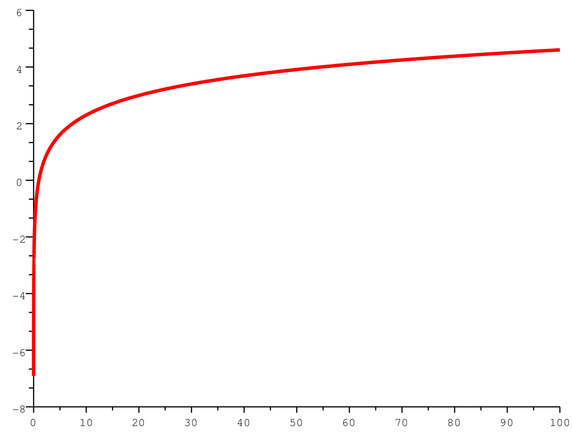

FIG. 1.4 – Graphe de la fonction logarithme.

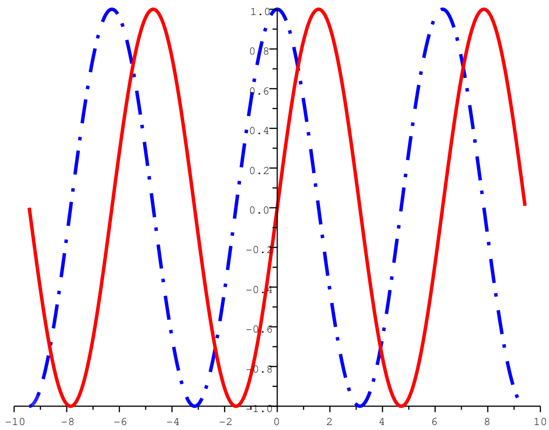

FIG. 1.5 – Graphe des fonctions cosinus (bleu, dash-dot) et sinus (rouge, plein) entre -3π et 3π.

Chapitre 2

Limites et continuité

2.1 Limite et continuité en un point

Définition 2.1 (Limite)**.** *On dit que la limite de f en un point a est égale à ℓ, et l'on note*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ ,$$

si pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $\forall x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \in J$, i.e. les images des éléments de $I \setminus \{a\}$ appartiennent à J.

Exemple 2.2. Les limites suivantes sont à connaître.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \ , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \ ,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1 \ , \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \ .$$

Définition 2.3 (Continuité)**.** *Soit f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$. La fonction f est continue en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

Remarque 2.4. Il ne faut pas confondre la notion de limite en un point et celle de continuité en point. Une fonction peut admettre une limite finie en un point sans y être définie. On ne peut étudier la continuité d'une fonction qu'en un point de son domaine de définition. Une fonction peut admettre une limite en un point de son domaine de définition sans être continue en ce point.

Nous admettrons la continuité des fonctions usuelles.

Théorème 2.5. *Les fonctions puissances, polynômes, rationnelles,* exp*,* log*,* sin*,* cos*,* tan *et valeur absolue sont continues en tout point de leur domaine de définition.*

2.2 Limite à droite et à gauche

Il peut arriver qu'une fonction ne soit pas définie à gauche ou à droite d'un point ou bien que le comportement d'une fonction f en un point a soit différent "à gauche" de a, i.e. pour les réels x strictement inférieurs à a, et "à droite" de a, i.e. pour les réels x strictement supérieurs à a (exemple 2.7. On doit donc définir les notions de limite à droite et à gauche.

Définition 2.6. *Soit $a < b$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, b[$.*

- *On dit que la limite de f à droite en a est égale à ℓ, et l'on note*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \ ,$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell \ ,$$

si pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un intervalle $]a, c[$ contenu dans $]a, b[$ tel que $\forall x \in]a, c[, \ f(x) \in J$.

- *On dit que la limite de f à gauche en b est égale à ℓ, et l'on note*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell \ ,$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \ell \ ,$$

si pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un intervalle $]c, b[$ contenu dans $]a, b[$ tel que $\forall x \in]c, b[, \ f(x) \in J$.

Exemple 2.7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cos(x) \ .$$

Pour $x > 0$, on a $x/|x| = -1$, et donc $f(x) = -\cos(x)$. La fonction cos étant continue en zéro, on a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\cos(x) = -1 \ .$$

Pour $x > 0$, on a $x/|x| = 1$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1 \ .$$

Exemple 2.8. La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas défini pour les valeurs de x négatives. Elle admet la limite 0 à droite en 0 : $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Définition 2.9 (Continuité à droite et à gauche)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a < b \in I$.*

- *On dit que f est continue à droite en a si*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ .$$

- *On dit que f est continue à gauche en b si*

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \ .$$

La limite d'une fonction en un point n'existe pas nécessairement. En particulier, si une fonction admet en un point a des limites distinctes à droite et à gauche, alors elle n'admet pas de limite en a (au sens de la définition 2.1). Réciproquement, on a le résultat suivant.

Proposition 2.10. *Soit f une fonction définie sur un ensemble A. Soit a un point de A.*

- *f admet une limite en a si et seulement si elle admet en a une limite à droite et à gauche qui sont égales.*
- *f est continue en a si et seulement si*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \ ,$$

  i.e. si f est continue à droite et à gauche en a.

Proposition 2.11. *Une fonction admettant une limite en un point a est bornée au voisinage du point a.*

Il existe cependant des fonctions bornées qui n'admettent pas de limite en un point. Par exemple, la fonction $x \to \sin(1/x)$ n'admet de limite ni à droite ni à gauche en zéro.

2.3 Limites infinies

Définition 2.12 (Limite infinie en un point)**.** *Soit $a < b$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, b[$.*

- *On dit que la limite de f à droite en a est égale à $+\infty$ et l'on note*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ ,$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty \ ,$$

si pour tout intervalle nombre réel positif A, il existe un intervalle $]a, c[$ contenu dans $]a, b[$ tel que $\forall x \in]a, c[,\ f(x) \geq A$.

- *On dit que la limite de f à gauche en b est égale à $+\infty$, et l'on note*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty \ ,$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty \ ,$$

si pour tout nombre réel positif A, il existe un intervalle $]c, b[$ contenu dans $]a, b[$ tel que $\forall x \in]c, b[,\ f(x) \geq A$.

- *On dit que f a pour limite $-\infty$ à droite en a ou à gauche en b si $-f$ a pour limite $+\infty$ à droite en a ou à gauche en b, respectivement.*

Exemple 2.13. Les limites suivantes sont à connaître.

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty \ , \quad \lim_{x \to 0^+} x \log(x) = 0 \ ,$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \ ,$$
$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \ , \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \ . \end{cases}$$

Exemple 2.14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \ .$$

Alors $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Proposition 2.15. *Une fonction admettant une limite infinie au voisinage d'un point (à droite ou à gauche) est non bornée au voisinage de ce point.*

Il ne suffit pas qu'une fonction soit non bornée au voisinage d'un point pour admettre une limite infinie en ce point. Par exemple, la fonction $x \to 1/\sin(x)$ est non bornée au voisinage de zéro, mais n'admet pas de limite, finie ou infinie, en zéro.

2.4 Limite en l'infini

On peut étudier le comportement d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ au "voisinage de l'infinie", c'est-à-dire étudier $f(x)$ pour des valeurs de plus en plus grandes (ou de plus en plus négatives) de la variable x. Les valeurs de la fonction peuvent

- devenir de plus en plus grandes, et l'on dit alors que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers l'infini ;
- de plus en plus négatives, et l'on dit alors que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers l'infini ;
- s'approcher de plus en plus d'une valeur limite ℓ quand x devient de plus en plus grand, et l'on dit alors que f tend vers ℓ lorsque x tend vers l'infini ;
- n'avoir aucun de ces comportements.

Définition 2.16 (Limites en $+\infty$)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, +\infty[$.*

- *On dit que f admet la limite $+\infty$ en $+\infty$ et l'on note*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty ,$$

si pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un nombre réel $c > a$ tel que $f(x) > A$ si $x > c$.

- *On dit que f admet la limite $-\infty$ en $+\infty$ et l'on note*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty ,$$

si pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un nombre réel $c > a$ tel que $f(x) < -A$ si $x > c$.

- *On dit que f admet la limite finie ℓ en $+\infty$ et l'on note*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell ,$$

si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un nombre réel $c > a$ tel que $f(x) \in I$ si $x > c$.

Définition 2.17 (Limites en $-\infty$). *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, a[$.*

- *On dit que f admet la limite $+\infty$ en $-\infty$ et l'on note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ ,$$

si pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un nombre réel $c < a$ tel que $f(x) > A$ si $x < c$.

- *On dit que f admet la limite $-\infty$ en $-\infty$ et l'on note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ ,$$

si pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un nombre réel $c < a$ tel que $f(x) < -A$ si $x < c$.

- *On dit que f admet la limite finie ℓ en $+\infty$ et l'on note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \ ,$$

si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un nombre réel $c < a$ tel que $f(x) \in I$ si $x < c$.

Exemple 2.18. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} \ .$$

On voit sur le graphe de f (figure 2.1) que la valeur de f s'approche de 2 quand x devient de plus en plus grand, i.e. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exemple 2.19. Les limites suivantes sont à connaître.

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \ ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty \ ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \ , \\ 0 & \text{si } a < 1 \ , \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \ , \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \ . \end{cases}$$

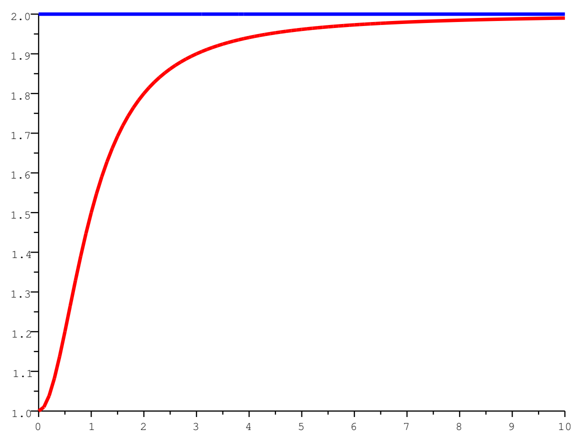

FIG. 2.1 – Graphe de $(2x^2 + 1)/(x^2 + 1)$

2.5 Opérations sur les limites

Si l'on connait les limites de deux fonctions en un point a ou en $\pm\infty$, peut-on automatiquement déterminer la limite de leur sommme, leur produit, leur quotient ? Si f admet une limite ℓ en a et si g est éfinie au voisinage ℓ, admet-elle une limite en ℓ ? La réponse à ces questions n'est pas systématique. Il existe des cas où la limite peut être déterminée par des règles algébriques, et d'autres cas nécessitant une étude particulière. Ces cas sont appelés formes indéterminées. Ce sont les plus importants en pratique, et on étudiera dans les chapitres suivants des méthodes pour étudier ces cas et lever les indérminations. Dans cette section, nous donnons sous forme de tables les règles qui s'appliquent dans les cas simples, i.e. sans indétermination.

Dans toutes ces tables, la notation $\lim_{x\to a}$ désigne indifféremment la limite en un point a, la limite à droite en a, la limite à gauche en a, la limite en $+\infty$ ou la limite en $-\infty$; le point d'interrogation "?" signifie qu'on ne peut pas donner de réponse dans le cas général, il y a indétermination.

2.5.1 Limite d'une somme

Dans ce tableau, on donne lorsque c'est possible la limite de la somme $f + g$ au point a (réel ou infini) en fonction des limites de f et g. Les indéterminations sont de la forme $+\infty - \infty$.

$\lim_{x\to a} g(x) \setminus \lim_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
l'	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 2.20. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2} + \sqrt{x}\ .$$

Cherchons les limites de f en 1, 0^+ et $+\infty$.

(i) Les fonctions $x \mapsto x^{-2}$ et $x \to \sqrt{x}$ sont continues en $x = 1$ donc $\lim_{x\to 1} x^{-2} = 1/1^2 = 1$ et $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$. Donc

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

(ii) La limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x^{-2}$ est égale à 0 donc

$$\lim_{x+\infty} \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{2} + 0 = -\frac{3}{2}\ .$$

La limite de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en $+\infty$ est égale à $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ .$$

(iii) La limite en 0+ de $x \mapsto \sqrt{x}$ est égale à 0 tandis que la limite en 0^+ de $x \mapsto x^{-2}$ est égale à ∞. Donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\ .$$

2.5.2 Limite d'un produit

Dans ce tableau, on donne lorsque c'est possible la limite de la somme $f + g$ au point a (réel ou infini) en fonction des limites de f et g. Les indéterminations sont de la forme $0 \times \infty$.

$\lim_{x\to a} f(x) \diagdown \lim_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$l < 0$	0	$l > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$l' < 0$	$+\infty$	ll'	0	ll'	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$l' > 0$	$-\infty$	ll'	0	ll'	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 2.21. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 - x^2 \ .$$

Les limites en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto -x^2$ sont, respectivement, égales à $+\infty$ et $-\infty$. On est donc en présence d'une forme indéterminée. Pour lever l'indéterminationn, mettons la plus grande puissance en facteur dans l'expression de f :

$$f(x) = x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ .$$

Remarquons maintenant que

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 > 0 \ .$$

Donc, d'après la table, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

2.5.3 Limite d'un quotient

Le quotient f/g de deux fonctions f et g peut être vu comme le produit de f par $1/g$. Le tableau suivant donne la limite de l'inverse $1/f$ d'une fonction f en a selon la valeur de $\lim_{x\to a} f(x)$.

$\lim_{x\to 0} f(x)$	$-\infty$	$l \neq 0$	0	$+\infty$
$\lim_{x\to a} 1/f(x)$	0	$1/l$	?	0

Exemple 2.22. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 3} \ .$$

On peut écrire la fonction f comme produit :

$$f(x) = (2x^2 + 2) \times \frac{1}{x^2 + 3} \ .$$

La limite en 0 de la fonction $x \mapsto 2x^2 + 2$ est égale à $2 \times 0^2 + 2 = 2$ et la limite de la fonction $x \mapsto (x^2 + 3)^{-1}$ est égale à $1/3$. Donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

En $+\infty$, la fraction f apparaît tout d'abord comme une forme indéterminée car

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^2 + 2) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 + 3} = 0.$$

Pour lever l'indétermination, mettons en facteur au numérateur et au dénominateur le terme de plus haut degré :

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 + \dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{2 + \dfrac{2}{x^2}}{1 + \dfrac{3}{x^2}}.$$

Avec cette écriture, on voit que les indéterminations sont levées, puisque l'on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{2}{x^2}\right) = 2 \ ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = 1 \neq 0 \ ,$$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2/1 = 2$.

On peut généraliser cette méthode pour l'étude des fractions rationnelles, c'est-à-dire des quotients de deux polynômes. Le résultat général est le suivant.

Proposition 2.23. *Soit P et Q deux polynômes de degrés respectifs p et q, et soit f la fraction P/Q. Soit a et b les coefficients de plus haut degré de P et Q. Alors*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \infty \text{ avec le signe de } a/b \text{ si } p > q \ , \\ a/b \text{ si } p = q \ , \\ 0 \text{ si } p < q \ . \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty \text{ avec le signe de } a/b \text{ si } p > q \text{ et } p - q \text{ est pair} \ , \\ \infty \text{ avec le signe de -}a/b \text{ si } p > q \text{ et } p - q \text{ est impair} \ , \\ a/b \text{ si } p = q \ , \\ 0 \text{ si } p < q \ . \end{cases}$$

2.5.4 Composition de limites

Proposition 2.24. *Soit A, B deux parties de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et $b \in B$. Soit $f : A\setminus\{a\} \to B$ et $g : B \setminus \{b\} \to C$ deux fonctions. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \ell$.*

Méthode Pour calculer la limite en a de la composée $g \circ f$ de deux fonctions,

(i) on détermine tout d'abord calculer la limite de f en a qu'on note b,

(ii) puis on calcule la limite de g en b. Le résultat obtenu est alors égal à la limite de $g \circ f$ en a.

Exemple 2.25. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{\sin(x) + 1}$. La fonction h peut s'écrire comme la composée $g \circ f$ des fonctions définies par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sin(x) + 1$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction sin étant continue en 0, on a $\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Maintenant $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ puisque la fonction g est continue en $x = 1$. En conclusion $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} g\circ f(x) = 1$.

Exemple 2.26. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ par $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Cherchons la limite en 0 de la fonction f. L'expression de f étant de la forme $u(x)^{v(x)}$, on écrit d'abord

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log(1 + x)}{x}\right) .$$

On a vu précédemment (cf. Exemple 2.2) que $\lim_{x\to 0} \log(1+x)/x = 1$. La fonction exp est continue en $x = 1$ donc $\lim_{x\to 1} \exp(x) = \exp(1) = \mathrm{e}$. La fonction f étant la composée des fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \log(1 + x)/x$, on obtient donc finalement $\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}$.

Exemple 2.27. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}.$$

Déterminons la limite à droite en 0 de cette fonction. Commençons par déterminer la limite à droite en 0 de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{1 + x^{-2}}$. On voit que la fonction g est la composée des fonctions $g_1 : x \mapsto 1 + x^{-2}$ et $g_2 : x \mapsto \sqrt{x}$. Or

$$\lim_{x\to 0} g_1(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} g_2(x) = +\infty .$$

Donc, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g_2(g_1(x)) = \lim_{x\to +\infty} g_2(x) = +\infty$. Or on sait par ailleurs que $\lim_{x\to 0^+} (-1/x) = -\infty$. Il y a donc une indétermination de la forme $+\infty - \infty$.

Pour lever l'indétermination, on transforme l'expression de f en utilisant la technique de la quantité conjugée. Rappelons que l'on appelle quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ la quantité $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. En multipliant et en divisant par la quantité conjuguée, on obtient l'identité

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \ .$$

Dans le cas présent, on obtient

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{x}} = \frac{1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{x}} \ .$$

Comme les fonctions $x \mapsto \sqrt{1 + x^{-2}}$ et $x \mapsto 1/x$ tendent toutes les deux vers $+\infty$ en 0^+, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = +\infty \ ,$$

et finalement

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} = 0 \ .$$

2.6 Croissances comparées

Pour lever certaines indéterminations, on peut utiliser les règles de "croissances comparées" entre les fonctions exponentielles, logarithmes et puissances. Intuitivement, dans une somme ou un produit de fonctions exponentielles et puissances, "l'exponentielle l'emporte toujours", et le logarithme jamais.

Proposition 2.28. *Pour tout nombre réel $a > 1$ et tout nombre réel $\alpha > 0$, on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \ , \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log(x)} = +\infty \tag{2.2}$$

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log(x) = 0 \ . \tag{2.3}$$

On peut déduire aisément de nouvelles comparaisons à partir des précédentes. Par exemple, de (2.1) et (2.2), on déduit que pour $a > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log(x)} = +\infty \ .$$

Exemple 2.29. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^3 - \log(x)$. Déterminons la limite de f en $+\infty$. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée puisque $\lim_{x\to0} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(-\log(x)) = -\infty$. Intuitivement, on sait que la puissance l'emporte sur le logarithme. La limite attendue est donc $+\infty$. Prouvons-le rigoureusement en utilisant la proposition 2.28. Mettons la puissance x^3 en facteur dans l'expression de f :

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{\log(x)}{x^3}\right) \ .$$

D'après la proposition 2.28, on a $\lim_{x\to+\infty} \log(x)/x^3 = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\log(x)}{x^3}\right) = 1 \ ,$$

dont on déduit en appliquant maintenant la règle du produit dans un cas licite que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 2.30. Déterminons la limite en $+\infty$ et ∞ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2^x - x^4}{x^4 + 1} \ .$$

On sait que $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$. Le terme 2^x l'emporte donc en $+\infty$, mais est négligeable en $-\infty$. En appliquant les règles intuitives, on obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \ .$$

Pour une preuve rigoureuse, on met en facteur au numérateur et au dénominateur le terme qui l'emporte. En $+\infty$, on écrit donc

$$f(x) = \frac{2^x\left(1 - x^4 2^{-x}\right)}{x^4(1 + x^{-4})} = \frac{2^x}{x^4} \times \frac{1 + x^4 2^{-x}}{1 + x^{-4}} \ .$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^4} = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} x^4 2^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{2^x} = 0 \ , \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-4} = 0 \ .$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^4 2^{-x}}{1 + x^{-4}} = \frac{1}{1} = 1$$

et finalement

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Pour déterminer la limite en $-\infty$, on écrit

$$f(x) = \frac{x^4\left(-1 + x^{-4} 2^x\right)}{x^4(1 + x^{-4})} = \frac{1 + x^{-4} 2^x}{1 + x^{-4}} \ .$$

Or $\lim_{x\to-\infty} x^{-4} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

2.7 Détermination de limites par comparaison

Proposition 2.31. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $a \in A$. Soit f, g et h trois fonctions définies sur A telles que*

$$\forall x \in A \setminus \{a\}, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ .$$

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$. *Alors* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Exemple 2.32. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin(1/x)$. Cherchons la limite en 0 de la fonction f. Pour cela, nous allons encadrer f pat deux fonctions. Rappelons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \ .$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad -1 \leq \sin(1/x) \leq 1 \ .$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad -x \leq f(x) \leq x.$$

Or $\lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$. On en déduit alors que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Proposition 2.33. *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]a, b[$ (avec éventuellement $b = \infty$) telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.*
- *Si $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$.*
- *Si $\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$.*

Exemple 2.34. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x + \log(x)}{x \exp(x) + 1}$. Cherchons la limite de f en 0^+. Pour cela remarquons que

$$\forall x \in]0, 1[, f(x) \leq \log(x) + 1.$$

Or $\lim_{x\to 0^+}(\log(x) + 1) = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

2.8 Branches infinies

L'étude des branches infinies d'une fonction consiste à déterminer l'allure de sa courbe représentative au voisnage de $\pm\infty$.

Définition 2.35 (Asymptote)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0, +\infty[$ (ou $]-\infty, x_0[$). Soit a et b deux nombres réels quelconques. On dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si et seulement si*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0 \quad (\textit{respectivement } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0)$$

Remarque 2.36. Graphiquement, une droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $\pm\infty$ lorsque les courbes représentatives de f et de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ se rapprochent l'une de l'autre lorsque x tend vers l'infini.

Définition 2.37. *Soit f une fonction numérique réelle définie sur un intervalle $]x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0[$.*

(i) On dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $(0y)$ lorsque $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$.

(ii) On dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $(0x)$ lorsque $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

(iii) On dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $y = ax$, $a \neq 0$, lorsque $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.

Remarque 2.38. Si la courbe représentative d'une fonction f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymtote en $\pm\infty$ alors $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = a$. La réciproque est fausse. Il faut bien distinguer asymptote et branche parabolique.

Exemple 2.39. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \log(x)$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$, mais $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$. Il n'y a donc pas d'asymptote en $+\infty$.

Méthode Pour étudier les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction, on procède comme suit.

1. On détermine $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Si cette limite est finie, i.e. égale à un nombre réel ℓ, alors la courbe représentative de f admet la droite $y = \ell$ pour asymptote en $\pm\infty$.
2. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on détermine la limite de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$.
   (a) Si cette limite est infinie alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $(0y)$.
   (b) Si cette limite est égale à 0 lors la courbe repésentative de f admet une branche parabolique d'axe $(0y)$.
   (c) Si celle limite est égale à un nombre réel $a \neq 0$, on détermine la limite de $f(x) - ax$ en $\pm\infty$ (qui est forcément une forme indéterminée). On distingue à nouveau deux cas.
      – $\lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - ax\Big) = \pm\infty$. La courbe représentative de f admet alors une branche parabolique de direction $y = ax$.
      – $\lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - ax\Big) = b$. La courbe représentative de f admet alors une asymptote d'équation $y = ax + b$.

Exemple 2.40. La courbe représentative de la fonction exp admet une branche parabolique d'axe $(0y)$ en $+\infty$, puisque $\lim_{x\to 0} \exp(x)/x = +\infty$. En $-\infty$, la courbe représentative de la fonction exp admet la droite $y = 0$ pour asymptote puisque $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Exemple 2.41. La graphe de la fonction log admet une branche parabolique d'axe $(0x)$ en $+\infty$, puisque $\lim_{x\to\infty}\log(x)=\infty$ et $\lim_{x\to 0}\log(x)/x=0$.

Exemple 2.42. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=2x+\sqrt{x}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2$$

et $\lim_{x\to\infty} f(x)-2x=\infty$. La courbe représentative de f admet une branche parabolique d'axe $y=2x$ mais pas d'asymptote.

Exemple 2.43. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}\ .$$

On a

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2+3x+1}{x(x+1)}=\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}\ .$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x=1$. De plus

$$f(x)-x=\frac{x^2+3x+1-(x^2+x)}{x+1}=\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\ .$$

La courbe d'équation $y=x+2$ est donc asymptote au graphe de f.

2.9 Continuité sur un intervalle

Définition 2.44. *Soit I un intervalle ouvert. Soit f une fonction numérique définie sur I. On dit alors que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Définition 2.45. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. On dit que f est continue sur $[a,b]$ si et seulement si f est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.*

Proposition 2.46. *Les fonctions puissances, exponentielles, logarithme et circulaires sont continues sur leur domaine de définition.*

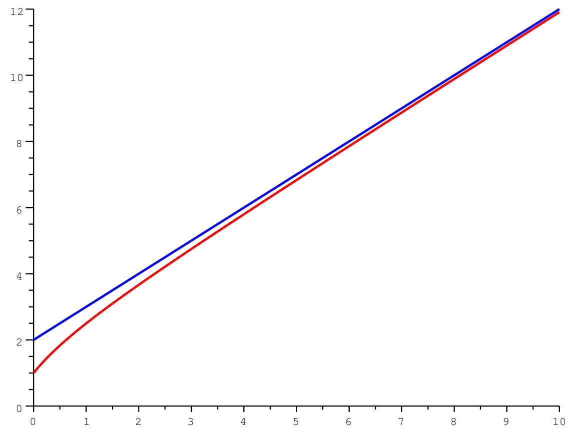

FIG. 2.2 – Courbe représentative (rouge) de $(x^2+3x+1)/(x+1)$ sous son asymptote (bleue) $y = x + 2$.

2.9.1 Opérations

Proposition 2.47. *Soit f et g deux fonctions définie et continues sur un intervalle I. Alors*

- *la fonction $f + g$ est continue sur I ;*
- *la fonction fg est continue sur I ;*
- *si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f/g est continue sur I.*

Proposition 2.48. *Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur I et que g est continue sur J. Alors, $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.*

Exemple 2.49. Soit $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$. La fonction f est la composée des fonctions $g(x) = 1 + \sin(x)$ et $h(x) = \sqrt{x}$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (car $\sin(x) \geq -1$ donc $1+\sin(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction $h \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.9.2 Prolongement par continuité

Théorème 2.50 (Prolongement par continuité)**.** *Soit f une fonction définie et continue sur $I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle et $a \in I$. Si f admet une limite finie ℓ au point a, il existe une unique fonction g définie et continue sur I et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.*

La fonction g ainsi définie est appelée prolongement par continuité de f en a, et on a nécessairement $g(a) = \ell$. Par abus de notation, on désigne généralement le prolongement par continuité d'une fonction par la même lettre.

Exemple 2.51. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sin(x)/x$. On sait que $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$. On peut donc prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \ , \quad f(0) = 1 \ .$$

2.9.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.52. *Soit f continue sur le segment $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Exemple 2.53. Soit $(x) = x^4 - 3x + 1$. Montrons que f s'annule sur l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction f est un polynôme donc elle est continue sur $[-1, 1]$. De plus, $f(-1)f(1) = 5 \times (-1) = -5 < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]-1, 1[$, i.e. il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Théorème 2.54. *Soit f une fonction continue strictement croissante (ou strictement décroissante) sur un intervalle I. Alors l'image de I par f est un intervalle J et admet une réciproque, i.e. il existe une fonction g définie sur J telle que*

$$\forall x \in I \ , \ g \circ f(x) = x \ , \quad \forall y \in J \ , \ f \circ g(y) = y \ .$$

Exemple 2.55. La fonction logarithme est la réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction exponentielle.