Chapitre 2
Notes sur les déterminants de l'investissement

Bertrand Crettez

Mars 2008

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de proposer une analyse élémentaire des déterminants de l'investissement[1].

Pour comprendre l'approche suivie par les économistes, il est bon de partir d'une relation comptable entre stock de capital et investissement.

Soit K_t le stock de capital possédée par une entreprise à une date t quelconque. Notons I_t l'investissement réalisé à cette même date. Alors, si δ représente le taux de dépréciation du capital, c'est-à-dire la fraction du capital qui est usée par les opérations de production, l'évolution du stock de capital entre la date t et $t+1$ est donnée par l'équation suivante :

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{1}$$

Autrement dit, le stock de capital disponible à la date t est égal à la partie du capital disponible en t qui n'est pas dépréciée, augmentée de l'investissement réalisé au cours de cette période.

Pour mieux comprendre cette équation, imaginons que $\delta = 1/2$. Ceci signifie que, faute d'investissement, le stock de capital disponible est divisé par deux à chaque période.

[1] Nous nous inspirerons pour partie de la présentation proposée par Grimaud, *Analyse macroéconomique*, Montchrétien, 1999.

L'intérêt de cette équation est de nous permettre de poser le problème de la détermination de l'investissement dans les termes suivants. Expliquer la demande d'investissement est équivalent àexpliquer la demande de stock de capital de l'entreprise à la date $t+1$.

En réalité, ce qui intéresse une entreprise, c'est aussi le stock de capital dont elle estime avoir besoin non seulement demain, mais après demain (par exemple, une cimenterie peut être utilisée pendant plusieurs décenies). Pour simplifier l'analyse, nous ne retiendrons généralement qu'un horizon de décision d'une seule période. Plus précisément, nous considérerons une entreprise qui doit décider à la date 0 du montant de son capital pour la date 1.

2 Les déterminants du capital désiré

Nous allons supposer que l'entreprise utilise uniquement du capital. Soit Q_1 le volume de la production à la date 1. On suppose que :

$$Q_1 = G(K_1) \tag{2}$$

où $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction strictement croissante et strictement concave du capital K_1 (elle est également deux fois dérivable). Le graphe de la fonction est représenté sur la figure 1.

On note p_t le prix de l'unique bien dans l'économie à la date t : p_1 est donc le prix auquel on pourra vendre le bien produit au cours de la période 1 et p_0 est le prix auquel on achète du bien à la date 0 à des fins d'investissement.

On note i_1 le taux de rentabilité que doit rapporter chaque unité de capital. On peut comprendre ce taux de deux façons. Ou bien le capital supplémentaire est apporté par des actionnaires et i_1 est le taux de rendement demandé par ceux-ci (ce qu'ils pourraient obtenir s'ils investissaient sur le marché financier). Ou bien le capital est emprunté et dans ce cas l'interprétation est immédiate (i_1 est le taux d'intérêt demandé par la banque prêteuse).

Un investissement d'un montant I_0 permet d'engendrer le profit suivant à la date 1 :

$$p_1 G\big((1-\delta)K_0 + I_0\big) - (1+i_1)p_0 I_0 \tag{3}$$

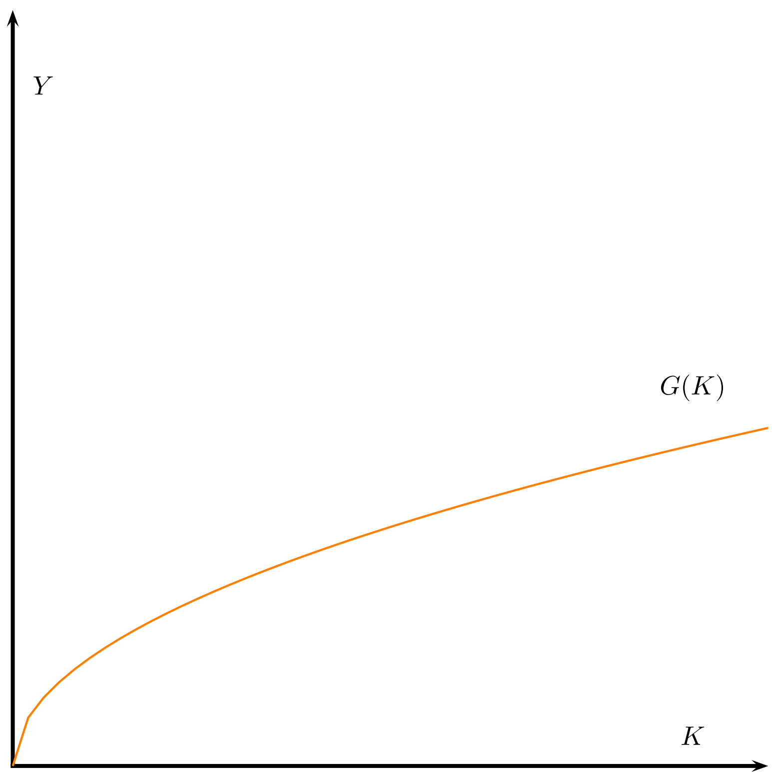

Figure 1: Le graphe de la fonction de production $G(K)$

Si l'entreprise n'a pas de contraintes d'endettement ou bénéficie d'un accès sans limite au marché des capitaux, le problème de l'entreprise est maintenant bien posé.

Déterminer la demande d'investissement, c'est déterminer la quantité I_0 qui maximise l'expression ci-dessus (cf graphique 2).

Nous allons supposer que le rendement marginal du capital $G'(K)$ tend vers 0 lorsque K tend vers plus l'infini. Alors dans ce cas on peut montrer que le problème consistant à maximiser le profit de l'entreprise admet une solution. Celle-ci satisfait la condition nécessaire d'optimalité[2] :

$$p_1 G'(K_1) = (1 + i_1)p_0 \tag{4}$$

L'investissement optimal est $I_0^* = K_1 - (1 - \delta)K_0$.

L'interprétation de cette condition se fait comme suit. Augmenter l'investissement d'une unité permet d'accroître approximativement le chiffre d'affaire de $p_1 G'(K_1)$ à la date 1[3]. Cette augmentation de l'investissement engendre un coût supplémentaire de $(1+i_1)p_0$. On investit tant que la différence entre le gain marginal et le coût marginal est strictement positive (cf graphique 3). Lorsque l'on a fait le bon choix, cette différence est nécessairement nulle (si elle était positive, on devrait accoître l'investissement, sinon, il faudrait le diminuer).

En réarrangeant l'équation ci-dessus, il vient :

$$G'(K_1) = \frac{(1 + i_1)p_0}{p_1} \tag{5}$$

Autrement dit, la productivité marginale du capital est égale au coût d'acquisition du capital en termes de bien 1 (ou encore, au facteur d'intérêt réel (1+le taux d'intérêt)).

L'analyse que nous avons menée peut être utilement complétée. En effet, on peut se demander à quoi sert de disposer d'un capital à la fin de la période 1 si l'horizon de décision est limité à une période. Si l'activité de l'entreprise

[2] On suppose que l'équation est vérifiée avec une valeur de $K_1 > (1 - \delta)K_0$.

[3] Ceci vient du fait que l'on a $G\big((1 - \delta)K_0 + I_0 + 1\big) - G\big((1 - \delta)K_0 + I_0\big) \approx G'\big((1 - \delta)K_0 + I_0\big)$.

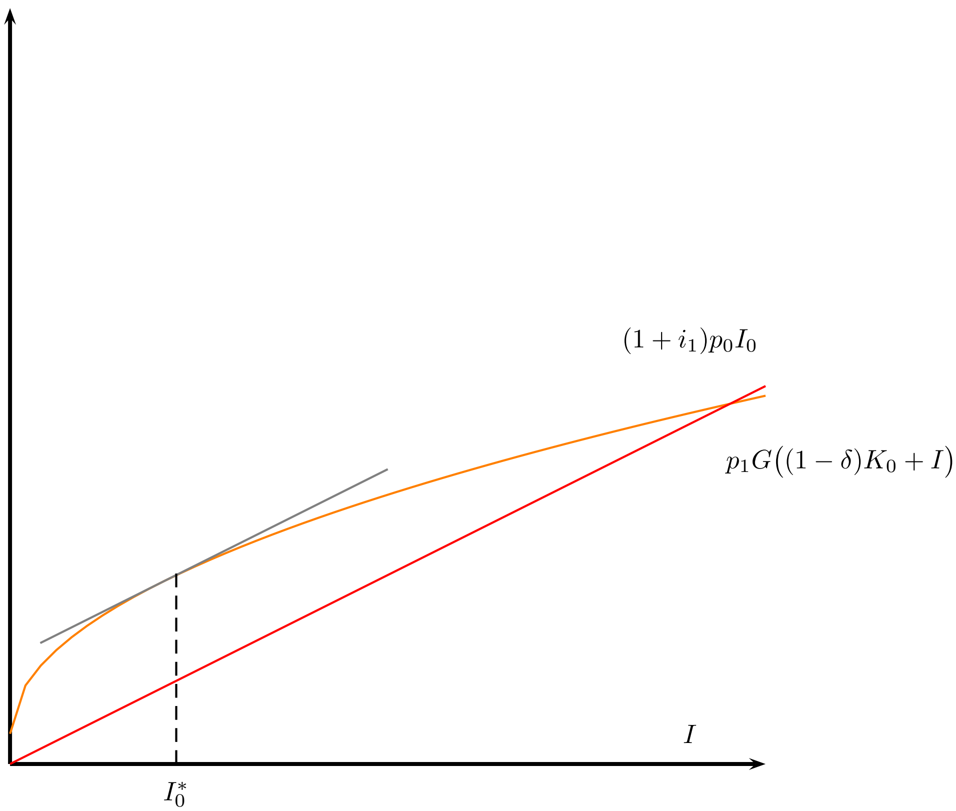

Figure 2: La dtermination de l'investissement

se termine bien à la fin de la date 1, il est légitime d'envisager que le capital soit vendu. Autrement dit, le profit attendu d'un stock de capital égal à K_1 s'écrit désormais :

$$p_1\Big(G\big(K_1) + (1-\delta)K_1\Big) - (1+i_1)p_0\big(K_1 - (1-\delta)K_0\big) \tag{6}$$

Nous avons tenu compte du fait que le capital se dépréciait lors des opérations de production et que donc seule une fraction $(1-\delta)$ pouvait être vendue. En remplaçant K_1 par son expression en fonction de l'investissement dans l'expression ci-dessus la condition nécessaire d'optimalité s'écrit maintenant :

$$p_1\Big(G'(K_1) + (1-\delta)\Big) = (1+i_1)p_0 \tag{7}$$

On remarque qu'il y a maintenant un terme supplémentaire $(p_1(1-\delta) - p_0)$ qui représente l'existence d'une plus ou moins value lors de la revente du capital.

Remarque. Les expressions précédentes sont-elles encore valables si l'entreprise fait de l'autoinvestissement ? Oui, car les sommes investies proviennent des opérations de production de la période 0 (pour simplifier) et il convient (au moins en première approximation) de considérer que ces sommes pourraient rapporter un rendement i_1 ailleurs (les ressources de l'entreprise ne sont pas gratuites, il y a toujours un coût d'opportunité).

Revenons à l'expression :

$$G'(K_1) = \frac{(1+i_1)p_0}{p_1} \tag{8}$$

En utilisant la méthode exposée dans le chapitre sur le consommateur, nous pouvons examiner la façon dont le capital désiré par l'entreprise change lorsque son environnement économique est modifié.

Exercice. Vérifier que :

$$\frac{\partial K_1}{\partial p_0} = \frac{1+i_1}{p_1 G''(K_1)} \tag{9}$$
$$\frac{\partial K_1}{\partial i_1} = \frac{p_0}{p_1 G''(K_1)} \tag{10}$$
$$\frac{\partial K_1}{\partial p_1} = -\frac{(1+i_1)p_0}{p_1^2 G''(K_1)} \tag{11}$$

Les deux premières expressions sont négatives, la dernière est positive.

Pour comprendre ces signes, on peut toutefois se contenter d'examiner l'équation (8). Partons en effet d'une situation dans laquelle le choix optimal de l'entreprise a été réalisé. Augmentons le taux d'intérêt i_1. Dans ce cas, l'équation (8) n'est plus vérifiée (cf graphique 3). Le membre de gauche est plus petit que le membre de droite. Autrement dit, la productivité marginale du capital de l'entreprise n'est pas assez forte. Pour la faire croître, l'entreprise doit demander moins de capital. Par conséquent, on voit que le taux d'intérêt a un influence négative sur le capital demandé et donc sur l'investissement.

Exercice. Effectuer la même opération pour le cas où soit, p_0 soit p_1 augmente.

3 Remarque sur la valeur actualisée nette

Dans la pratique, on procède un peu différemment. On examine ce que l'on appelle la valeur actualisée nette d'un projet d'investissement.

Au lieu de se placer à la date 1, on se place à la date 0 et on exprime tous les flux en unités de cette date. La valeur actualisée nette correspondant au choix d'un stock de capital égal à K_1 est simplement :

$$\frac{p_1 G\big((1-\delta)K_0 + I_0\big)}{(1+i_1)} - p_0 I_0 \tag{12}$$

On investit si la valeur actualisée nette d'un projet est positive.

On cherche aussi parfois le taux de rendement interne d'un projet d'investissement. C'est le taux d'intérêt qui annule la valeur actualisée nette d'un

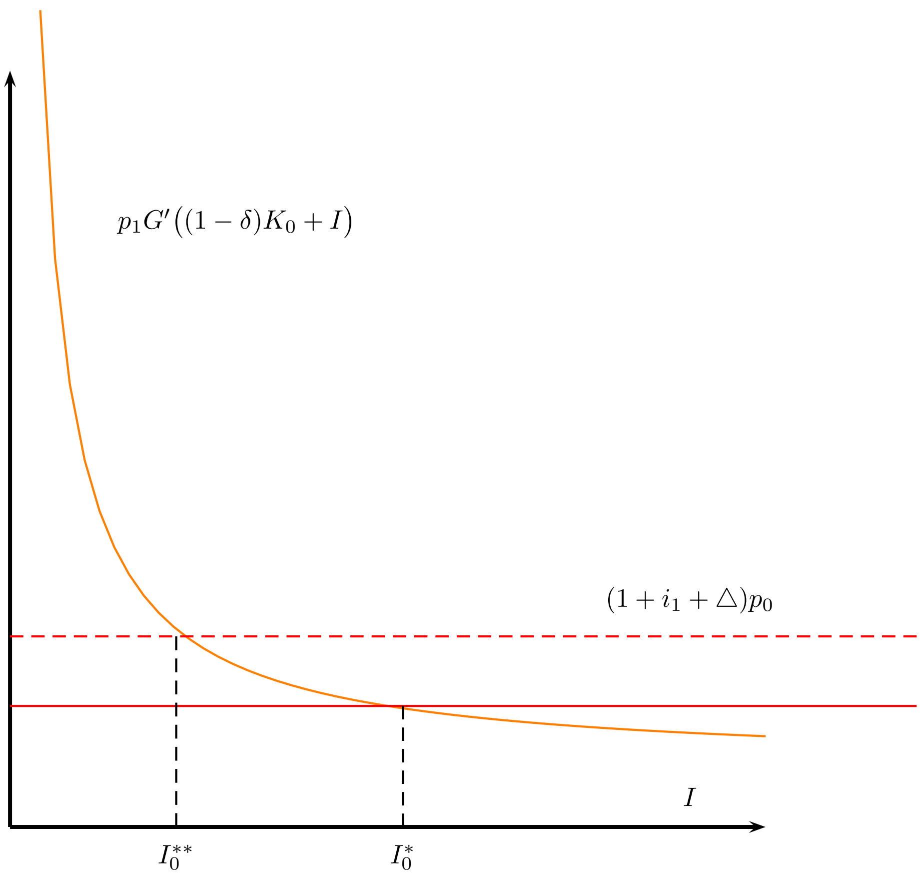

Figure 3: La dtermination de l'investissement (suite)

projet. Il est clair que lorsque le T.R.I est supérieur au taux d'intérêt du marché, le projet est rentable (et réciproquement).

L'étape logique suivante est de reconsidérer l'analyse menée jusqu'ici dans un cadre comportant plusieurs périodes. Prenons ainsi le cas d'une entreprise qui envisage de produire au cours des périodes 1 et 2. Nous supposons qu'elle se finance par emprunt (au cours de la période 0 et à la période 1 si c'est nécessaire). Les emprunts se font au même taux d'intérêt r et ont une maturité d'une période. Nous supposons également que les profits ne sont reversés qu'à la seconde période. Finalement, on suppose qu'il n'y a pas de hausse des prix (et que les prix sont Ègaux ‡ 1), que la valeur initiale du capital K_0 est nulle et que le taux de dépréciation est égal à 1. D'un point de vue comptable, les choses se présentent comme suit.

A la période 0, l'entreprise finance son investissement I_0 par un emprunt E_0 auprès de sa banque. Nous aurons donc :

$$E_0 = I_0 \tag{13}$$

A la seconde période, l'entreprise finance son investissement éventuel I_1 en utilisant les ventes de la période 1 ($G(I_0)$)). En notant E_1 l'emprunt réalisé au cours de la date 1, les opérations comptables de l'entreprise sont résumées par l'équation suivante :

$$E_1 = I_1 - G(I_0) + (1+r)E_0 \tag{14}$$

Finalement, à la date terminale, la dette doit être remboursée (par hypothèse, l'activité s'arrête). On a donc la contrainte (de solvabilité) :

$$G(I_1) - (1+r)E_1 \geq 0 \tag{15}$$

On peut additionner membres les inéquations et équations (13), (14) et (15) après avoir divisé (14) par $(1+r)$ et (15) par $(1+r)^2$. Il vient alors :

$$\frac{G(I_0)}{1+r} + \frac{G(I_1)}{(1+r)^2} \geq I_0 + \frac{I_1}{1+r} \tag{16}$$

La dernière équation est une condition de solvabilité et s'énonce ainsi : la somme actualisée des ventes doit être plus grande que la somme actualisée des investissements.

La maximisation des dividendes versés à la période 2 implique de maximiser la valeur actuelle nette des gains de l'entreprise, c'est-à-dire :

$$\frac{G(I_0)}{1+r} + \frac{G(I_1)}{(1+r)^2} - I_0 - \frac{I_1}{1+r} \tag{17}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\frac{G'(I_0)}{1+r} = 1 \tag{18}$$

$$\frac{G'(I_1)}{(1+r)^2} = \frac{1}{1+r} \tag{19}$$

où encore :

$$G'(I_0) = 1 + r \tag{20}$$

$$G'(I_1) = 1 + r \tag{21}$$

Ces expressions s'interprètent de la même façon que dans les sections précédentes.

Exercice 1) Que se passe-t-il si le taux d'intérêt en 1 est différent du taux d'intérêt en 0. 2) Que se passe-t-il si le taux de dépréciation n'est plus nul et si l'on peut vendre le capital acheté (et si K_0 n'est plus nul) ?

4 Coût d'ajustement

Jusqu'à présent, le coût de l'investissement a été égal à la valeur du bien acheté que l'on transforme en capital. Mais la réalisation d'un investissement peut entraîner d'autre coûts : la mise en place de nouvelles machines nécessite parfois un arrêt de la production, du personnel doit être formé etc...

On modélise ces différents coûts en utilisant par exemple une fonction $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$C(I) = K\Phi(\frac{I}{K}) \tag{22}$$

où $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante, convexe, deux fois dérivable, vérifiant $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0) = 0$ (cf graphique 4).

Exercice : comment varie ce coût en fonction du stock de capital K.

L'écriture du profit est modifiée comme suit :

$$G((1-\delta)K + I) - (1+r)\big(1 + K\Phi(\frac{I}{K})\big) \tag{23}$$

La condition nécessaire d'optimalité devient alors :

$$G'((1-\delta)K + I) = (1+r)(1 + \Phi'(\frac{I}{K})) \tag{24}$$

Le membre de droite est le coût marginal total de l'investissement. On voit donc qu'au coût financier, il faut ajouter un coût réel pour bien expliquer l'investissement (ce sera vrai des industries très capitalistiques comme l'industrie nucléaire). Le point important est que plus le coût d'ajustement est important, moins l'investissement est sensible au taux d'intérêt (une relance de l'investissement par la baisse du taux d'intérêt ne sera pas très efficace).

5 L'accélérateur

Jusqu'à présent, nous n'avons pas beaucoup tenu compte des débouchés de l'entreprise. Supposons donc que l'on ne puisse pas écouler plus d'une quantité $\overline{Y}_1$ à la période 1 (vraissemblablement, le prix doit être fixe (pourquoi ?)).

Le problème de détermination de l'investissement devient :

$$\max_{I_0} \frac{G((1-\delta)K_0 + I_0)}{1+r} - I_0 \tag{25}$$

$$G((1-\delta)K_0 + I_0) \le \overline{Y}_1 \tag{26}$$

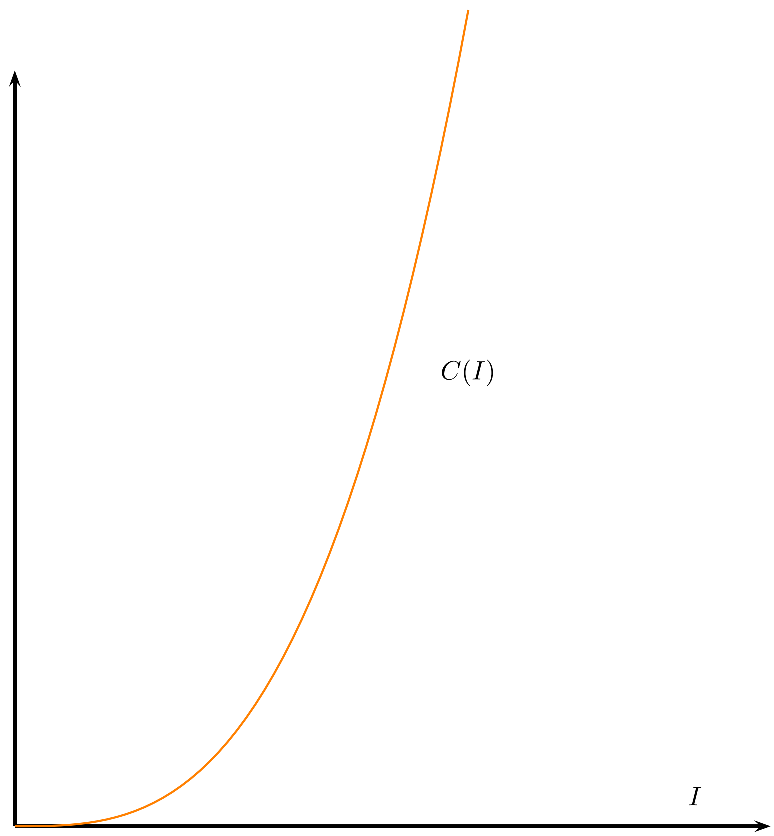

Figure 4: Le coût de l'investissement

Le cas qui nous intéresse est celui pour lequel la valeur $K_1(r)$ qui vérifie :

$$G'(K_1(r)) = 1 + r \tag{27}$$

est telle que :

$$G(K_1(r)) > \overline{Y}_1 \tag{28}$$

Dans ce cas, la valeur du capital choisie $K_1(\overline{Y}_1)$ vérifie :

$$\overline{Y}_1 = G(K_1(\overline{Y}_1)) \tag{29}$$

En effet, sous nos hypothèses, le profit est croissant tant que le capital est plus petit que $K_1(r)$ (pourquoi ?).

L'investissement vaut donc : $K_1(\overline{Y}_1) - K_0$.

S'il existait une relation entre K_0 et $\overline{Y}_0$ de même nature que celle entre $K_1(\overline{Y}_1)$ et $\overline{Y}_1$, on pourrait écrire :

$$I(\overline{Y}_1) = K_1(\overline{Y}_1) - K_0(\overline{Y}_0) \tag{30}$$

si le membre de droite est positif.

D'un point de vue pratique, on estime que $K_1(\overline{Y}_1) \approx 3\overline{Y}_1$. C'est-à-dire que pour produire une unité de PIB supplémentaire il faut environ trois unités de capital. Pour cette raison, toute variation de la production entraîne une variation proportionnellement plus grande de l'investissement. Celui-ci est donc plus volatile que la production agrégée.

On remarquera que l'investissement se fait en fonction des anticipations de la demande. Si celles-ci sont très volatiles (les esprits animaux des entrepreneurs (Keynes)), l'investissement le sera également.

6 Quelques remarques sur les asymétries d'informations et les imperfections des marchés financiers

Un marché financier est parfait lorsque tous les agents y ont accès (ils peuvent prêter et emprunter au même taux)[4].

On peut admettre que seules certaines grandes entreprises ont accès au marché financier. Ceci peut s'expliquer par l'existence de coût fixes (il faut faire examiner ses comptes, faire de la publicité auprès des investisseurs potentiels etc...). D'autre part, la taille des entreprises et celle de leurs actifs leur permet de bénéficier d'un effet de réputation favorable (son inexistence paralyserait les petites entreprises, lequelles font plutôt appel aux banques etc... ou à l'autofinancement).

La principale conséquence (possible) des asymétries d'information est que certains investissement rentables peuvent n'être pas financés. Une autre conséquence est que tout accroissement des profits permet de financer plus d'investissements (le cas échéant). Enfin, l'occtroi d'un prêt se fera en fonction de la richesse de l'entreprise (c'est-à-dire en fonction des garanties etc...).

Ainsi les conditions financières et patrimoniales des entreprises vont conditionner la possibilité de réaliser des investissement.

[4]Sur ces points, cf Grimaud.