Université de Paris Ouest-Nanterre

Licence de Sciences Économiques 1ère année
Année 2008-2009

Cours de Mathématiques I

Patrice Bertail (UPA) François Métayer (UPC)
Philippe Soulier (UPB)

Notes rédigées par Salah Mehdi, Laurent Mesnager et
Philippe Soulier

Table des matières

Chapitre 6

Suites numériques

6.1 Définitions et notations

Définition 6.1 (Suite numérique)**.** *Une suite numérique ou suite réelle est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Une suite est donc une application qui associe des nombres réels aux entiers naturels. On devrait utiliser la notation usuelle des applications. Une suite u devrait être notée

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \ , \\ n &\mapsto u(n) \ . \end{aligned}$$

Mais la coutume est d'utiliser toutes sortes de notations. Une suite sera désignée indifféremment par une des notations suivantes :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \quad (u_n) \ , \quad \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ , \quad \{u_n\} \ , \quad \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Le terme u_n est appelé le terme général de la suite. La suite peut ne pas être indexée à partir de 0. Si elle est indexée à partir de a, on note alors

$$(u_n)_{n\geq a} \ , \quad \{u_n\}_{n\geq a} \ .$$

u_a est alors le premier terme de la suite, u_{a+1} est le deuxième, etc.

Exemple 6.2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général $u_n = n$. Les premiers termes de la suite sont $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, etc. Le quinzième terme est $u_{14} = 14$.

Exemple 6.3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 1/n$. Les premiers termes de la suite sont $u_1 = 1$, $u_2 = 1/2$, $u_3 = 1/3$, etc. Le quinzième terme est $u_{15} = 1/15$.

Exemple 6.4. Soit (u_n) la suite dont le terme général de $u_n = \frac{1}{(n-1)(n-7)}$. On ne peut pas pour $n = 1$ et $n = 7$, de sorte que la suite (u_n) ne peut être définie systématiquement qu'à partir de $n = 8$. On note donc $(u_n)_{n\geq 8}$. Les 3 premiers termes de la suite sont alors $u_8 = 1/7$, $u_9 = 1/16$, $u_{10} = 1/27$. Le quinzième terme est $u_{22} = 1/315$.

Exemple 6.5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général $u_n = 2^n$. Ses premiers termes sont $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, etc. Le quinzième terme est $u_{14} = 2^{14}$.

Définition 6.6 (Suites constantes)**.** *Une suite (u_n) est constante si $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier n ; c'est-à-dire deux termes consécutifs quelconques sont égaux.*

Définition 6.7 (Suites arithmétiques)**.** *Une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constante : il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n. Cette constante r est appelée la raison de la suite arithmétique (u_n).*

Exemple 6.8. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = 2n+1$. C'est une suite arithmétique de raison 2. En effet, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2 .$$

Les premiers termes sont $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$. Le quinzième terme est $u_{14} = 29$.

Proposition 6.9. *Soit a un entier et soit $(u_n)_{n\geq a}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $n \geq a$, $u_n = (n-a)r + u_a$. Si $r = 0$, alors la suite est constante.*

Démonstration. Pour tout $n \geq a+1$, on a

$$u_n - u_{n-1} = r \ , \ u_{n-1} - u_{n-2} = r \ , \ldots , u_{a+1} - u_a = r \ ,$$

et donc

$$u_n - u_a = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \cdots + u_{a+1} - u_a = (n-a)r \ .$$

□

Définition 6.10 (Suites géométriques)**.** *Une suite (u_n) est dite géométrique si le rapport de deux termes consécutifs quelconques de la suite est constant, i.e. si il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}/u_n = q$. La constante q est appelée raison de la suite (u_n).*

Exemple 6.11. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = 3^n$ est une suite géométrique de raison 3. En effet, pour tout n, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 \; .$$

Ses premiers termes sont $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 9$, etc.

Proposition 6.12. *Soit a un entier et soit $(u_n)_{n\geq a}$ une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout $n \geq a$, on a*

$$u_n = u_a q^n \; .$$

Si $q = 1$, alors la suite est constante.

Démonstration. Par définition, pour tout $n \geq a+1$, on a

$$\frac{u_{a+1}}{u_a} = q \; , \; \frac{u_{a+2}}{u_{a+1}} = q \; , \; \ldots \; \frac{u_n}{u_{n-1}} = q \; .$$

et donc

$$u_n = \frac{u_{a+1}}{u_a} \times \frac{u_{a+2}}{u_{a+1}} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} = q \times q \times q \times \cdots \times q = u_a q^{n-a} \; .$$

□

6.2 Suites monotones

Définition 6.13 (Suites croissantes, décroissantes, monotones)**.**

- *Une suite (u_n) est croissante si la différence entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est positive : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n. La suite est dite strictement croissante si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n.*
- *Une suite (u_n) est décroissante si la différence entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est négative : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n. La suite est dite strictement décroissante si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n.*
- *Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante. Une suite est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple 6.14. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Si $r > 0$, la suite est strictement croissante, si $r = 0$, la suite est constante, si $r > 0$, la suite est décroissante.

Exemple 6.15. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Si $q > 1$, la suite est strictement croissante, si $q = 1$, la suite est constante, si $0 < q < 1$, la suite est décroissante. Si $q = 0$, la suite est constante à partir du deuxième terme. Si $q < 0$, la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

Exemple 6.16. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0 \; . \end{aligned}$$

La suite est donc strictement croissante.

Exemple 6.17. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 1/n$. On a alors, pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \; .$$

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple 6.18. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 1/\sqrt{n}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} < 0 \; .$$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 6.19. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$. Les premiers termes sont $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$, $u_4 = 1$, etc. Pour tout $k \geq 0$, on a $u_{2k} = 1$ et $u_{2k+1} = -1$. On a donc $u_{2k} > u_{2k+1}$ donc la $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas croissante, et $u_{2k-1} < u_{2k}$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas croissante.

6.3 Suites majorées, minorées

Définition 6.20 (Suites majorées, minorées, bornées). *Une suite $(u_n)_{n\geq a}$ est dite*

- *majorée si il existe un nombre réel M appelé un majorant de la suite tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq a$;*
- *majorée si il existe un nombre réel M appelé un majorant de la suite tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq a$;*

– *bornée si elle est majorée et minorée, i.e. si il existe deux nombres réels m et M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \geq a$.*

Exemple 6.21. Toute suite de terme général négatif (ou suite négative) est majorée par 0. Toute suite de terme général positif (ou suite positive) est minorée par 0. Une suite positive et majorée est bornée. Une suite négative et minorée est bornée.

Exemple 6.22. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 1/n$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est positive et majorée par 1 et donc bornée.

Exemple 6.23. La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est majorée. La suite de terme général $u_n = -n^2 + 1$ est majorée par 1 mais n'est minorée.

Exemple 6.24. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée. La suite de terme général $u_n = \frac{-1^n}{n}$, $n \geq 1$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée.

6.4 Sommes partielles

Définition 6.25. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite des sommes partielles de la suite (u_n) la suite dont le terme général est la somme des n premiers termes de la suite (u_n). Si l'on note s_n son terme général, on a*

$$s_n = u_0 + \cdots + u_{n-1} \ .$$

Remarque 6.26. On peut aussi bien considérer la somme des $n+1$ premiers termes $s_n = u_0 + \cdots + u_n$, ou la somme des n premiers termes en excluant le terme d'indice 0 $s_n = u_1 + \cdots + u_n$. Ce sont des conventions arbitraires qu'il faut définir avec précision avant de commencer des calculs.

Exemple 6.27 (Suites constantes). Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite constante alors $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = (n+1)u_0$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 6.28. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général $u_n = n$. On a l'identité bien connu

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

La méthode suivante pour calculer la somme S_n des n premiers entiers est due à Carl Friedrich Gauss. On peut écrire S_n de deux façons :

$$\begin{array}{lllllll} S_n = 1 & +2 & +3 & +\cdots & +(n-2) & +(n-1) & +n \ , \\ S_n = n & +(n-1) & +(n-2) & +\cdots & +3 & +2 & +1 \ . \end{array}$$

En ajoutant membre à membre, on obtient

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n-1) + (n-1)}_{n \text{ termes}} .$$

On obtient donc $2S_n = n(n+1)$ et $S_n = n(n+1)/2$.

Exemple 6.29 (Suites arithmétiques). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. En utilisant le résultat précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \\
&= (n+1)u_0 + (r + 2r + 3r + \cdots + nr) \\
&= (n+1)u_0 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)r \\
&= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r = (n+1)(u_0 + nr/2) .
\end{aligned}$$

Considérons par exemple la suite de terme général $u_n = 3n - 1/2$, pour $n \geq 0$. C'est bien une suite arithmétique de raison 3 car on a pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - \frac{1}{2} - 3n + \frac{1}{2} = 3 .$$

On a $u_0 = -1/2$ et on obtient donc

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = (n+1)\left(-\frac{1}{2} + \frac{n}{2} \times 3\right) = \frac{(n+1)(3n-1)}{2} .$$

Exemple 6.30 (Suites géométriques). Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 0$. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de (u_n).

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\
&= u_0 + (u_0 q) + (u_0 q^2) + \cdots + (u_0 q^n) \\
&= u_0(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n)
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par q, on obtient

$$qS_n = u_0(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}) = u_0 q^{n+1} + S_n - u_0 .$$

D'où

$$S_n(1-q) = u_0(1 - q^{n+1}) ,$$

soit

$$S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ .$$

Remarquons encore une fois que S_n est somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique (u_n). Si le premier terme est u_N, alors pour $n \geq N$, on a

$$u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n = u_N \frac{1-q^{n-N+1}}{1-q} \ .$$

Si par exemple $q = 1/2$, on obtient

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n-1} \ .$$

Il faut retenir la formule

$$\begin{aligned} &\text{Somme de } n \text{ termes consécutifs d'une suite géomtrique de raison } q \\ &= \ (\text{premier terme}) \ \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \ . \end{aligned}$$

6.5 Convergence et divergence

Définition 6.31. *On dit qu'une suite (u_n) tend ou converge vers un nombre réel ℓ lorsque n tend vers l'infini, si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle I, i.e. $\forall n \geq N$, $u_n \in I$. On écrit alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \ .$$

Une suite qui converge est dite une suite convergente. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Proposition 6.32. *La limite, lorsque elle existe, est unique, i.e. on ne peut pas avoir $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$.*

Exemple 6.33. Une suite constante est convergente. Sa limite est la valeur commune de tout ses termes. Si il existe un nombre réel λ tel que $u_n = \lambda$ pour tout $n \geq 0$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \lambda$.

Exemple 6.34. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 1/n$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Soit a et b des nombres réels strictement positifs. L'intervalle $]-a, b[$ est un intervalle ouvert contenant 0. Nous devons montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]-a, b[$ pour tout $n \geq N$. Soit N un nombre entier strictement plus grand que $1/b$. La fonction $x \to x^{-1}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $1/N < b$ et pour tout $n \geq N$, on a

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < b\ .$$

On a donc montré que $u_n \in I$ pour tout $n \geq N$, et donc la suite (u_n) converge vers 0.

Exemple 6.35. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Alors (u_n) est divergente. En effet, quelque soit le réel ℓ il n'existe aucun intervalle I ouvert contenant ℓ qui contienne tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Définition 6.36.
- *On dit qu'une suite de terme général u_n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A positif, il existe un entier N tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq N$.*
- *On dit qu'une suite de terme général u_n tend vers $-\infty$ si pour tout nombre réel A positif, il existe un entier N tel que $u_n \leq -A$ pour tout $n \geq N$.*

Exemple 6.37. Une suite arithmétique de raison strictement positive tend vers $+\infty$. Une suite arithmétique de raison strictement négative tend vers $-\infty$.

Exemple 6.38. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général n^α. Alors

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 0\ , \\ 1 \text{ si } \alpha = 0\ , \\ +\infty \text{ si } \alpha > 0\ . \end{cases}$$

Exemple 6.39. Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors (u_n) tend vers 0 si $-1 < q < 1$, est constante si $q = 1$, tend vers l'infini si $q > 1$ et n'a pas de limite si $q \leq -1$.

Exemple 6.40. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et soit S_n la suite des sommes partielles de (u_n). Le calcul de l'exemple 6.30 montrer que si $|q| < 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}\ .$$

Si $q \geq 1$ alors $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ et si $q \leq -1$ alors la suite (S_n) ne converge pas et ne tend pas vers l'infini.

6.6 Opérations sur les limites

Théorème 6.41. *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes et soit* ℓ *et* ℓ' *leurs limites respectives, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \ , \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \ell \ .$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \ ,$$
$$\lim_{n\to\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell' \ .$$

Si de plus $\ell' \neq 0$*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'} \ .$$

Exemple 6.42. En particulier, si a et b sont deux nombres réels et si (u_n) est une suite qui converge vers la limite ℓ, alors la suite de terme général $au_n + b$ converge vers $a\ell + b$. Si l'on prend $b = -\ell$, alors on voit que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite de terme général $u_n - \ell$ converge vers 0 et en prenant $a = -1$, on obtient aussi que la suite de terme général $|u_n - \ell|$ converge vers 0.

Il est donc équivalent de dire que la suite de terme général u_n converge vers 0 ou que la suite de terme général $|u_n|$ converge vers 0.

Exemple 6.43. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites de termes généraux respectifs $u_n = 1/n$ et $v_n = 3/(2n) - 1$. On a montré que la suite de terme général $1/n$ converge vers 0. Donc par l'exemple précédent, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} v_n = -1 \ .$$

En appliquant le théorème 6.41, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = -1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0 \ .$$

Opérations sur des limites infinies Les règles des opérations sur les limites du théorème 6.41 s'étendent partiellement au cas des limites infinies. Le tableau suivant donne ces règles.

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$	$\lim(u_n v_n)$	$\lim(u_n/v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
∞	0	∞	?	?
$+\infty$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	∞ avec le signe de ℓ	∞ avec le signe de ℓ
$-\infty$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	∞ avec le signe de $-\ell$	∞ avec le signe de $-\ell$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ avec le signe de ℓ	0
$\ell \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	∞ avec le signe de $-\ell$	0
0	∞	∞	?	0
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	?

Exemple 6.44. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) les suites de termes généraux respectifs

$$u_n = \sqrt{2n-3}\ , \quad v_n = +\sqrt{n+5}\ , \quad w_n = -\sqrt{n+5}\ .$$

Ces suites ont pour limites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty\ , \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty\ .$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = +\infty$, mais mais $\lim_{n\to+\infty}(u_n+w_n)$ est une forme indéterminée. On doit donc l'étudier en détail. Comme il s'agit de la différence de deux racines carrées, on applique la méthode de la quantité conjuguée.

$$\begin{aligned}
u_n + w_n &= \sqrt{2n-3} - \sqrt{n+5} \\
&= \frac{(\sqrt{2n-3} - \sqrt{n+5})(\sqrt{2n-3} + \sqrt{n+5})}{\sqrt{2n-3} + \sqrt{n+5}} \\
&= \frac{2n-3-(n+5)}{\sqrt{2n-3} + \sqrt{n+5}} = \frac{n-8}{\sqrt{2n-3} + \sqrt{n+5}} \\
&= \frac{\sqrt{n} - 8/\sqrt{n}}{\sqrt{2-3/n} + \sqrt{1+5/n}} = \frac{r_n}{s_n + t_n}
\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty\ , \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \sqrt{2}\ , \quad \lim_{n\to\infty} t_n = 1\ .$$

On a donc levé l'indétermination et l'on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + w_n) = +\infty\ .$$

On peut préciser certains cas de division par 0.

Théorème 6.45 (Limite de l'inverse)**.**
- *Si la suite* (u_n) *tend vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *alors la suite de terme général* $1/u_n$ *converge vers 0.*
- *Si la suite* (u_n) *converge vers* 0 *et si* $u_n > 0$ *à partir d'un certain rang, alors la suite de terme général* $1/u_n$ *tend vers* $+\infty$.
- *Si la suite* (u_n) *converge vers* 0 *et si* $u_n < 0$ *à partir d'un certain rang, alors la suite de terme général* $1/u_n$ *tend vers* $-\infty$.
- *Si la suite* (u_n) *converge vers* 0 *mais n'est pas de signe constant, alors la suite de terme général* $1/u_n$ *ne converge pas.*

On en déduit des règles pour les produits de limite du type $\ell/0$.

6.7 Critères de comparaison

Théorème 6.46. *Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Remarque 6.47. Ce est très pratique pour démontrer qu'une suite est convergente mais il ne permet pas de déterminer la limite de la suite.

Exemple 6.48. La suite de terme général

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

est croissante et majorée donc convergente. Sa limite est notée e.

Remarque 6.49. Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais ne convergente pas. Une suite monotone n'est pas nécessairement convergente. La suite de terme général $u_n = n$ est monotone mais ne converge pas elle n'est pas bornée. Pour appliquer le théorème 6.46, il faut donc bien vérifier que la suite est bornée et monotone.

Théorème 6.50. *Une suite croissante et non majorée tend vers* $+\infty$. *Une suite décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$.

Théorème 6.51. *Soit* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites et* N *un entier tel que pour tout* $n \geq N$, *on ait*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell$ *alors* (v_n) *est convergente et* $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Ce résultat est souvent appelé Théorème d'encadrement ou Théorème de l'arbre et de l'écorce ou Théorème des gendarmes. Un cas particulier intéressant est celui où la suite (u_n) est la suite constante nulle.

Corollaire 6.52. *Soit (v_n) et (w_n) deux suites et N un entier tel que pour tout $n \geq N$, on ait $0 \leq v_n \leq w_n$. Si la suite (w_n) converge vers 0, alors la suite v_n converge aussi vers 0.*

Exemple 6.53. Soit les suites de termes généraux $u_n = -1/n$, $v_n = \cos(n)/n$, $w_n = 1/n$. Pour tout $n \geq 1$, on a bien $u_n \leq v_n \leq w_n$ car $-1 \leq cos(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or on a vu que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0$, donc Donc (v_n) est convergente vers $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Définition 6.54. *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si*

(i) (u_n) *est croissante ;*

(ii) (v_n) *est décroissante ;*

(iii) il existe N tel que $v_n > u_n$ pour tout $n \geq N$;

(iv) $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 6.55. *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Cette méthode est pratique, mais ne permet pas de déterminer la valeur de la limite.

Exemple 6.56. Soit (u_n) et (v_n) les suite de termes généraux respectifs

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4n+1} ,$$
$$v_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} .$$

On remarque sur quelques valeurs que (u_n) est décroissante, que (v_n) est croissante, et que les deux suites ont tendance à se rapprocher.

$$u_0 = 1 , \ u_1 = 0.866666\ldots , \ u_2 = 0,8349206\ldots , \ u_3 = 0.8209346\ldots ,$$
$$u_{11} = 0.7962626\ldots , \ u_{28} = 0.7897838\ldots , \ u_{35} = 0.7889191\ldots$$
$$v_0 = 0,6666666\ldots , \ v_1 = 0.7889191\ldots , \ v_2 = 0.7889191\ldots ,$$
$$v_{11} = 0.7749860\ldots , \ v_{28} = 0.7810881\ldots , v_{35} = 0.7819261\ldots$$

Prouvons rigoureusement que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5} = -\frac{2}{(4n+3)(4n+5)} < 0 ,$$
$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} = \frac{2}{(4n+5)(4n+7)} > 0 .$$

La suite (u_n) est décroissante et la suite (v_n) est croissante. Enfin

$$u_n - v_n = \frac{1}{4n+3}$$

qui tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes, et leur limite commune existe. Il faut des résultats bien plus avancés pour parvenir à montrer que cette limite est $\pi/4 = 0.7853982\ldots$

6.8 Suites arithmético-géométriques

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence (dite arithmético-géométrique)

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont des nombres réels. Pour certaines valeurs de a et b, on retrouve les suites précédemment étudiées.

- Si $a = 1$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison a.
- Si $a = 0$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite constante.

Nous allons donc supposer que $a \neq 1$ et nous allons déterminer une exression explicite pour la suite (u_n). Considérons une autre suite (w_n) vérifiant la même équation de récurrence, soit $w_{n+1} = u_{n+1}$. On a alors

$$u_{n+1} - w_{n+1} = a(u_n - w_n) \ .$$

La suite $(u_n - w_n)$ est donc une suite géométrique de raison a et son terme général a pour expression

$$u_n - w_n = (u_0 - w_0)a^n \ .$$

Si l'on connait une solution particulière (w_n) de l'équation de récurrence, toutes les autres solutions sont donc de la forme

$$u_n = w_n + (u_0 - w_0)a^n \ .$$

Ceci n'a d'intérêt que si l'on est capable de trouver une solution particulière. Cherchons-la de la forme la plus simple possible, par exemple constante. Soit (u_n) une suite constante, i.e. $u_n = \alpha$ pour tout n et pour un nombre réel α. Si (u_n) est solution de l'équation de récurrence, on doit avoir

$$\alpha = a\alpha + b \ ,$$

soit

$$\alpha = \frac{b}{1-a} ,$$

ce qui est possible puisque l'on a supposé $a \neq 1$. Les suites (u_n) satisfaisant l'équation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ sont donc toutes de la forme

$$u_n = \frac{b}{1-a} + ca^n ,$$

pour un nombre réel que l'on peut exprimer en fonction de u_0 puisque l'on doit avoir

$$u_0 = \frac{b}{1-a} + c ,$$

soit $c = u_0 - b/(1-a)$, et l'on peut finalement énoncer le résultat suivant.

Théorème 6.57. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a \neq 1$. Les solutions de l'équation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ sont les suites (u_n) de la forme*

$$u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n ,$$

Exemple 6.58. Déterminons la solution de l'équation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 3$$

avec $u_0 = 5$. On applique le théorème 6.57 avec $a = 2$ et $b = -3$, ce qui donne $b/(1-a) = 3$ et $u_0 - b/(1-a) = 2$. La solution est donc

$$u_n = 2 \times 2^n + 3 = 2^{n+1} + 3 .$$

Remarque 6.59. Comme toujours en mathématique, il ne faut pas chercher pas à retenir la formule qui donne la solution mais la méthode pour la trouver. On doit se rappeler que la solution est la somme d'une solution particulière constante et d'une suite géométrique de raison a, avec ici $a = 2$. La solution constante est donnée en résolvant l'équation linéaire du premier degré $x = ax + b$, ici $x = 2x - 3$, soit $x = 3$. La solution est donc de la forme $u_n = 3 + c2^n$ et la constante c est identifiée exprimant u_0 selon cette formule, soit $u_0 = 3 + c$, d'où $c = u_0 + 3 = 2$, et l'on retrouve la solution donnée ci-dessus.

Application aux calculs d'intérêts

Lorsque l'on fait un placement à taux fixe ou lorsque l'on emprunte une certaine somme avec un taux d'intérêt fixe, on peut se poser plusieurs types de questions. La date 0 est l'année (ou le mois, la quinzaine, la semaine, le jour : la période de temps de référence pour le calcul des intérêts dûs ou perçus) du placement ou de l'emprunt.

- Que vaut la somme placée à la date n ?
- Quelle sera la fortune totale à la date n si l'on place chaque année un montant (variable) A_k ?
- Que doit-on rembourser à la date n si l'on emprunte S à la date 0 et si l'on ne fait aucun remboursement avant l'échéance ?
- Que doit-on rembourser chaque année si l'on veut faire des remboursements constants jusqu'à l'échéance ?

Les méthodes utilisés pour résoudre les équations de récurrence arithmético-géométriques peuvent être utilisées pour répondre à ces questions.

Rappelons que le taux d'intérêt est défini de la façon suivante : Un capital C placé au taux d'intérêt r à la date 0 vaut $C(1+r)$ à la date 1. L'intérêt est rC.

Supposons maintenant que l'on place chaque année un certain montant A_k au taux d'intérêt r jusqu'à la date n exclue. Que vaut le capital placé à la date finale n ? Le montant placé A_k à la date k vaut $A_k r^{n-k}$ à la date n. La fortune finale C_n est

$$C_n = A_0(1+r)^n + A_1(1+r)^{n-1} + A_2(1+r)^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(1+r) \ .$$

Si les versements sont constants, on obtient, en utilisant la formule de calcul des sommes partielles d'une suite géométrique donnée à l'exemple 6.30. On a somme n termes d'une suite géométrique de raison $1+r$ et le premier terme est $A_0(1+r)$. On obtient

$$C_n = A_0(1+r)\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = A_0(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r} \ .$$

Exemple 6.60. On verse chaque année 1000 euros sur un compte épargne au taux d'interet annuel fixe de 5%. Quel est le capital acquis à la dixième année ?

On a ici $r = 0.05$ et $A_0 = A_1 = ... = 1000$, d'où

$$C_{10} = 1000(1.05) \times \frac{(1.05)^{10} - 1}{0.05} \approx 13206$$

Les intérêts cumulés sont donc 3206 euros.

Remboursement d'emprunt On emprunte un montant D_0 à la date 0 au taux d'intérêt fixe r pour une période de N année, avec des remboursements fixes. Quels est le montant des remboursements et quel sera le coût total de l'emprunt ?

Soit D_n la dette à la date n. A la date $n+1$, on doit le montant actualisé de la dette $D_n(1+r)$ moins le remboursement fixe R. On obtient donc la formule de récurrence

$$D_{n+1} = (1+r)D_n - R\ .$$

On applique le théorème 6.57 avec $a = 1+r$ et $b = -R$, et l'on obtient

$$D_n = \frac{R}{r} + \left(D_0 - \frac{R}{r}\right)(1+r)^n\ .$$

On cherche R tel que $D_N = 0$ (on rembourse intérêts et capital). Le remboursement par période est donc

$$R = \frac{rD_0(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}\ .$$

Exemple 6.61. On emprunte 150000 euros pendant 15 ans au taux fixe de 6% par an. On doit donc rembourser chaque année

$$R = \frac{0,06(1,06)^{15}}{(1,06)^{15} - 1} \times 150000 \approx 15444\ .$$

Le coût total du crédit est donc $15R - D_0 \approx 81666$ euros.

Influence de la périodicité Un taux d'intérêt annuel r_a correspond à un taux mensuel r_m donné par l'équation :

$$(1+r_m)^12 = 1 + r_a\ ,$$

soit

$$r_m = (1+r_a)^{1/12} - 1\ .$$

Si r_a est très petit, le développement limité de $(1+x)^{1/12}$ en zéro donne $r_m =\approx r_a/12$. Mais cette approximation n'est pas toujours très bonne, et de plus on a toujours $r_a/12 > r_m$! Par exemple

$$r_a = 1\%\ , r_m = (1,01)^{1/12} - 1 \approx 0.0008295\%\ , r_a/12 = 0.0008333\%\ ;$$
$$r_a = 5\%\ , r_m = (1,05)^{1/12} - 1 \approx 0.0048676\%\ , r_a/12 = 0.005\%\ ;$$
$$r_a = 10\%\ , r_m = (1,1)^{1/12} - 1 \approx 0.0079741\%\ , r_a/12 = 0.0083333\%\ .$$

Supposons que dans l'exemple précédent la périodicité soit le mois et non plus l'année, c'est-à-dire que la dette est réevaluée chaque mois et non chaque année. Le taux d'intérêt mensuel correspondant au taux d'intérêt annuel $r_a = 6\%$ est $r_m = 0.0048676\%$. Par définition, $(1+r_m)^12 = 1+r_a$. Les remboursements mensuels doivent donc être

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{0,0048676(1,0048676)^{15\times 12}}{(1,0048676)^{15\times 12}-1} \times 150000 \\ &= \frac{0,0048676(1,06)^{15}}{(1,06)^{15}-1} \times 150000 \approx 1253 \ . \end{aligned}$$

On rembourse donc annuellement 15035 euros, et le coût total du crédit est 75540 euros.

Capacité de remboursement Inversement, on peut choisir à l'avance un remboursement mensuel R, et l'on cherche à déterminer le montant S que l'on peut emprunter pour N périodes au taux d'intérêt fixe r. La somme que l'on peut emprunter est donnée par l'équation obtenue précédemment, mais l'inconnue est maintenant S.

$$0 = \frac{R}{r} + \left(S - \frac{R}{r}\right)(1+r)^N \ ,$$

soit

$$S = \frac{(1+r)^N - 1}{r(1+r)^N} \times R \ .$$

Supposons que l'on puisse rembourser 500 euros par mois et que la périodicité est l'année. Alors on peut emprunter

$$S = 12 \times 500 \times \frac{(1+r_a)^N - 1}{r_a(1+r_a)^N} \ ,$$

soit approximativement

- 44160 euros à 6% sur 10 ans ;
- 62280 euros à 5% sur 15 ans ;
- 81540 euros à 4% sur 20 ans.

Mise en garde Les calculs précédents ne prétendent pas être conformes à la pratique des institutions de crédit.