Université de Paris Ouest-Nanterre

Licence de Sciences Économiques 1ère année
Année 2008-2009

Cours de Mathématiques I

Patrice Bertail (UPA) François Métayer (UPC)
Philippe Soulier (UPB)

Notes rédigées par Salah Mehdi, Laurent Mesnager et
Philippe Soulier

Table des matières

Chapitre 3

Dérivation

3.1 Définitions

Définition 3.1 (Dérivabilité à gauche en un point). *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite dérivable à gauche en $x_0 \in I$ si la limite*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$ et est appelée la dérivée à gauche de f en x_0.

Observons qu'en posant $h = x - x_0$, on a :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Définition 3.2 (Dérivabilité à droite en un point). *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite dérivable à droite en $x_0 \in I$ si la limite*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ et est appelée la dérivée à droite de f en x_0.

Comme précédement, en posant $h = x - x_0$, on a :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 > x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Définition 3.3 (Dérivabilité en un point)**.** *Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en $x_0 \in I$ si f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et si les dérivées à droite et à gauche en x_0 sont égales :*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée de f en x_0.

Définition 3.4 (Dérivabilié sur un intervalle ouvert)**.** *La fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ si f est dérivable en tout point de I.*

Définition 3.5 (Domaine de dérivabilité)**.** *Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble des points du domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f en lesquels f est dérivable, c'est-à-dire $\{x \in \mathcal{D}_f | f'(x)$ existe$\}$.*

Exemple 3.6. Les fonctions constantes sont dérivables en tout point et leur dérivée est identiquement nulle.

Exemple 3.7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 . \end{aligned}$$

On a donc $f'(x_0) = 2x_0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Le domaine de dérivabilité de f est $\mathbb{R}$.

Exemple 3.8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}_0}{(\sqrt{x} + \sqrt{x}_0)(\sqrt{x} - \sqrt{x}_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}_0} = \frac{1}{2\sqrt{x}_0} . \end{aligned}$$

On a donc $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ pour tout $x_0 > 0$. Mais f n'est pas dérivable à droite en zéro car

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \ .$$

Le domaine de dérivabilité de f est donc $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 3.9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0; , \\ -1 \text{ si } x < 0 \ . \end{cases}$$

Donc $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$, donc f n'est pas dérivable en 0. En $x_0 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \\ &= \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \text{ si } x_0 > 0 \ , \\ \lim_{x\to 0} \frac{-x-(-x_0)}{x - x_0} = -1 \text{ si } x_0 < 0 \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f'(x_0) = 1$ si $x_0 > 0$ et $f'(x_0) = -1$ si $x_0 < 0$. Le domaine de dérivabilité de f est $\mathbb{R}^*$.

On admettra la dérivabilité des fonctions usuelles sur leurs domaines de définition.

Théorème 3.10. *Les fonctions exponentielle, logarithme, les fonctions circulaires, les polynômes et les fractions rationnelles sont dérivables en tout point de leur domaine de définition.*

Interprétation géométrique Le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ est défini par

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

C'est le coefficient directeur ou la pente de la droite $\mathcal{D}elta$ passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. La dérivée lorsqu'elle existe est donc la limite lorsque h tend vers 0 du taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$.

Définition 3.11. *Une droite $\mathcal{D}elta_0$ passant par le point $(x_0, f(x_0)$ est dite tangente au graphe de f en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ a pour limite la pente de $\mathcal{D}elta_0$ lorsque h tend vers 0.*

De cette définition, déduit aisément le résultat suivant.

Proposition 3.12 (Equation de la tangente)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable au point $x_0 \in I$. Le graphe de f admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$ non parallèle à l'axe des ordonnées (Oy) si, et seulement si, f est dérivable en x_0. La pente de la tangente est alors $f'(x_0)$.*

La tangente au graphe de f en M_0 est donc la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Exemple 3.13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La tangente au graphe au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = 2x_0x - x_0^2$. En particulier, la tangente au point $(0,0)$ a pour équation $y = 0$, et la tangente au point $(1,1)$ a pour équation $y = 2x - 1$.

Exemple 3.14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. L'équation de la tangente à f en $(x_0, f(x_0))$ est

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{2}\sqrt{x_0} .$$

En particulier, la tangente en $(1,1)$ a pour équation $y = x/2 + 1/2$, et la tangente en $(4,2)$ a pour équation $y = x/4 + 1$.

Remarque 3.15. On a vu que la fonction $x\sqrt{x}$ n'admet pas de dérivée en 0 et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty .$$

On dit que le graphe de la fonction admet une demi-tangente verticale au point (0,0).

Exemple 3.16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. L'équation de la tangente en $(x_0, f(x_0))$ est $y = x$ si $x_0 > 0$ et $y = -x$ si $x_0 < 0$. On a vu que f n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable à droite et à gauche en zéro. On dit que le graphe de f admet deux demi-tangentes obliques en (0,0).

Théorème 3.17. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Remarque 3.18. La réciproque est fausse. Une fonction peut être continue en un point de son domaine de dfinition sans être dérivable. Par exemple, la fonction $x \to |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Quelques dérivées usuelles Les dérivées suivantes sont à connaître.

$f(x) = \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$x \in \mathbb{R}$;
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$;
$f(x) = x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$;
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	$f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$x \neq \dfrac{-d}{c}$;
$f(x) = a^x, \ a > 0$	$f'(x) = \ln(a)a^x$	$x \in \mathbb{R}$;
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$;
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$x \in \mathbb{R}$;
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$;
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$;
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$;
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \, , k \in \mathbb{Z}$;
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$.

3.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 3.19. *Soit f et g deux fonctions dérivables en x_0.*
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.*
- *$f + g$ est dérivable et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*
- *fg est dérivalbe et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*
- *Si $g(x_0) \neq 0$, alors f/g est dérivable et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \ .$$

Théorème 3.20. *Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x_0 et*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) \ .$$

Exemple 3.21. Soit f la fonction définie sur $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x}\cos(2x)} + \ln(\sin(3x+2))$.

Alors

$$f'(x) = 2x \exp\{\sqrt{x}\cos(2x)\}$$
$$+ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(2x) - 2\sqrt{x}\sin(2x)\right) x^2 \exp\{\sqrt{x}\cos(2x)\} + 3\frac{\cos(3x+2)}{\sin(3x+2)} .$$

Théorème 3.22. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une réciproque, i.e. une fonction g définie sur un intervalle J telle que*

$$\forall x \in I \ , \ g \circ f(x) = x \ , \quad \forall y \in J \ , \ f \circ g(y) = y \ .$$

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)} \ .$$

On peut prouver aisément cette formule à partir de la formule de la dérivée d'une fonction composée. En effet, puisque $f \circ g(x) = x$ pour tout x, on a d'une part $(g \circ f)'(x) = 1$ pour tout x, et d'autre part, par la formule de la dérivée d'une fonction composée,

$$(g \circ f)'(x) = g' \circ f(x) \times f'(x)$$

On a donc $g' \circ f(x) \times f'(x) = 1$, ce qui donne la formule du théorème 3.22.

3.3 Le théorème de Rolle.

Théorème 3.23 (Rolle)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Interprétation géométrique Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f en $(c, f(c))$ soit horizontale.

Théorème 3.24 (Accroissements finis)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

3.4 Dérivée et sens de variation

Théorème 3.25. *Soit I un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I.*

- *Si f' est positive (resp. strictement positive) sur I alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I.*
- *Si f' est négative (resp. strictement négative) sur I alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.*
- *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ alors f est une constante sur I.*

Ce rsultat permet d'étudier les variations d'une fonction dérivable f. Dans un tableau de variation, on ajoute une ligne pour la dérivée, et l'on sépare les intervalles où la dérivée est de signe constant.

Exemple 3.26.

f	f'	Signe de f'	Variations
x^2	2x	< 0 sur $\mathbb{R}_-$, > 0 sur $\mathbb{R}_+$	$\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$, $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$.
x^3	$3x^2$	> 0 sur $\mathbb{R}$	$\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.
e^x	e^x	> 0 sur $\mathbb{R}$	$\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.
$\log(x)$	$1/x$	> 0 sur $\mathbb{R}$	$\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$1/x$	$-1/x^2$	> 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$	$\searrow$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 3.27. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point intérieur de I. Si la dérivée de f est strictement positive, alors f est strictement croissante et est une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$. La fonction f admet donc une réciproque g, dérivable en tout point intérieur de J, donnée par*

$$g'(y) = \frac{1}{f' \circ g(y)} .$$

De même, si f' est strictement négative sur l'intérieur de I alors elle est strictement décroissante et admet une réciproque g dont la dérivée est donnée par la même formule.

3.5 Dérivée seconde

Définition 3.28. *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f admet une dérivée seconde en x_0 si f est dérivable en au voisinage de x_0 et si la fonction dérivée f' est dérivable en x_0, c'est-à-dire si la limite*

$$lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas ce nombre est noté $f''(x_0)$ et est appelé la dérivée seconde de f en x_0.

De la même manière que pour la dérivée première, il est possible de définir les notions de dérivées secondes à gauche et à droite :

$$f_g''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} ,$$
$$f_d''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} .$$

On dit que f est deux fois dérivable ou admet une dérivée seconde sur un intervalle ouvert I si f est dérivable sur I et f' est elle-même dérivable sur I.

Exemple 3.29. Les fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, circualires, polynômes, fractions rationnelles) sont deux fois dérivables sur leur ensemble de définition.

Exemple 3.30. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 . \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en tout $x \neq 0$ avec

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) .$$

Elle est aussi dérivable en 0 car

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0 .$$

D'autre part, on a :

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 2 \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x} .$$

Cette expression n'admet pas de limite en zéro, et donc f' n'est pas dérivable en 0, c'est-à-dire que f n'admet pas de dérivée seconde en 0.

3.6 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 3.31. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour $n \geq 2$, on dit que f est n fois dérivable en $x_0 \in I$ ou bien admet une dérivée n-ième en x_0, notée $f^{(n)}(x_0)$ si f est dérivable au voisinage de x_0 et f' est $n-1$ fois dérivable en x_0.*

Cette définition est une définition par récurrence. On remarque que pour que la dérivée n-ième en un point existe, il faut que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ soient définies sur un voisinage de ce point. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. Avec cette définition, on a les relations suivantes, pour tout $k, n \geq 0$,

$$f^{(n+k)} = (f^{(n)})^{(k)} .$$

Chapitre 4

Développements limités polynomiaux

Les développements limités polynômiaux sont un outil pour l'étude locale des fonctions et la détermination de limites. Au voisinage d'un point, une fonction suffisamment régulière peut être décomposée comme la somme d'une fonction polynôme et d'un terme de reste (ou erreur d'approximation). Un développement limité permet d'affiner l'étude et l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point.

4.1 Définition, propriétés, existence

Définition 4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant le point a. On dit que f admet un développement limité polynomial d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a (noté $DL_n(a)$) si il existe un polynôme P_n de degré n et une fonction ϵ tels que :*

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \epsilon(x) \ , \tag{4.1}$$

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0 \ . \tag{4.2}$$

On appelle $P_n(x-a)$ la partie principale (ou régulière) du développement limité et $(x-a)^n \epsilon(x)$ est le terme de reste.

Commentaire Les deux termes du développement limité ont chacun leur importance. La partie principale est la partie d'intérêt : on l'utilise pour calculer des approximations fines de f au voisinage du point a, pour déterminer des limites. Le terme de reste valide le développement limité. Son expression exacte n'a pas d'utilité pratique, mais il est fondamental de vérifier que $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$. Si cette propriété n'est pas vérifiée, le développement n'est pas valide et ne peut (ne doit surtout pas) être utilisé.

Proposition 4.2 (Propriétés)**.**

Unicité *Si f admet un développement limité à un ordre donné en a, alors il est unique.*

Parité *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a et si f est paire (resp. impaire), alors la fonction $x \mapsto P_n(x-a)$ est paire (resp. impaire).*

Troncature *Si f admet au voisinage de a un développement limité à un ordre n, alors f admet au voisinage de a un développement limité à tout ordre m avec $m \leq n$ et $P_m(x-a) = \Sigma_{i=0}^{m} c_i (x-a)^i$.*

Théorème 4.3 (Formule de Taylor-Young)**.** *Si f est de classe C^{n-1} sur un intervalle centré en a, et admet en a une dérivée d'ordre n, alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par :*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f(a) \\ + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x-a) \ , \end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0$. Autrement dit, dans les notations précédentes, la partie régulière est :

$$P_n(x-a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{i!} (x-a)^i \ .$$

Méthode Ce théorème et l'unicité du développement limité donnent un moyen de déterminer des dérivéees successives d'une fonction en un point, si l'on en connait un développement limité. Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable au voisinage de a dont la dérivée $(n-1)$-ième admet une dérivée en a. Soit $P_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ un polynôme tel que $P_n(x-a)$ soit la partie principale du développement limité à l'ordre n de f en a. On a alors nécessairement

$$f^{(i)}(a) = i! c_i \ .$$

Exemple 4.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}} \ .$$

Dériver cette fonction est assez fastidieux. En revanche, les règles de calcul des développement limités que l'on verra dans la section suivante permettent aisément de déterminer le développement limité de f en zéro à n'importe quel ordre. Par exemple, la partie principale du développement de f l'ordre 3 en 0 est

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x^3 \ .$$

(Cf. Exemple 4.14.) On a donc

$$f(0) = 1 \ , \ f'(0) = 1 \ f''(0) = 1 \ , \ f^{(3)}(0) = -6 \ .$$

Développements limités usuels Pour obtenir le développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point a, il suffit de déterminer le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $g : t \mapsto f(t + a)$. Nous allons donc indiquer les développements limités au voisinage de 0 de quelques fonctions dites usuelles. Dans ce qui suit, les fonctions ϵ sont différentes de ligne à ligne, et (ce qui est le plus important) ont toujours une limite nulle en 0.

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x) \ ; \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x) \ ; \\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6\epsilon(x) \ ; \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x) \ ; \\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x) \ ; \\
\log(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x) \ ; \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x) \ ; \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \ , \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \ .
\end{aligned}$$

Il est important (et utile) de connaître au moins les développements suivants à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + x^2\epsilon(x) \ ,\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x) \ ,\\
\tan x &= x + x^2\epsilon(x) \ ,\\
\arctan x &= x + x^2\epsilon(x) \ ,\\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \ ,\\
\ln x &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \ ,\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + x^2\epsilon(x) \ ,\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \ .
\end{aligned}$$

Contrairement aux apparences, on n'effectue pas toujours les développements limités au voisinage de 0 ! Par exemple on peut développer la fonction exponentielle au voisinage de 1 :

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\mathrm{e}}{3!}(x-1)^3 + ... + \frac{\mathrm{e}}{n!}(x-1)^n + x^n\epsilon(x) \ .$$

4.2 Algèbre des développements limités

4.2.1 Somme et produit

Théorème 4.5 (Somme et produit)**.** *Soit f et g deux fonctions admettant en a des développement limités à l'ordre n :*

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x-a) + (x-a)^n\epsilon_1(x-a) \ ,\\
g(x) &= Q_n(x-a) + (x-a)^n\epsilon_2(x-a)
\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to a}\epsilon_1(x-a) = \lim_{x\to a}\epsilon_2(x-a) = 0$.

– *La fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie principale est $P_n + Q_n$:*

$$(f+g)(x) = P_n(x-a) + Q_n(x-a) + (x-a)^n\epsilon(x-a)$$

avec $\lim_{x\to a}\epsilon(x-a) = 0$.

– *La fonction fg admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie principale est le polynôme de degré n, R_n, composé des termes de degré inférieur ou égal à n du polynôme P_nQ_n :*

$$(fg)(x) = R_n(x-a) + (x-a)^n\epsilon(x-a)$$

avec $\lim_{x\to a}\epsilon(x-a) = 0$.

Exemple 4.6. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f+g$ et fg avec $f(x) = 1/1-x$ et $g(x) = \mathrm{e}^x$.

On connaît les développements limités à l'ordre 2 de f et g :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^2\epsilon(x) \ ,$$
$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \ .$$

Par le théorème 4.5, on sait que $f+g$ et fg admettent des développements limités à l'ordre 2 en 0. La partie principale du développement limité de $f+g$ en 0 à l'ordre 2 est

$$1 + x + x^2 + x^2 + 1 + x + \frac{x^2}{2} = 2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 \ ,$$

et donc

$$(f+g)(x) = 2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)x$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

La partie principale du développement limité de fg en 0 à l'ordre 2 est donnée par les termes de degré inférieur à 2 du produit $(1+x+x^2)(1+x+x^2/2)$, soit

$$1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 \ ,$$

et donc

$$(fg)(x) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. On en déduit par exemple sans calcul que $(fg)''(0) = 5$.

4.2.2 Quotient

Théorème 4.7 (Quotient)**.** *Soit f et g deux fonctions admettant en a des développement limités à l'ordre n de parties principales respectives les polynômes P_n et Q_n. Si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie principale est le quotient de la division en puissances croissantes à l'ordre n de P_n par Q_n.*

Ce théorème exprime que le développement limité à l'ordre n de P/Q existe dès que $g(a) \neq 0$. Pour le calcul effectif de la partie principale, il faut savoir ce qu'est la division selon les puissances croissantes.

Théorème 4.8 (Division selon les puissances croissantes)**.** *Soit P et Q deux polynômes de degrés n. Alors il existe un unique polynôme Z de degré au plus n et un polynôme R tels que $P(x) = Q(x)Z(x) + x^{n+1}R(z)$.*

Exemple 4.9. Déterminons la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3 de $P = x - x^3/6$ par $Q = 1 - x^2/2$. On pose la division comme une division euclidienne de nombres entiers. Tout d'abord, on voit que si l'on multiplie Q par x, on éliminera le terme x.

$$\begin{array}{rr|ll}
x & -\frac{1}{6}x^3 & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ \cline{3-4}
-x & +\frac{1}{2}x^3 & x & \\ \cline{1-2}
 & \frac{1}{3}x^3 & &
\end{array}$$

On obtient $P(x) = xQ(x) + x^3/3$. Il faut maintenant multiplier Q par $x^3/3$ pour éliminer le terme de degré 3.

$$\begin{array}{rrr|ll}
x & -\frac{1}{6}x^3 & & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ \cline{4-5}
-x & +\frac{1}{2}x^3 & & x & +\frac{1}{3}x^3 \\ \cline{1-2}
 & \frac{1}{3}x^3 & & & \\
 & -\frac{1}{3}x^3 & +\frac{1}{6}x^5 & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{1}{6}x^5 & &
\end{array}$$

On obtient donc $P(x) = (x + x^3/3)Q(x) + x^5/6$, et l'on a terminé, puisque le terme de reste est bien de la forme $x^4R(x)$.

Exemple 4.10. On va déduire du calcul précédent le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f/g avec $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$, c'est-à-dire le développement à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente. On connait les développements à l'ordre 3 en 0 de sinus et cosinus :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x) \ ,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_2(x) \ ,$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$. D'aprs le théorème 4.7, la fonction tangente admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 dont la partie principale est le quotient de la division selon les puissances croissantes de $x - x^3/6$ par $1 - x^2/2$, que l'on vient de calculer. On a donc

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \ ,$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

4.2.3 Composition

Théorème 4.11. *Soit f et g deux fonctions admettant en 0 des développement limités à l'ordre n de parties principales respectives les polynômes P_n et Q_n. Si $f(0) = 0$, la fonction $g \circ f$ admet en 0 un développement limité d'ordre n*

$$g \circ f(x) = T_n(x) + x^n\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$, où T_n désigne le polynôme obtenu en prenant que les termes de degré inférieur où égal à n du polynôme $Q_n \circ P_n$.

Exemple 4.12. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \log^2(1 + x)$, c'est-à-dire la composée des fonctions $x \mapsto \log(1 + x)$ et $y \mapsto y^2$. Puisque $\log(1 + 0) = 0$, on peut appliquer le théorème 4.7. On connaît le développement à l'ordre 3 en 0 de $\log(1 + x)$:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x) \ .$$

On obtient donc le terme principal du développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\log^2(1+x)$ en élevant au carré la partie principale du développement de $\log(1+x)$, et en ne retenant que les termes de degré au plus 3.

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 = x^2 - x^3 + \text{ termes de degré au moins 4.}$$

On obtient donc

$$\log^2(1 + x) = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_2(x) \ ,$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

Exemple 4.13. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \exp\{x/(1-x)\}$. Puisque $0/(1-0) = 0$, on peut appliquer le théorème 4.7. Les développement à l'ordre 3 en 0 de $x/(1-x)$ et exp sont

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \epsilon_1(x) ,$$
$$\mathrm{e}^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon_2(y) .$$

On obtient la partie principale du développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\exp(x/(1-x))$ en subsituant $x+x^2+x^3$ à y dans le développement de exp, et en ne conservant que les termes de degré au plus 3.

$$\begin{aligned} &1 + (x + x^2 + x^3) + (x + x^2 + x^3)^2/2 + (x + x^2 + x^3)^3/6 \\ &\qquad = 1 + x + x^2 + x^3 + (x^2 + 2x^3)/2 + x^3/6 + \text{ termes de degré 4 et plus.} \end{aligned}$$

On remarque que l'on conserve de moins en moins de termes dans les puissances de $(x + x^2 + x^3)$. On obtient finalement

$$\exp\{x/(1+x)\} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) ,$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Cas général On ne s'intéresse évidemment pas seulement aux développements limités en 0, mais on peut toujours s'y ramener. Soit f et g deux fonctions et a un réel. En posant $f_1(x) = f(a + x) - f(a)$ et $g_1(y) = g(f(a) + y)$, on se ramène au conditions du théorème 4.7. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a et g admet un développement limité à l'ordre n en $f(a)$, alors f_1 et g_1 admettent des développements limités à l'ordre n en 0, et l'on peut appliquer le théorème 4.7.

Autre méthode pour le développement d'un quotient La méthode du théorème 4.7 pour obtenir le développement d'un quotient peut sembler difficile, et n'est pas toujours la plus immédiate. Dans certains cas, il peut être avantageux de la remplacer par la méthode suivante. Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en 0 et telle que $g(0) \neq 0$. On peut toujours simplifier la fraction de telle sorte que l'on ait $g(0) = 1$. Ecrivons alors le développement limité de g à l'ordre n en 0 de la façon suivante :

$$g(x) = 1 + P_n(x) + x^n\epsilon_1(x) ,$$

avec $P_n(0) = 0$ (c'est-à-dire que P_n n'a pas de terme constant) et bien sûr $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$. La fonction $1/g$ est la composée de la fonction $y \to 1/(1+y)$ et de la fonction $g-1$. Le développement à l'ordre n de $1/(1+y)$ a pour partie principale

$$1 - y + y^2 - y^3 + \cdots + (-1)^n y^n ,$$

donc $1/g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie principale Q_n est obtenue en ne gardant que les termes de degré au plus n du polynôme

$$1 - P_n(x) + P_n^2(x) - P_n^3(x) + \cdots + (-1)^n P_n^n(x) .$$

On peut maintenant calculer le développement limité de f/g en appliquant le théorème 4.5 sur le produit des développements limités. Cette méthode est plus longue que l'application directe du théorème 4.7, mais est parfois plus simple.

Exemple 4.14. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}} .$$

Remarquons que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1-x+x^2 > 0$ et $1+x+x^2 > 0$. Nous allons procéder en trois temps : (i) développement de $1/(1-x+x^2)$; (ii) développement de $(1+x+x^2)/(1-x+x^2)$; (iii) développement de f.

(i) Pour développer $1/(1-x+x^2)$, on substitue $x - x^2$ à y dans le développement de $1/(1-y)$. La partie principale du développement de $1/(1-x+x^2)$ est donc constituée des termes de degré au plus 3 de $1 + (x-x^2) + (x-x^2)^2$, soit

$$\begin{aligned} 1 + (x-x^2) + (x-x^2)^2 &= 1 + x - x^2 + x^2 - 2x^3 + \text{ termes de degré 4} \\ &= 1 + x - 2x^3 + \text{ termes de degré 4} . \end{aligned}$$

(ii) La partie principale du développement à l'ordre 3 en 0 de $(1+x+x^2)/(1-x+x^2)$ est donnée par les termes de degré au plus 3 du produit $(1+x+x^2)(1+x-2x^3)$, soit

$$\begin{aligned} &(1+x+x^2)(1+x-2x^3) \\ &\qquad = 1 + 2x + 2x^2 - x^3 + \text{ termes de degré au moins 4} . \end{aligned}$$

(iii) La partie principale du développement à l'ordre 3 en 0 de $(1+y)^{1/2}$ est

$$1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{16}y^3 .$$

On obtient donc la partie principale du développement limité à l'ordre 3 en 0 de f en substituant $2x+2x^2-x^3$ dans l'expression ci-dessus, et en ne conservant que les termes de degré au plus 3, soit

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}(2x+2x^2-x^3)-\frac{1}{8}(2x+2x^2-x^3)^2+\frac{1}{16}(2x+2x^2-x^3)^3 \\
&= 1+\frac{1}{2}(2x+2x^2-x^3)-\frac{1}{8}(4x^2+8x^3)+\frac{1}{16}(8x^3) \\
&\quad + \text{ termes de degré au moins 4} \\
&= 1+x+\frac{1}{2}x^2-x^3+ \text{ termes de degré au moins 4} \;.
\end{aligned}$$

En conclusion, le développement limité de f à l'ordre 3 en 0 est

$$\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}} = 1+x+\frac{1}{2}x^2-x^3+x^3\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0$.

4.2.4 Dérivation et primitivation

Théorème 4.15 (Dérivation)**.** *Soit f une fonction dérivable en un point a telle que f admette un développement limité d'ordre $(n+1)$ en a de partie principale P_n et f' admette un développement limité d'ordre n en a de partie principale Q_n. Alors $Q_n = P_n'$, i.e. si $P_n(x)=\sum_{j=0}^{n+1} c_j x^j$, alors*

$$Q_n = \sum_{j=1}^{n} j c_j x^{j-1} = \sum_{i=0}^{n} (i+1)c_{i+1}x^j \;.$$

Exemple 4.16. Soit f la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x)=1/(1-x)$. On sait que f est de classe C^n au voisinage de 0 et admet une dérivée d'ordre $(n+1)$. Elle admet donc un développement limité à l'ordre $n+1$ donné par

$$f(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}+x^{n+1}\epsilon(x) \;.$$

La dérivée de f est $1/(1-x)^2$. On en déduit le développement limité à l'ordre n en 0 de $1/(1-x)^2$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+x^n\epsilon_1(x) \;,$$

avec $\lim_{x\to a}\epsilon_1(x-a)=0$.

Théorème 4.17 (Primitivation)**.** *Soit f une fonction dérivable dont la dérivée admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie principale est le polynôme $\sum_{j=0}^{n} c_j x^j$. Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ dont la partie principale est*

$$f(0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{j+1} x^{j+1} \ .$$

Exemple 4.18. On peut appliquer le théorème 4.17 pour obtenir le développement limité en 0 de $\log(1+x)$. En effet, la dérivée de $\log(1+x)$ est $1/(1+x)$ dont on connaît le développement :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon_1(x) \ ,$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$. Puisque $\log(1+0) = 0$, on déduit

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x) \ ,$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

4.3 Applications des développement limités.

4.3.1 Recherche de limites

Les développements limités permettent de lever des indéterminations de la forme $0/0$. La méthode consiste à faire un développement limité du numérateur et du dénominateur pour obtenir une fraction que l'on sait étudier.

Exemple 4.19. Déterminons

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x\sin x - \cos x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \ .$$

On effectue des développement limités à l'ordre 2 en zéro du numérateur et du dénominateur.

$$1 - x\sin x - \cos x = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x) \ ,$$
$$(\mathrm{e}^x - 1)^2 = x^2 + x^2\epsilon_2(x) \ .$$

On constate que les puissances x^2 se simplifient :

$$\frac{1 - x\sin x - \cos x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{-x^2/2 + x^2\epsilon_1(x)}{x^2 + x^2\epsilon_2(x)} = \frac{-1/2 + \epsilon_1(x)}{1 + \epsilon_2(x)} .$$

On conclut aisément

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x\sin x - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x\to 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \epsilon_1(x)}{1 + \epsilon_2(x)} = -\frac{1}{2} .$$

4.3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

D'après la formule de Taylor-Young, si une fonction f est deux fois dérivable en un point a, elle voisinage de a, elle admet alors un développement limité à l'ordre 2 en a dont la partie principale est

$$f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) .$$

On sait que l'équation de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est

$$y = f(a) + (x - a)f'(a) = f'(a)x + f(a) - af'(a) .$$

On peut montrer que la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente si $f''(a) > 0$ et au-dessous si $f''(a) < 0$. Si $f''(a) = 0$, il faut considérer les termes d'ordre supérieur.

Exemple 4.20. Soit f définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - x} .$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. L'équation de la tangente en (0,1) est $y = 1 + 2x$. La courbe est au-dessus de cette tangente.

4.3.3 Développements asymptotiques

Par un changement de variable, on peut ramener l'étude d'une fonction à l'infini à l'étude d'une autre fonction en 0. On obtient alors un développement dit asymptotique, dans une échelle qui dépend du changement de variable effectué. Si on a fait le changement de variable $X = 1/x$, on peut parfois obtenir un développement du type

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(x) ,$$

avec $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$. On peut obtenir toute sorte de développements en faisant d'autres changements de variables, par exemple $X = 1/\sqrt{x}$, $X = \log x$, $X = \mathrm{e}^x$ etc.

Exemple 4.21. Déterminons

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{\sin(2/x)} - 1\right)$$

(forme indéterminée "$0 \times \infty$"). En posant $X = \frac{1}{x}$, on a

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\sin(2/x)} - 1\right) = \lim_{X\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\sin(2X)} - 1}{X} .$$

On sait maintenant calculer aisément le développement à l'ordre 2 en 0 de $\mathrm{e}^{\sin(2X)}$:

$$\mathrm{e}^{\sin(2X)} = 1 + 2X + 2X^2 + X^2\epsilon(X)$$

avec $\lim_{X\to 0^+} \epsilon(X) = 0$. D'où

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{\sin(2/x)} - 1\right) = \lim_{X\to 0^+} (2 + 2X + X\epsilon(X)) = 2 .$$

4.3.4 Etude des branches infinies

Par cette méthode, on peut aussi déterminer des asymptotes et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Exemple 4.22. Étudions les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f défine sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 + \mathrm{e}^{1/x})$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty , \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty .$$

En substituant $1/x$ à X dans le développement au voisinage de zéro de e^X, on obtient

$$\mathrm{e}^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to\pm\infty} \epsilon(x) = 0$. On a donc

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\epsilon(x) .$$

On obtient que la droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote au graphe de f, et la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

Chapitre 5

Optimisation

5.1 Extrema d'une fonction numérique réelle

Définition 5.1 (Extremum local)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. On dit que x_0 est un maximum global de f sur I si*

$$\forall x \in I \ , \quad f(x) \leq f(x_0) \ .$$

On dit que x_0 est un minimum global de f sur I si

$$\forall x \in I \ , \quad f(x) \geq f(x_0) \ .$$

On appelle extremum global de f sur I un point x_0 un minimum global ou un maximum global de f sur I.

Exemple 5.2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{5}{16} \ .$$

Le point $1/4$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f(1/4) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = (x - 1/4)^2 \geq 0 \ .$$

Pour déterminer les extremas globaux d'une fonction sur un intervalle donné, il faut généralement étudier les variations de cet fonction sur cet intervalle.

Exemple 5.3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \ .$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \ .$$

Sa dérivée s'annule en -1 et 1, et l'on peut établir le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	1

On voit donc que la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ en $x = -1$ et un maximum global sur $\mathbb{R}$ en $x = 1$ (cf. Figure 5.1).

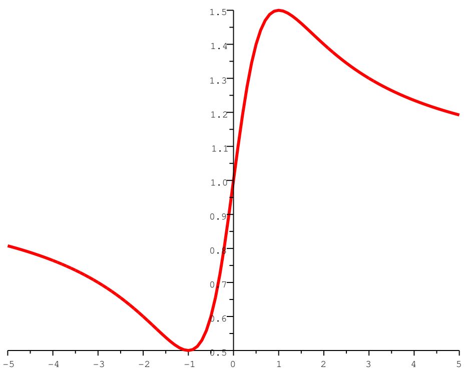

FIG. 5.1 – Graphe de la fonction $f(x) = (x^2 + x + 1)/(x^2 + 1)$.

Définition 5.4 (Extremum local)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un maximum local de f sur I si et seulement si il existe un intervalle ouvert J inclus dans I contenant x_0 tel que*

$$\forall x \in J \ , \quad f(x) \leq f(x_0) \ .$$

On dit que x_0 est un minimum local de f sur I si et seulement si il existe un intervalle ouvert J inclus dans I contenant x_0 tel que

$$\forall x \in J \ , \quad f(x) \geq f(x_0) \ .$$

On appelle extremum local de f sur I un minimum local ou un maximum local de f sur I.

Exemple 5.5. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 16x^2(1-x)^2 \; .$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(x) = 32x(2x-1)(x-1) \; .$$

On voit sur le tableau de variation de f que la plus grande valeur prise par f sur l'intervalle $]1/4, 3/4[$ est 1 :

$$\forall x \in]1/4, 3/4[\; , \quad f(x) \leq 1 = f(1/2) \; .$$

Le point $x = 1/2$ est donc un maximum local de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				1				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			0				0		

Remarque 5.6. Un extremum local peut ne pas être un extremum global comme l'illustre l'exemple 5.5. En effet, on voit sur cet exemple que la fonction f admet un maximum local sur $\mathbb{R}$ en $x = 1/2$. Mais le point $x = 1/2$ n'est pas un maximum global de f sur $\mathbb{R}$ puisque $f(2) = 64 > f(1/2) = 1$.

5.2 Points stationnaires

Définition 5.7. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un point de I. On dit que x_0 est un point stationnaire de f si et seulement si $f'(x_0) = 0$.*

Exemple 5.8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 27x^2 + \frac{2}{x} \; .$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{54x^3 - 2}{x^2} \; .$$

La fonction f admet un unique point stationnaire en $x = 1/3$.

Le lien avec ce qui précède est que les extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert sont des points stationnaires.

Théorème 5.9. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point intérieur à I. Si x_0 est un extremum local de f et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 5.10. La condition que x_0 est un point intérieur est nécessaire. Une fonction définie sur un intervalle fermé peut avoir un extremum sur un bord, qui ne soit pas un point stationnaire. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$ restreinte à l'intervalle $[0, 1]$ admet un minimum et un maximum qui ne sont pas des points stationnaires.

Remarque 5.11. Un point stationnaire n'est pas nécessairement un extremum local. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^5 + x^3 + 1 \ .$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 \ .$$

Le point 0 est un point stationnaire de f, car $f'(0) = 0$, mais, 0 n'est pas un extremum comme on peut le voir sur le graphe de f (cf. Figure 5.2).

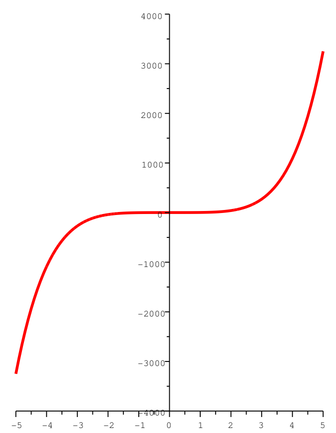

FIG. 5.2 – Graphe de la fonction $f(x) = x^5 + x^3 + 1$.

La fonction de l'exemple précédent est deux fois dérivable et sa dérivée seconde s'annule. C'est la raison pour laquelle 0 est un point stationnaire sans être un extremum. Si la dérivée seconde d'une fonction existe en un point stationnaire, alors c'est une extremum. Les conditions portant sur la dérivée seconde permettant de déterminer la nature des points stationnaires sont appelées conditions du second ordre.

Théorème 5.12 (Conditions du second ordre)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Si f est deux fois dérivable en x_0 et si x_0 est un point stationnaire (i.e. $f'(x_0) = 0$), alors*
- *si $f''(x_0) > 0$, x_0 est un minimum local ;*
- *si $f''(x_0) < 0$, x_0 est un maximum local.*

Exemple 5.13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} .$$

La fonction f est deux fois dérivable. Sa dérivée première est

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) .$$

L'unique point stationnaire est donc 1. La dérivée seconde de f est

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x - 2) .$$

On a donc $f''(2) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$. Le point 1 est donc un maximum.

5.3 Fonctions convexes

Définition 5.14. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe sur I si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in I^2 \ , \ \forall t \in [0, 1] \ , \ f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) .$$

Remarque 5.15. Cette inégalité s'interprète géométriquement en disant que la corde reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est au-dessus du graphe de f.

Définition 5.16. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe, i.e.*

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y) .$$

La propriété de convexité ou de concavité peut être caractérisée à l'aide de la dérivée second lorsqu'elle existe.

Proposition 5.17. *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.*

- *Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe.*
- *Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est concave.*

Proposition 5.18. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un point stationnaire intérieur à I.*

- *Si f est convexe, le point x_0 est un minimum global de f sur I.*
- *Si f est concave, le point x_0 est un maximum global de f sur I.*

Exemple 5.19. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^3 + x\log(x)$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + \log(x) \, ,$$
$$f''(x) = 6x + 1/x \, .$$

La dérivée seconde est strictement positive, et la fonction f est donc convexe. Cherchons les points stationnaires de f, solutions de l'équation

$$3x^2 + 1 + \log(x) = 0 \, .$$

On ne peut pas trouver de solution explicite, mais on a

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty \, , \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \, .$$

Par le théorème des valeurs intermédiares, on déduit qu'il existe au moins un point stationnaire x_0. Puisque la dérivée seconde est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée première f' est strictement croissante, et donc le point x_0 est l'unique point stationnaire. Puisque la fonction f est convexe, c'est un mimum global.

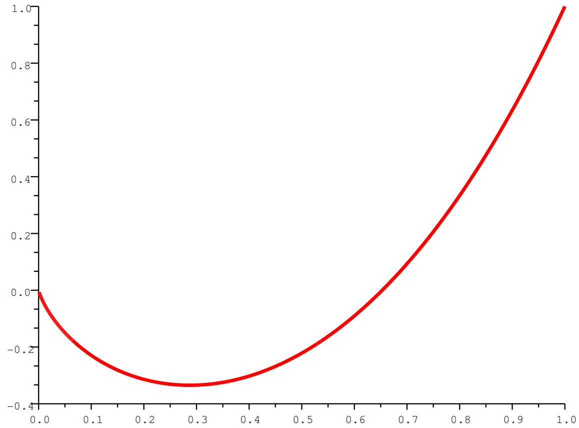

FIG. 5.3 – Graphe de la fonction $f(x) = x^3 + x\log(x)$.