## Exercice 1 :

1. Le fait de ramener des flux futurs indirectement non comparables à une date donnée (ou à une base donnée) afin de les comparer.
   Ici le taux d'actualisation est : $\frac{1}{(1+i_t)}$

   $$R_0 = \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n}$$

2. A la date $t+1$ :
   $$V(\Pi_{t+1}^e) = \frac{\Pi_{t+1}^e}{(1+i_t)}$$
   A la date $t+2$ :
   $$V(\Pi_{t+2}^e) = \frac{(1-\delta)\Pi_{t+2}^e}{(1+i_t)(1+i_{t+1}^e)}$$

3. Ici les profits et le taux d'intérêt sont constants
   $$V(\Pi_t^e) = \frac{\Pi_{t+1}^e}{(1+i_t)} + \frac{(1-\delta)\Pi_{t+2}^e}{(1+i_t)(1+i_{t+1}^e)} + \cdots$$
   $$= \frac{\Pi}{(1+i)} + \frac{(1-\delta)\Pi}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{(1-\delta)^{n-1}\Pi}{(1+i)^n}$$
   $$= \frac{\Pi}{(1+i)}\left(1 + \frac{1-\delta}{1+i} + \left(\frac{1-\delta}{1+i}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1-\delta}{1+i}\right)^{n-1} + \cdots\right)$$
   $$= \frac{\Pi}{(1+i)}\left(\frac{1 - \lim\limits_{i\to\infty}\left(\frac{1-\delta}{1+i}\right)}{1 - \frac{1-\delta}{1+i}}\right)$$
   $$= \frac{\Pi}{(1+i)}\left(\frac{1-0}{\frac{1+i-1+\delta}{1+i}}\right)$$
   $$= \frac{\Pi}{(1+i)}\left(\frac{1+i}{i+\delta}\right) = \frac{\Pi}{i+\delta}$$

4. Elle diminue. Relation inverse entre la valeur actualisée de l'investissement $V(\Pi_t^e)$ et le taux d'intérêt $i$. Plus le taux intérêt augmente, plus la VA de l'investissement diminue.

5. C'est ce que nous coûte une unité de capital : $(i+\delta)$. Ce taux englobe le coût total du capital (dépréciation + intérêts payés sur capital emprunté).

## Exercice 2 :

1. La Van (Valeur actualisée nette) est la différence entre les cash flows générés et l'investissement. Si elle est > 0, le projet est rentable.
$$VAN = -10000 + \frac{3000}{1.1} + \frac{5000}{1.1^2} + \underbrace{\frac{5000}{1.1^2}}_{prix\ revente} \cong 991.73$$

2. Le Tri (taux de rendement interne) est le taux de rentabilité pour lequel la Van est nulle.
$$TRI: -10000 + \frac{3000}{1+TRI} + \frac{5000}{(1+TRI)^2} + \frac{5000}{(1+TRI)^2} = 0$$
$$\Rightarrow -10000(1+TRI)^2 + 3000(1+TRI) + 10000 = 0$$
$$\Rightarrow 10(1+TRI)^2 - 3(1+TRI) - 10 = 0$$
On pose $X = 1 + TRI$
$$\Rightarrow 10x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$\frac{3 \mp \sqrt{(-3)^2 - 4(-10)10}}{20} = \frac{3 \mp \sqrt{409}}{20}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{409}}{20} = \dfrac{23.22}{20} = 1.16118 \\ x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{409}}{20} < 0 \text{ donc pas possible} \end{cases}$$
$$X = 1 + TRI$$
$$TRI = X - 1 = 1.16118 - 1 = 0.16118 \cong 16.11\%$$

$$VAN \cong 990$$
$$TRI \cong 16\%$$
$$VAN = \frac{\sum_{i=1}^{t} F_t}{1+r} - I$$
$$TRI \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^{t} F_t}{1+TRI} = I$$

## Exercice 3 :

1. La demande d'investissement.

$Q = AK^{\alpha}; 0 < \alpha < 1; A > 0$

Taux de dépréciation $\delta;\ 0 < \delta < 1$

Maximiser le profit (maximisation de la production à la date 0)
$\Pi = p * q - \text{coûts} = Q_1 - I_o$ ici

$\max_{K_1} \Pi = AK_1^\alpha$ à la date 1

Actualiser à la date 0
$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$

$\max_{K_1} \Pi = \frac{AK_1^\alpha}{1+r} - I_0 = \frac{AK_1^\alpha}{1+r} - K_1$ (car $K_o = 0$ donc $K_1 = I_o$)

Maximiser le profit par rapport à $K_1$ ou $I_0$

$\frac{\partial \Pi}{\partial K_1} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha A K_1^{\alpha-1}}{1+r} - 1 = 0$

$\Rightarrow K_1 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$\Rightarrow (1-\delta)K_0 + I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$\Rightarrow I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\delta)K_0$

$K_0 = 0 \Rightarrow I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Quand le taux d'intérêt augmente, l'investissement baisse et quand A augmente, l'investissement augmente.

$r \nearrow \Rightarrow I_0 \searrow \left(\frac{\partial I_0}{\partial r} < 0\right)$

$A \nearrow \Rightarrow I_0 \nearrow \left(\frac{\partial I_0}{\partial A} > 0\right)$

2. $K_0 > 0;\ I_0 \geq 0$
Absence de marché « d'occasion » pour son capital, le coût de désinvestissement (désinstallation des machines) est beaucoup plus important que le prix de revente.

$\max \frac{A[(1-\delta)K_0 + I_0]^\alpha}{1+r} = I_0$

$\frac{\partial \Pi}{\partial I_0} = \frac{\alpha A[(1-\delta)K_0 + I_0]^{\alpha-1}}{1+r} - 1 = 0$

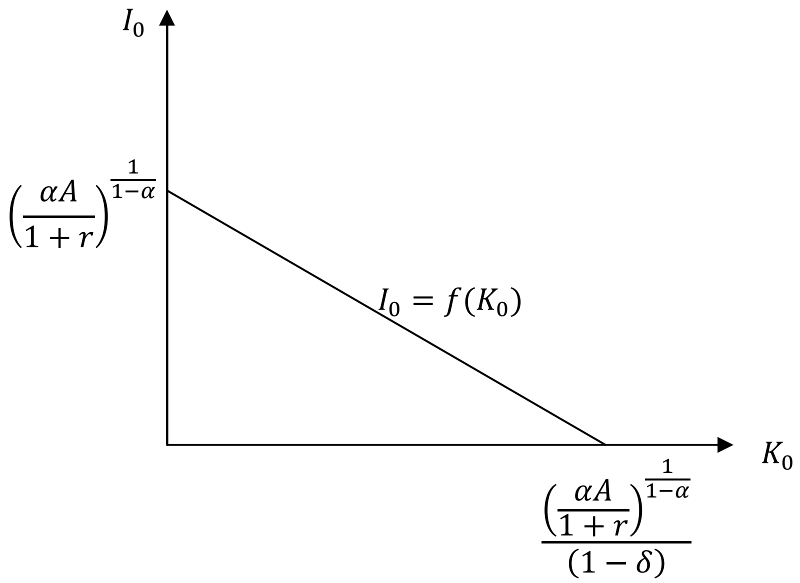
$\Leftrightarrow I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\delta)K_0$

$* \; I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\delta)K_0$

si $\left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > (1-\delta)K_0$

$$* \ I_0 = 0 \ \text{ si } \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq (1-\delta)K_0$$

Illustration graphique :




Le cas $K_0 < \frac{1}{(1-\delta)}\left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\frac{\partial I_0}{\partial K_0} = -(1-\delta) < 0$$

$I_0$ décroissant par rapport à $K_0$

3.

$$I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\delta)K_0$$

si $I_0 < 0 \Rightarrow (1-\delta)K_0 > I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Ce serait bien pour l'entreprise de désinvestir. La demande baisse, il est optimal de baisser ses investissements.

## **Exercice 4 :**

$\bar{Y} \leq AK^{\alpha}$; $\bar{Y} =$ production maximale

1. Maximiser le profit

$$\max_K \Pi = \frac{AK^\alpha}{1+r} - I_0$$

$$\text{s. c. } \bar{Y}_1 \leq AK_1^\alpha$$

2.

$$\left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > \bar{Y};\ K_1 = I_0 + (1-\delta)K_0$$

Maximiser le profit sous la contrainte

$$\max_K \Pi \Rightarrow$$

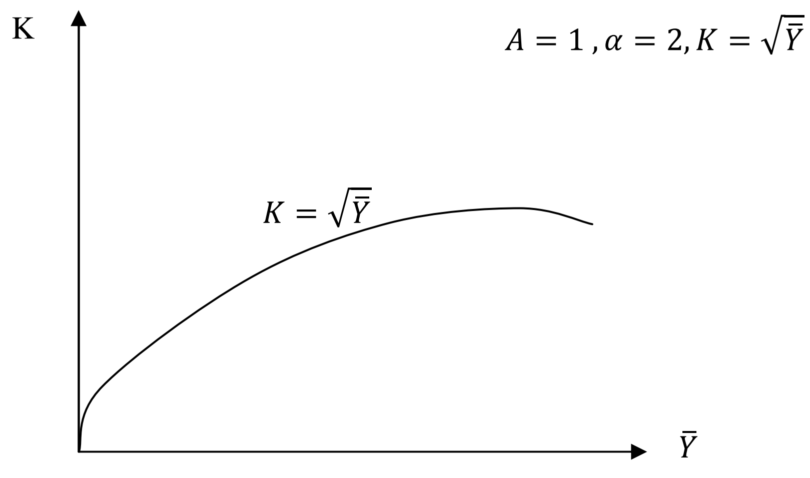
$$\max_{I_0} \Pi \Rightarrow I_0 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (1-\delta)K_0$$

$$\Rightarrow K_1 = \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Puisqu'il est sous contrainte, le max qu'il peut produire est $\bar{Y}$. On exprime $K$ en fonction de $\bar{Y}$.

$$\bar{Y} = AK^\alpha \Rightarrow K = \left(\frac{\bar{Y}}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Illustration graphique :




3.

$$(1-\delta)K_0 < \left(\frac{\bar{Y}_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{\alpha A}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$K_1 = I_0 + (1-\delta)K_0$$

$I_0 = K_1 - (1-\delta)K_0$

$$\Rightarrow I_0 = \left(\frac{\bar{Y}_1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - (1-\delta)K_0$$

On est toujours contraint par la relation $Y = AK^\alpha$

4. Progrès technique : amélioration des conditions scientifiques et techniques de travail, ce sont toutes les innovations qui permettent d'augmenter la productivité. On arrive à produire plus avec le même nombre de machines mais A a augmenté, le capital est devenu plus productif.

5. On cherche l'impact de A sur $I_0$ qu'il y a contrainte ou non.

   $*$ avec contrainte : $\bar{Y} = AK^\alpha$ ce qui se passe si $\bar{Y}$ est toujours constant, si $A$ augmente et $K$ diminue, on arrive à produire la même chose avec moins de machines. L'augmentation de $A$ fait baisser $I_0$.
   $*$ sans contrainte : $Y = AK^\alpha$ si $A$ augmente et si $K$ reste constant, $Y$ va augmenter et $I_0 \geq 0$.
   $A \nearrow \Rightarrow I_0 \geq 0$

6. On suppose que :

$$\frac{1}{\alpha A}\left(\frac{\bar{Y}_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1$$

$$K_0 = \left(\frac{\bar{Y}_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} ;\ \delta = 0$$

$f(x_1) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0)$ : fonction convexe

$K_1 = I_0 + (1-\delta)K_0$

$$I_0 = K_1 - K_0 = \left(\frac{\bar{Y}_1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\frac{\bar{Y}_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow I_0 \geq \frac{1}{\alpha A}\left(\frac{\bar{Y}_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0)$$

L'investissement augmente plus vite que la variation de la demande.

7. On appelle ce mécanisme l'accélérateur de l'investissement.

$$\underbrace{I_0}_{\text{l'investissement}} \geq \underbrace{\underbrace{\frac{1}{\alpha A}\left(\frac{\overline{Y_0}}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}_{f'(x_0)>1}\left(\underbrace{\overline{Y_1}}_{x_1} - \underbrace{\overline{Y_0}}_{x_0}\right)}_{\text{variation de la demande}}$$