Exercice 1 :

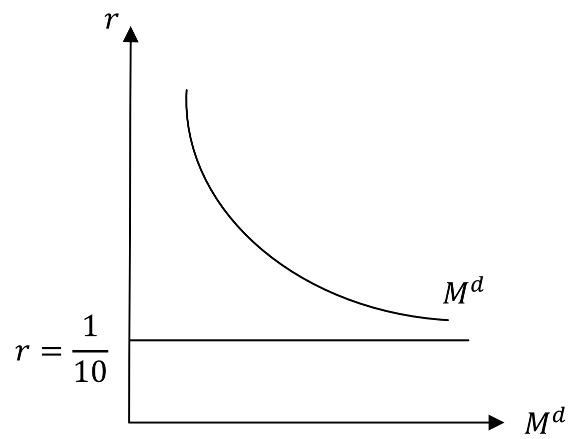
$$M(Q,r) = \frac{Q}{2} + \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\left(r - \frac{1}{10}\right)^2} \text{ : demande de monnaie}$$

$Q = \text{la production } (le\ PIB)$
$r = \text{le taux d'intérêt}$

1. Domaine de définition de la fonction

   $$r - \frac{1}{10} \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{10}\right\}$$

   $$r > \frac{1}{10} \text{ : pour éviter la trappe à liquidités}$$



   Si r est fort, on préfère placer l'argent dans des titres (actions et obligations). Si r est faible, on préfère détenir de l'argent liquide plutôt que de le placer.
   $r < \frac{1}{10}$: la demande de monnaie serait infinie et on ne pourrait plus garder l'équilibre sur le marché de la monnaie. $r = \frac{1}{10}$ détermine donc la trappe à liquidités.

2. Variation de M^d par rapport à Q et r ?

   $$\frac{\partial M(Q,r)}{\partial Q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{Q^{-\frac{1}{2}}}{\left(r - \frac{1}{10}\right)^2} > 0$$

   La demande de monnaie M^d augmente avec la production Q.

   $$\frac{\partial M(Q,r)}{\partial r} = -\frac{2\left(r - \frac{1}{10}\right)Q^{\frac{1}{2}}}{\left(r - \frac{1}{10}\right)^4} = -\frac{2Q^{\frac{1}{2}}}{\left(r - \frac{1}{10}\right)^3} < 0 \text{ si } r > \frac{1}{10}$$

   La demande de monnaie M^d baisse avec le taux d'intérêt r.

3. Fixer M

$$\bar{M} = \frac{Q}{2} + \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\left(r - \frac{1}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \bar{M} - \frac{Q}{2} = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\left(r - \frac{1}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(r - \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\bar{M} - \frac{Q}{2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{Q^{\frac{1}{4}}}{\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{10}$$

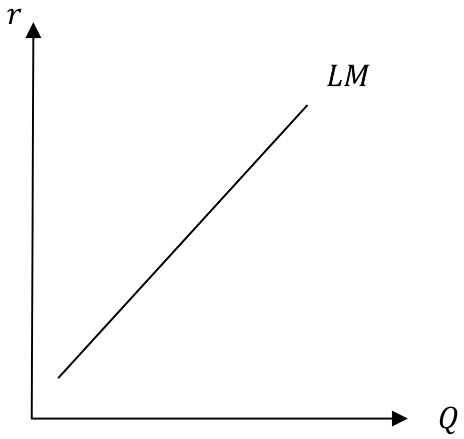
Q ne doit pas être trop grand par rapport à $\bar{M}$ parce que la demande de monnaie devient insensible par rapport à r.

$$\frac{\partial r}{\partial Q} = \frac{\frac{1}{4} Q^{-\frac{3}{4}} \left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right)}{\bar{M} - \frac{Q}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial Q} = \frac{\frac{1}{4} Q^{\frac{1}{4}} \left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(Q^{-1} + \left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{-1}\right)}{\bar{M} - \frac{Q}{2}} = \frac{\frac{1}{4} Q^{\frac{1}{4}} \left(Q^{-1} + \left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{-1}\right)}{\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$or \left(Q^{-1} + \left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{Q} + \frac{1}{\bar{M} - \frac{Q}{2}} = \frac{\bar{M} - \frac{Q}{2} + Q}{Q\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)} = \frac{\frac{Q}{2} + \bar{M}}{Q\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)}$$

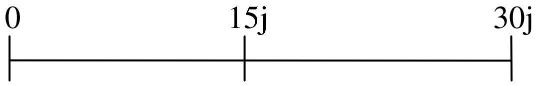
$$\text{Donc } \frac{\partial r}{\partial Q} = \frac{\frac{1}{4} Q^{\frac{1}{4}}}{\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{Q}{2} + \bar{M}}{Q\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4} Q^{\frac{1}{4}} \left(\frac{Q}{2} + \bar{M}\right)}{Q\left(\bar{M} - \frac{Q}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0 \text{ avec } \bar{M} > \frac{Q}{2}$$



La théorie quantitative de la monnaie :
$MV = PQ$
$Q =$ production réelle
$M =$ offre de monnaie (masse monétaire)
$P =$ niveau général des prix
$V =$ vitesse de circulation de la monnaie

Si V et P sont constants, plus Q est élevé, plus M doit augmenter pour garder l'équilibre.

Exercice 2 :

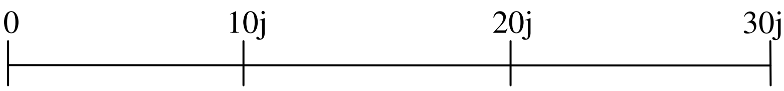


$\frac{R}{2}$: monnaie

$\frac{R}{2}$: titres $\rightarrow \frac{R}{2} * \frac{i}{2}$

En début de période, on garde $\frac{1}{n}R$, ce qui est nécessaire pour payer les dépenses en première période ; puis à chaque période on revend la même quantité de titres.

1. Ce qui se passe s'il y a trois périodes :



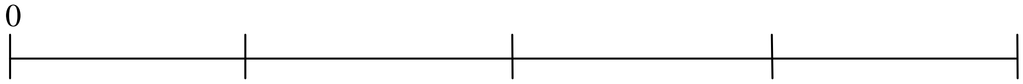
$\frac{R}{3}$: monnaie

$\rightarrow \frac{R}{3} * \frac{i}{3}$

$\frac{2R}{3}$: titres $\rightarrow \frac{2R}{3} * \frac{i}{3}$

$$\text{gains} = \frac{2R}{3} * \frac{i}{3} + \frac{R}{3} * \frac{i}{3} = \frac{iR}{3}$$

2. Ce qui se passe avec n périodes :



$\frac{R}{n}$: monnaie

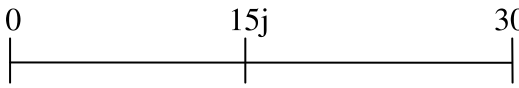
$\frac{n-1}{n}R$: titres $\quad \rightarrow \frac{n-1}{n}R*\frac{i}{n} \qquad \frac{n-2}{n}R*\frac{i}{n} \qquad \frac{n-3}{n}R*\frac{i}{n} \qquad \frac{n-(n-1)}{n}R*\frac{i}{n}$

$$\text{gains} = \frac{n-1}{n}R*\frac{i}{n}+\frac{n-2}{n}R*\frac{i}{n}+\cdots+\frac{R}{n}*\frac{i}{n}$$

$$=\frac{Ri}{n}\big((n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\big)$$

$$=\frac{Ri}{n}*\frac{n(n-1)}{2}=\frac{iR(n-1)}{2}$$

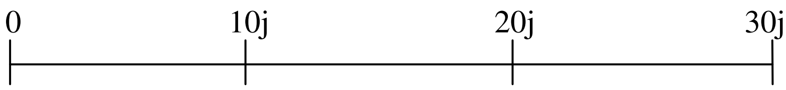
3. Ce qui se passe avec des coûts et deux périodes :



$\frac{R}{2}$: monnaie

$\frac{R}{2}$: titres $\qquad \rightarrow \frac{cR}{2}$: coûts

4. Ce qui se passe avec 3 périodes :



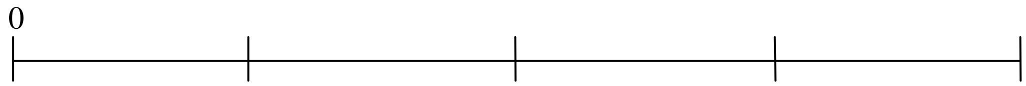
$\frac{R}{3}$: monnaie

$\rightarrow \frac{cR}{3}$

$\frac{2R}{3}$: titres $= \frac{2\mathrm{Rc}}{3} \quad \rightarrow \frac{cR}{3}$

$$\text{coûts} = \frac{2Rc}{3}+\frac{Rc}{3}+\frac{Rc}{3}=\frac{4}{3}Rc$$

5. Avec n périodes



$\frac{R}{n}$: monnaie

$\frac{n-1}{n}R$: titres $\rightarrow \frac{Rc}{n}$ $\frac{Rc}{n}$ $\frac{Rc}{n}$

coûtent $\frac{n-1}{n}Rc$

$$\text{coûts} = \frac{n-1}{n}Rc + \frac{n-1}{n}Rc = \frac{2(n-1)}{n}Rc$$

6. Nombre de périodes qui maximisent les gains :

$$G(n) - C(n) = \frac{iR(n-1)}{2n} - \frac{2(n-1)Rc}{n} = \frac{R}{n}(n-1)\left(\frac{i}{2} - 2c\right)$$

si : $\frac{i}{2} - 2c > 0 \rightarrow i > 4c \rightarrow n = \bar{n}$

si : $\frac{i}{2} - 2c < 0 \rightarrow n = 2$