Exercice 1 :

$u(C,L) = C^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$

$T = B + L$

$w, R > 0, p(c) = 1$

1. CB du ménage
   Revenus = dépenses
   $wB + R = pC$

   On a $B = T - L$

   Donc $w(T - L) + R = C$ (car $p = 1$)

   $\Rightarrow \underbrace{R + wT}_{\substack{revenu\ potentiel \\ total}} = \underbrace{wL + C}_{\substack{Coût\ d'opportunité \\ du\ loisir}}$

2. $w_r =$ salaire de réserve
   $w_r = TMS_{L/C|C=R,L=T}$

   $$w_r = \frac{\partial u}{\partial L} / \frac{\partial u}{\partial C} = \frac{\frac{1}{2}C^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}C^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}} = \frac{C}{L}$$

   $$w_r = \left[\frac{C}{L}\right]_{C=R,T=L} = \frac{R}{T}$$

3. $w < w_r \Rightarrow B = 0$

   Pour cela on résout le système :
   $$\begin{cases} R + wT = wL + C \\ TMS_{L/C} = \frac{w}{p} = w \text{ (car } p = 1) \end{cases}$$

   $\frac{w}{p}$ est la pente de la contrainte budgétaire.

   $$\Rightarrow \begin{cases} R + wT = wL + C \\ \frac{C}{L} = w \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} R + wT = wL^* + wL^* \\ C^* = wL^* \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} L^* = \frac{R + wT}{2w} = \frac{R}{2w} + \frac{T}{2} \\ C^* = w\left(\frac{R}{2w} + \frac{T}{2}\right) = \frac{R}{2} + \frac{wT}{2} \end{cases}$$

   $T = B + L \Rightarrow B^* = T - L^*$

   $$\Rightarrow B^* = T - \left(\frac{R}{2w} + \frac{T}{2}\right) = T - \frac{R}{2w} - \frac{T}{2} = \frac{T}{2} - \frac{R}{2w}$$

si $w < w_r$: $w < \frac{R}{T} \Rightarrow wT < R \Rightarrow \frac{wT}{2w} < \frac{R}{2w}$

$\Rightarrow \frac{T}{2} < \frac{R}{2w} \Rightarrow \frac{T}{2} - \frac{R}{2w} < 0 \Rightarrow B^* < 0$

Donc l'employé décide de ne pas travailler.

4. L'offre de travail B :

$$B = \begin{cases} \frac{T}{2} - \frac{R}{2w} \text{ si } wT \geq R \; (w \geq w_r) \\ 0 \text{ si } wT < R \qquad (w < w_r) \end{cases}$$

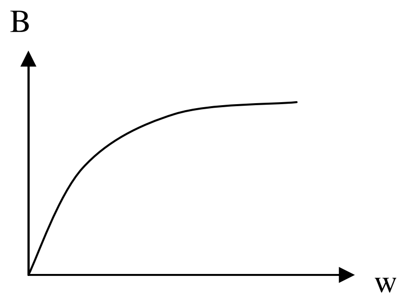
5. L'offre de travail diminue avec le revenu non salarial :

$$\frac{\partial B^*}{\partial R} = -\frac{1}{2w} < 0$$

6. L'offre de travail augmente avec le salaire

$$\frac{\partial B^*}{\partial w} = \frac{R}{2w^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 B^*}{\partial^2 w} = -\frac{4wR}{4w^4} = -\frac{R}{w^3} < 0$$



Exercice 2 :

$u(C, L) = C + lnL$

Taux de taxe : $\theta \in]0,1[$

$T = N + L$

$T \geq \frac{1}{1-\theta}$

$w = 1$

1. CB du ménage

$(w - \theta)N = C$

$\Rightarrow (1-\theta)(T-L) = C$

$\Rightarrow C + (1-\theta)L = (1-\theta)T$

2. Le prix du loisir est égal à $(1-\theta)$, qui représente le coût d'opportunité à ne pas travailler.

3. L^*, N^*?

$$\begin{cases} \underset{C,L\geq 0}{\text{Max}}\, u(C,L) = C + lnL \\ \text{s.c.} \quad C + (1-\theta)L = (1-\theta)T \end{cases}$$

On exprime C par rapport à L dans la contrainte puis on remplace la fonction d'utilité par l'expression trouvée :
$C = (1-\theta)T - (1-\theta)L$

$$\underset{C,L\geq 0}{\text{Max}}\, u(L) = (1-\theta)T - (1-\theta)L + lnL$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = -(1-\theta) + \frac{1}{L} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\theta) = \frac{1}{L^*}$$

$$\Rightarrow L^* = \frac{1}{(1-\theta)}$$

$$N^* = T - L^* = T - \frac{1}{(1-\theta)}$$

4. L'offre de travail diminue avec le taux d'imposition
$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = -\frac{(-1)(-1)}{(1-\theta)^2} = -\frac{1}{(1-\theta)^2} < 0$$

5. $M(\theta) = \theta N^*$
$$M(\theta) = \theta\left(T - \frac{1}{(1-\theta)}\right)$$

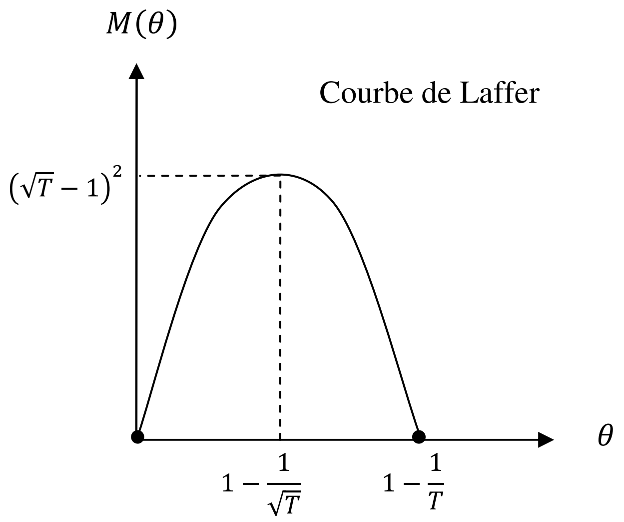
6. $M'(\theta)$
$$= T - \frac{1}{(1-\theta)} + \theta\left(-\frac{1}{(1-\theta)^2}\right) = T - \frac{1}{(1-\theta)} - \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$
$$= \frac{T(1-\theta)^2 - (1-\theta) - \theta}{(1-\theta)^2} = \frac{T(1-\theta)^2 - 1}{(1-\theta)^2}$$

$M'(\theta) = 0$
$\Rightarrow\ T(1-\theta)^2 - 1 = 0$
$$\Rightarrow\ (1-\theta)^2 = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow\ 1-\theta = \mp\frac{1}{\sqrt{T}}$$

$$\begin{cases}\theta = 1-\dfrac{1}{\sqrt{T}} \\ \theta = 1+\dfrac{1}{\sqrt{T}} : \text{pas possible car } 0<\theta<1\end{cases}$$

$M(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ et $\theta = 1-\dfrac{1}{\sqrt{T}}$



Exercice 3 :

$u(C, L) = CL$

$T = B + L$

w

$p(c) = 1$

$Q(B) = \sqrt{B}$

$pv = 1$

1. CB du ménage
   $wB = p(c)C$

   On a $B = T - L$

   Donc $w(T-L) = C$ (car $p = 1$)

   $\Rightarrow wT = wL + C$

2. Offre de travail des ménages : B^s
   Il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} wT = wL^* + C^* \\ TMS_{L/C} = \dfrac{w}{p(c)} = w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} wT = wL^* + C^* \\ TMS_{L/C} = \dfrac{\frac{\partial U}{\partial L}}{\frac{\partial U}{\partial C}} = \dfrac{C^*}{L^*} = w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C^* = wL^* \\ wT = wL^* + wL^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L^* = \dfrac{T}{2} \\ C^* = \dfrac{wT}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B^* = T - L^* \Rightarrow B^s = T - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$$

3. Demande de travail de l'entreprise B^d :

$$\underset{B>0}{\text{Max}}\, \pi = \underbrace{\sqrt{B}}_{CA} - \underbrace{wB}_{CT}$$

Condition de premier ordre :

$$\frac{\partial \pi}{\partial B} = \frac{1}{2\sqrt{B}} - w = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{B} = \frac{1}{2w}$$

$$\Rightarrow B^d = \frac{1}{4w^2}$$

4. Salaire d'équilibre :

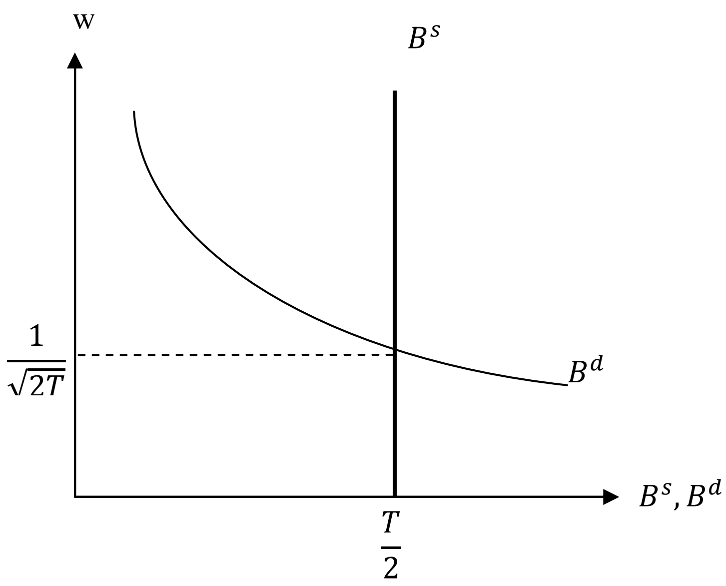
$$B^s = B^d$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{1}{4w^{*^2}} \Rightarrow \frac{4w^{*^2}T}{2} = 1 \Rightarrow 2w^{*^2} = \frac{1}{T} \Rightarrow w^{*^2} = \frac{1}{2T} \Rightarrow w^* = \frac{1}{\sqrt{2T}}$$

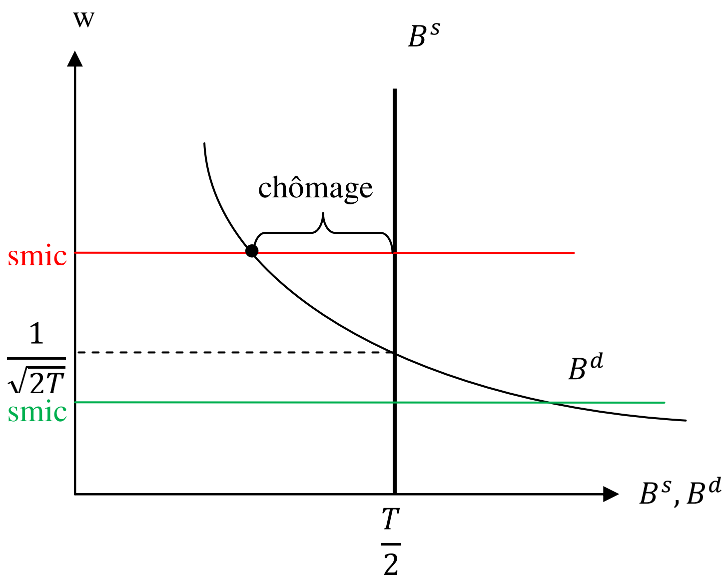
Graphiquement :

$$\frac{\partial B^d}{\partial w} = -\frac{8w}{16w^4} = -\frac{1}{2}w^3 < 0 : \text{décroissante}$$

$$\frac{\partial^2 B^d}{\partial^2 w} = \frac{6w^2}{4w^6} = \frac{3}{2w^4} > 0 : \text{convexe}$$



5. Si $\overline{w} > w^*$ il y aura du chômage. La demande de travail diminue mais l'offre de travail reste inchangée car elle est inélastique.
   Si $\overline{w} < w^*$ il n'y aura aucun impact sur l'équilibre du marché du travail.



<u>Exercice 4 :</u>

<u>Informations sur l'entreprise :</u>

$Q(L_1, L_2) = \sqrt{L_1 + L_2}$

$L_1 = 1$ maximum

$L_2 > 0$ ssi $L_1 = 1$

$pv = 1$

$\underset{L_1, L_2 > 0}{\text{Max}}\ \pi = \sqrt{L_1 + L_2} - w_1 L_1 - w_2 L_2$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq L_1 \leq 1 \\ L_2 \geq 0 \\ (L_1 - 1)L_2 = 0 \end{array}\right\} \text{contraintes}$$

<u>Informations sur le ménage :</u>

$$u(C, L) = lnc + \frac{1}{2} l$$

$$c = \begin{cases} w_1 L_1 & si\ L_2 = 0\ (L_1 \leq 1) \\ w_1 + w_2 L_2\ = w_1 + w_2(1 - l\,) & (L_2 = 1 - l\,) \end{cases}$$

1. Pas d'heures supplémentaires, la demande de travail est $L_1^d (L_1 \leq 1)$
   $Max\ \pi = \sqrt{L_1} - w_1 L_1$

   Conditions de premier ordre :
   $$\frac{\partial \pi}{\partial L_1} = \frac{1}{2\sqrt{L_1}} - w_1 = 0$$
   $$L_1^d = \frac{1}{4w_1^2}$$
   $$L_1^d < 1 \Rightarrow \frac{1}{4w_1^2} < 1 \Rightarrow w_1 > \frac{1}{2}$$

2. Demande de travail : L_2^d
   C'est parce qu'il a épuisé le nombre d'heures légales (car $L_1 = 1$) que le programme du producteur est:
   $$\underset{L_2}{\text{Max}}\, \pi = \sqrt{1 + L_2} - w_1 - w_2 L_2$$
   Condition de premier ordre
   $$\frac{\partial \pi}{\partial L_2} = \frac{1}{2\sqrt{1 + L_2}} - w_2 = 0$$
   $$\Rightarrow \sqrt{1 + L_2} = \frac{1}{2w_2} \Rightarrow 1 + L_2 = \frac{1}{4w_2^2} \Rightarrow L_2^d = \frac{1}{4w_2^2} - 1$$

3. Offre d'heures supplémentaires des ménages L_2^s
   $$Max\ \ u(C, L) = lnc + \frac{1}{2} l$$
   $$c = w_1 + w_2(1 - l)$$
   $$\underset{l}{\text{Max}}\ \ ln[w_1 + w_2(1 - l)] + \frac{1}{2} l$$
   Condition de premier ordre :
   $$\frac{\partial U}{\partial l} = -\frac{w_2}{w_1 + w_2(1 - l)} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2(1-l))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}w_2 l = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 - w_2$$

$$\Rightarrow l = \frac{w_1 - w_2}{w_2}$$

$$\Rightarrow l^* = \frac{w_1}{w_2} - 1$$

$$L_2^s = 2 - 1 - l^* = 2 - 1 - \left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right) = 2 - \frac{w_1}{w_2}$$

4. Salaire d'équilibre w_1 et w_2
   Sans heures supplémentaires :
   $L_1^d = 1$

$$\frac{1}{4w_1^2} = 1 \Rightarrow 4w_1^2 = 1 \Rightarrow w_1^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{2}$$

Avec des heures supplémentaires :
$L_2^d = L_2^s$

$$\frac{1}{4w_2^2} - 1 = 2 - \frac{w_1}{w_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4w_2^2} - 1 = 2 - \frac{\frac{1}{2}}{w_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4w_2^2} + \frac{1}{2w_2} = 3 \Rightarrow 1 + 2w_2 - 12w_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow 12w_2^2 - 2w_2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 * 12 * (-1) = 52$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{13}}{24} = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{12} \\ w_2 = \dfrac{2 - 2\sqrt{13}}{24} < 0 \text{ pas possible} \end{cases}$$

$$L_2 = 2 - \frac{w_1}{w_2} = 2 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{13}}{12}} = \frac{1}{2}\,\frac{12}{1+\sqrt{13}} = \frac{6}{1+\sqrt{13}}$$