CHAPITRE 4

LE PROCESSUS DE POISSON

1 Rappels

1.1 La loi de Poisson

Définition 1.1 *Soit $\lambda > 0$ un réel. Une variable aléatoire **discrète** X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\wp(\lambda)$, si :*

- *X est à valeurs dans $\mathbb{N}$*
- *pour tout entier k, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$*

Propriété 1.2 *Si $X \rightsquigarrow \wp(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda u$*

1.2 La loi exponentielle

Propriété 1.3 *Soit $\lambda > 0$ un réel. Si T est une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle de paramètre λ notée $\mathcal{E}(\lambda)$, alors :*

- *T est définie sur $[0; +\infty[$*
- *pour $0 \leq a \leq b$, $P(a \leq T \leq b) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$*

Propriété 1.4 $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

2 Simulation d'une variable aléatoire de loi exponentielle

Pour présenter le processus de Poisson, nous aurons besoin de simuler des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Propriété 2.1 *Soit λ un réel strictement positif. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$, alors la variable aléatoire T définie par :*

$$T = -\frac{1}{\lambda}\ln(X)$$

suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration : Soit t un réel positif, alors $P(T \leq t)$ est équivalent à $P(X \geq e^{-\lambda t}) = 1 - P(X < e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t}$ car $e^{-\lambda t} < 1$.

Exercice 1 *On souhaite modéliser le temps d'arrivée entre chaque client dans une file d'attente par des lois exponentielles de même paramètre λ.*

1. *En supposant que le temps moyen entre deux arrivées soit 2, quelle doit être la valeur de λ ?*
2. *En utilisant cette valeur pour λ, quelle est la probabilité que le temps d'arrivée entre deux clients soit*
   (a) *compris entre 1 et 3 ?*
   (b) *supérieur à 4 ? (vous arrondirez ces probabilités à 10^{-2} près).*
3. *Soient alors $T_1, T_2, T_3, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$ où λ est le réel déterminé à la question 1. T_1 est le temps d'arrivée du premier client et pour $i \geq 2$, T_i est le temps écoulé entre les arrivées du $(i-1)^{\text{ème}}$ client et du $i^{\text{ème}}$ client.*
   (a) *Produire par simulation un échantillon de valeurs pour T_1 jusqu'à T_5.*
   (b) *Déterminer alors le temps d'arrivée :*
      i. *du deuxième client*
      ii. *du troisième client*
      iii. *du quatrième client*
      iv. *du cinquième client.*

3 Le processus de Poisson

3.1 Présentation

Soient $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Nous utiliserons dans la suite l'interprétation ci-dessous :

les variables aléatoires $T_1, T_2, T_3, \dots$ représentent les temps d'attente entre les arrivées successives de clients dans une file d'attente (ou de documents dans une file d'impression). Ce sont les temps d'interarrivées.

Définition 3.1 *Pour tout instant $t \geq 0$, on pose*

$$N_t = \text{nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps } [0; t]$$

Nous dirons que la famille de variables aléatoires $(N_t)_{t\geq 0}$ est un ***processus de Poisson*** *(ou un* ***flux poissonien****) d'intensité λ.*

Propriété 3.2 *Puisque le temps écoulé entre l'arrivée de deux clients successifs suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, le temps moyen théorique entre ces arrivées est égal à $\dfrac{1}{\lambda}$, soit l'**inverse** de l'intensité du processus.*

Propriété 3.3 *Les **trajectoires** d'un processus de Poisson :*

- *sont constantes par intervalles (entre chaque arrivée de clients)*
- *présentent un saut de une unité (à chaque arrivée de clients)*

Exemple 3.4 *En supposant que le premier client arrive au temps $t = 0$, le deuxième client arrive au temps $t = 2$, et le troisième client au temps $t = 6$ on obtient les trajectoires de la figure 1 :*

Remarque 3.5 *Une trajectoire de Poisson n'est pas une fonction (contrairement à la fonction de répartition par exemple), donc on peut ici relier les paliers verticalement.*

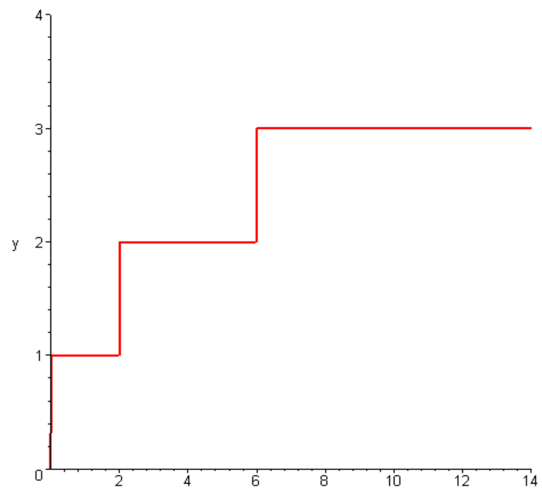

FIG. 1 – Exemple de trajectoires

3.2 Exercice

Exercice 2 *On veut simuler l'arrivée de clients suivant un flux poissonien d'intensité* $0,4$.

1. *Quel doit être le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par les temps d'interarrivées ?*
2. *Simuler deux échantillons d'arrivées de clients en se limitant aux quatre premières arrivées.*
3. *Représenter graphiquement les trajectoires obtenues (sur des graphiques différents).*

3.3 Simulation d'une loi de Poisson $\wp(\lambda)$

Propriété 3.6 *Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$* $(\lambda > 0)$.

On définit une variable aléatoire N de la façon suivante :

- *0 si $T_1 > 1$*

- *sinon l'indice n tel que $T_1 + T_2 + ... + T_n \leq 1$ et $T_1 + T_2 + ... + T_n + T_{n+1} > 1$*

Alors N suit la loi de Poisson $\wp(\lambda)$.

Supposons que nous soyons dans le cas de figure des clients qui rejoignent une file d'attente et que $(T_n)_{n\geq 1}$ représente les temps d'interarrivées. Alors ils suivent la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et la variable aléatoire N décrite précédemment compte le nombre de clients ajoutés à la file d'attente dans l'intervalle de temps $[0;1]$.

Exercice 3 *On suppose que les arrivées forment un flux poissonien d'intensité $0,4$.*

1. *On rappelle que si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1])$ alors $T = -\dfrac{1}{\lambda}\ln X$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.*
   Pour obtenir une simulation suivant la loi $\wp(\lambda)$: à la calculatrice, l'instruction $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(rand)$ appelée plusieurs fois de suite renvoie un échantillon de valeurs.
   Remplir le tableau suivant avec les valeurs obtenues :

2. *Utiliser cet échantillon pour simuler une variable aléatoire suivant la loi $\wp(\lambda)$.*
3. *Quelle est la probabilité qu'au bout de 1 seconde,*

- *aucun client ne soit arrivé ?*
- *1 client soit arrivé ?*
- *2 clients exactement soient arrivés ?*
- *4 clients exactement soient arrivés ?*

3.4 Loi de N_t

Propriété 3.7 *Si $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ, alors pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire N_t (comptant le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $[0;t]$) suit la loi de Poisson de paramètre λt.*

$$N_t \rightsquigarrow \wp(\lambda t)$$

Pour tout entier k, on a :

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

et donc $E(N_t) = \lambda t$

Le nombre moyen théorique d'arrivées dans l'intervalle de temps $[0;t]$ est donc proportionnel au temps t et le coefficient de proportionnalité est λ l'intensité du processus.

3.5 Exercices

Exercice 4 *On suppose que les arrivées forment un flux poissonien d'intensité 2. Quelle est la probabilité qu'au bout de 1 seconde,*

- *aucun client ne soit arrivé ?*
- *1 client soit arrivé ?*
- *2 clients exactement soient arrivés ?*
- *4 clients exactement soient arrivés ?*

Exercice 5 *Répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent* ***au bout de 5 secondes*** *au lieu d'1 seconde.*

Exercice 6 *On suppose que les arrivées forment un flux poissonien d'intensité 3.*

1. *Quelle est la probabilité que dans l'intervalle de temps $[0;2]$:*
   - *aucun client ne soit arrivé ?*
   - *1 client soit arrivé ?*
   - *2 clients exactement soient arrivés ?*
   - *3 clients exactement soient arrivés ?*
2. *Quel est le nombre théorique moyen d'arrivées dans l'intervalle $[0;12]$?*
3. *Au bout de combien de temps la moyenne théorique des arrivées sera-t-elle égale à 15 ?*

3.6 Indépendance et stationnarité des accroissements

Dans cette partie, $(N_t)_{t\geq 0}$ désigne un processus de Poisson d'intensité λ.

Définition 3.8 *Soient s et t des réels positifs tels que $s < t$. La différence $N_t - N_s$ est appelée* ***accroissement du processus*** $(N_t)_{t\geq 0}$ ***entre les instants s et t.***

Il correspond au nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $]s;t]$.

Propriété 3.9 ***(Indépendance des accroissements)***

Soient s, t, u et v des réels positifs tels que $s < t < u < v$.

Les accroissements $N_t - N_s$ et $N_v - N_u$ sont indépendants.

Le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $]s;t]$ est donc indépendant du nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $]u;v]$.

Propriété 3.10 ***(Stationnarité des accroissements)***

Soient s, t, et h des réels positifs.

Les accroissements $N_{s+h} - N_s$ et $N_{t+h} - N_t$ sont stationnaires, dans le sens où ils suivent la même loi.

Cette loi commune est $\wp(\lambda h)$.

Remarque 3.11

- *Du point de vue des probabilités, cela signifie que le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $]s;s+h]$ a le même comportement que le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $]t;t+h]$. Cela vient du fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».*
- *Pour un instant $t \geq 0$, l'accroissement $N_{t+1} - N_t$ suit la loi de Poisson de paramètre λ, et en particulier :*

$$E(N_{t+1} - N_t) = \lambda$$

Le nombre moyen théorique d'arrivées dans l'intervalle de temps $]t;t+1]$, c'est-à-dire pendant une unité de temps, est donc égal à l'intensité λ. Pour cela, λ est considéré en pratique comme un taux moyen d'arrivée (par unité de temps).

3.7 Superposition ou éclatement

3.7.1 Superposition de processus de Poisson

On suppose que l'on doit gérer deux flux d'arrivées en un même point (par exemple à un même guichet), flux que l'on suppose poissoniens, indépendants, et d'intensités λ_1 et λ_2. Notons $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ les processus de Poisson associés à ces flux. On a la propriété suivante :

Propriété 3.12 *Le flux total des arrivées est poissonien et d'intensité $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Si pour tout instant $t \geq 0$, on pose $N_t = N_t^1 + N_t^2$, le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est donc de Poisson et son intensité s'obtient en ajoutant celle des flux qui le composent.*

Remarque 3.13 *Cette propriété reste vraie si on considère n flux poissoniens indépendants d'intensités $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.*

3.7.2 Eclatement d'un processus de Poisson

On suppose que l'on doit gérer l'arrivée d'un flux poissonien d'intensité λ (par exemple à un standard téléphonique).

De plus, chaque client arrivé est immédiatement dirigé vers un ensemble de n points. La probabilité d'aller vers le point i ne dépend pas du client et vaut p_i, avec $p_1+p_2+...+p_n = 1$. Notons $(N_t)_{t\geq 0}$ le processus de Poisson associé au flux d'arrivée. On a alors la propriété suivante :

Propriété 3.14 *Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, le processus $(N_t^i)_{t\geq 0}$ associé au flux d'arrivée au point i est poissonien d'intensité λp_i.*

3.7.3 Exercices

Exercice 7 ***(Sur la superposition de processus de Poisson)***

On considère que des documents électroniques arrivent d'un point 1 ou d'un point 2 à un noeud, suivant des flux poissoniens d'intensité 0,5 et 2.

1. *Quelle est la probabilité que dans l'intervalle de temps $[0;3]$, 4 documents exactement soient arrivés ?*
2. *Quel est le nombre moyen théorique de documents arrivés à ce noeud au bout de 3 unités de temps ?*

Exercice 8 ***(Sur la décomposition d'un processus de Poisson)***

On considère que des documents électroniques arrivent suivant un flux poissonien d'intensité 1 à un noeud. Chacun des documents est instantanément dirigé vers le point 1 avec une probabilité de 0,4, ou vers le point 2 avec une probabilité de 0,6.

1. *Quelle est la probabilité que dans l'intervalle de temps $[0;2]$, 3 documents exactement soient arrivés ?*
   - *au point 1 ?*
   - *au point 2 ?*
2. *Quel est le nombre moyen théorique d'arrivées au point 1 au bout de 5 unités de temps ? Et au point 2 ?*

3. *Au bout de combien de temps la moyenne théorique des arrivées au point 1 sera égale à 9 documents ? Et au point 2 ?*
4. *Faire une simulation en vous limitant aux 8 premiers documents traités.*