CHAPITRE 1

LE LANGAGE DES PROBABILITES

1 Introduction et exemples

Probabilité vient du latin probare (prouver, ou tester). Ce que les mathématiciens appellent probabilité est une théorie mathématique utilisée pour décrire et quantifier l'incertain. Le but est la construction d'un modèle mathématique des phénomènes où intervient le hasard. Il s'agit d'essayer de modéliser une expérience pour laquelle on connaît à l'avance tous les résultats possibles, mais aussi pour laquelle on ne sait pas à l'avance quel résultat on va obtenir. (exemple : le lancer d'un dé).

Définition 1.1 *Une telle expérience s'appelle **expérience aléatoire**. Un événement élémentaire est l'un quelconque des résultats possibles. Tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire constituent l'**univers**. On le note* Ω.

Exemple 1.2 *lancer d'une pièce de monnaie, nombre de clients rejoignant une file d'attente, durée de vie d'une ampoule ...*

Trouver l'univers est parfois assez subtil. Par exemple, si une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés à 6 faces, il y a deux cas de figure : soit les dés sont distinguables (couleur différente, ...) et Ω *contient 36 événements élémentaires, soit ils ne le sont pas et* Ω *ne contient plus que 21 événements élémentaires.*

Pour la durée de vie d'une lampe, on doit choisir $\Omega = [0; +\infty[$ *et pour le nombre de clients d'une file d'attente,* $\Omega = \mathbb{N}$.

Exercice 1 *Décrire les événements élémentaires pour chacune des expériences aléatoires suivantes, pour lesquelles on lance simultanément :*

1. *une pièce de 1 € et une pièce de 2 €*
2. *deux pièces de 1 € sans marque distinctive*

(on pourra appeler Pile *et* Face *les résultats obtenus)*

2 Les événements

2.1 Définition

1. *Soit* Ω *l'univers d'une expérience aléatoire. Un **événement** est une partie de* Ω.
2. Ω *est appelé événement **certain**.*
3. *L'ensemble vide ne contenant aucun événement élémentaire est appelé événement **impossible** et noté* $\varnothing$.

Remarque 2.1 *Un événement est constitué de un ou plusieurs événements élémentaires.*

2.2 Opérations sur les événements

Dans cette partie, les événements se rapportent à une même expérience aléatoire.

Définition 2.2 ***Réunion et intersection d'événements***

1. *La **réunion** de deux événements* A *et* B*, notée* $A \cup B$ *est constituée des événements élémentaires qui sont soit dans* A*, soit dans* B.
2. *L'**intersection** de deux événements* A *et* B*, notée* $A \cap B$*, est constituée des événements élémentaires qui sont à la fois dans* A *et dans* B.

Remarque 2.3 *On définirait de même une réunion ou une intersection de plus de deux événements.*

Propriété 2.4 *Si* A*,* B*, et* C *sont des événements alors*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
et
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Définition 2.5 ***Evénements incompatibles, événements contraires***

1. *Deux événements A et B sont dits* ***disjoints*** *ou* ***incompatibles*** *si* $A \cap B = \varnothing$.
2. *Deux événements A et B sont dits* ***contraires*** *si* $A \cap B = \varnothing$ *et* $A \cup B = \Omega$. *On note* $A = \overline{B}$ *ou* $B = \overline{A}$.

Remarque 2.6 *: Le contraire de A est constitué de tous les événements élémentaires qui ne sont pas dans A.*

Propriété 2.7 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition 2.8 ***Différence et différence propre de deux événements***

1. *La différence entre deux événements A et B, dans cet ordre, est notée* $A \backslash B$. *C'est l'événement* $A \cap \overline{B}$.
2. *Lorsque* $B \subset A$, *on parlera de différence propre.*

3 Exercices

Exercice 2 *Soient A, B et C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C les événements suivant :*

1. *A et B se produisent, mais pas C*
2. *A seul se produit*
3. *Les trois événements se produisent*
4. *Aucun des trois événements ne se produit*
5. *L'un au moins des événements se produit*
6. *Un seul des trois événements se produit.*

Exercice 3 *Dans une ville donnée, on considère l'ensemble* Ω *des couples mariés et les événements :*
A : « l'homme a plus de 40 ans »
B : « la femme est plus jeune que l'homme »
C : « la femme a plus de 40 ans »

1. *Interpréter en fonction de A, B et C l'événement « le mari a plus de 40 ans, mais ce n'est pas le cas de sa femme ».*
2. *Décrire en langage ordinaire les événements* $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap C$ *et* $A \cup B$.
3. *Vérifier que si* $A \cap \overline{C}$ *se produit, alors B se produit. Expliquer ensuite que B peut se produire alors que* $A \cap \overline{C}$ *ne se produit pas.*

Exercice 4 ***Propriété de la différence de deux événements***
Soient A et B deux événements. Montrer les égalités suivantes :

1. $A \backslash A = \varnothing$
2. $(A \cup B) \backslash A = B \backslash A$
3. $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$

4 Lien entre probabilité et statistique

4.1 Pourquoi faire des simulations ?

Réaliser une expérience aléatoire demande parfois la mise en place d'un protocole compliqué, ou ne garantit pas un résultat issu du seul hasard (expérience faussée inconsciemment). La puissance du calcul informatique permet de produire des simulations d'une expérience.

Pour mieux appréhender le hasard, on peut commencer par réaliser un grand nombre de simulations d'une même expérience aléatoire et d'observer les différents résultats obtenus, pour en dégager les tendances. Simuler n fois la même expérience aléatoire permet d'obtenir un échantillon de taille n.

En pratique, pour réaliser de telles simulations, on peut utiliser la fonction $\boxed{rand}$ d'une calculatrice ou d'un tableur.

Définition 4.1 *Supposons qu'on ait construit un échantillon de taille n d'une expérience aléatoire.*

1. *Soit A un événement élémentaire associé à une expérience aléatoire. Si parmi les n observations, l'événement élémentaire est apparu m fois, alors la fréquence de cet événement pour cet échantillon est définie par :* $f(A) = \dfrac{m}{n}$
2. *La liste des fréquences de tous les événements élémentaires s'appelle distribution des fréquences.*

3. *Si A est un événement, la fréquence de A est égale à la somme des fréquences des événements élémentaires qui le composent.*

On obtient en fait $f(A) =$

$$\frac{\textit{Nombre d'apparition de l'événement}}{\textit{Taille de l'échantillon}}$$

Par exemple, $f(\Omega) = 1$ *et* $f(\varnothing) = 0$.

Propriété 4.2 ***Propriété des fréquences*** *Soient A et B deux événements.*

1. $f(\overline{A}) = 1 - f(A)$
2. *Si A et B sont disjoints,* $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
3. *Pour A et B quelconques,* $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

4.2 La "loi des grands nombres"

Intuitivement, pour une expérience aléatoire, tous les événements élémentaires n'ont pas forcément la même chance de se produire. Ceci amène à définir la notion de probabilité d'un événement. Pour fait apparaître le lien entre probabilités et statistiques, on part de la distribution des fréquences et de la loi des grands nombres énoncée en 1713 par Jacques Bernoulli. En résumé, la probabilité de l'apparition d'un résultat est pratiquement égale à la fréquence d'apparition de ce résultat quand on répète un grand nombre de fois cette expérience.

Propriété 4.3 ***Enoncé vulgarisé de la loi des grands nombres***
Soit A un événement associé à une expérience aléatoire. Si on simule cette expérience, alors plus la taille de l'échantillon est importante, plus la fréquence d'apparition de A va se stabiliser.

Cette valeur autour de laquelle la fréquence d'apparition se stabilise est dite fréquence théorique.

Exemple 4.4 *Si on lance un dé, la fréquence théorique d'apparition du 6 est de* $\frac{1}{6}$*, soit 0,166666....(ou environ 16,7% de chances d'obtenir un 6). Voici un exemple de simulations du lancer d'un dé. Pour chaque échantillon, on relève la fréquence d'apparition du 6. La simulation a été effectuée avec 20, 100, 200, 1000 puis 5000 lancers.*
On voit la tendance à la stabilisation de la fréquence d'apparition du 6, autour de la valeur 0,167 (voir FIG.1).

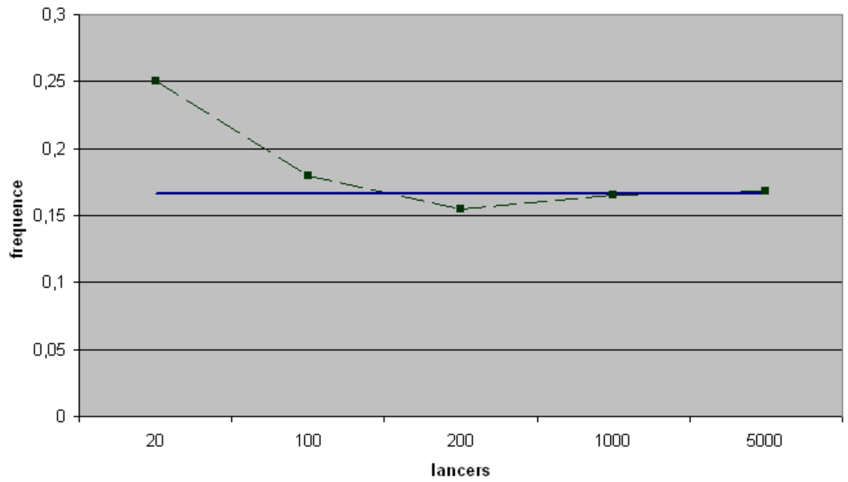

FIG. 1 – Illustration de la loi des grands nombres

La notion de probabilité généralise et prolonge le concept de fréquence théorique d'apparition.

5 Probabilité

5.1 Définition

Définition 5.1 *Etant donné un univers* Ω *associé à une expérience aléatoire, on appelle* ***probabilité*** *une fonction P qui à tout élément A associe un réel* $P(A)$ *dans l'intervalle* $[0; 1]$ *tel que :*

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *si A et B sont deux événements disjoints.*

Le couple (Ω, P) *sera appelé* ***espace probabilisé****.*

La probabilité hérite des propriétés des fréquences donc on obtient :

Propriété 5.2 *Si A et B sont deux événements associés à une expérience aléatoire,*

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque 5.3 *Cela permet d'obtenir* $P(\varnothing) = 0$ *puisque* $\overline{\Omega} = \varnothing$.

Attention : La formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ est en général fausse, nous verrons plus tard qu'elle n'est vraie que si les événements A et B sont indépendants, ce qui n'est pas souvent le cas.

5.2 L'équiprobabilité

Définition 5.4 *Dans un univers contenant N événements élémentaires, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se produire. Cette probabilité vaut alors* $\frac{1}{N}$.

Propriété 5.5 *Pour tout événement A, on a* $P(A) =$

$$\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

C'est l'exemple le plus immédiat que suivent beaucoup d'expériences aléatoires (lancer d'un dé non truqué, d'une pièce bien équilibrée, tirage au hasard d'une boule dans une urne ...)

Remarque 5.6 *Attention à la notion d'équiprobabilité : par exemple, si on considère le tirage d'une boule dans une urne contenant 10 boules noires et 5 boules blanches : chaque boule a autant de chance d'être tirée qu'une autre, il y a donc équiprobabilité, mais ce ne sont pas les couleurs qui sont équiprobables.*

5.3 Exercices

Exercice 5 *On suppose que l'on dispose d'un dé truqué à 6 faces tel que les probabilités d'obtenir 1, 2, 3, 4 et 5 sont égales et valent 0,1.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir 6 points ?*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de points ?*

Exercice 6 *On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité :*

1. *d'obtenir le roi de pique ?*
2. *d'obtenir un pique ?*
3. *d'obtenir un roi ?*
4. *d'obtenir un roi ou un pique ?*
5. *d'obtenir ni roi ni pique ?*

Exercice 7 *On lance deux dés de couleur rouge et jaune, et on relève la somme des points obtenue. Lever le paradoxe apparent suivant : « On observe qu'on obtient un peu plus souvent la somme 9 que la somme 10, bien que ces sommes soient obtenues toutes les deux de deux façons différentes :*
$9 = 3 + 6 = 4 + 5$ *et* $10 = 4 + 6 = 5 + 5$. *»*

Remarque 5.7 *C'est Galilée qui leva ce paradoxe (en fait, avec trois dés au lieu de deux) vers 1620 pour répondre à une demande du Duc de Toscane. Galilée est ainsi l'un des premiers avec Cardan à avoir écrit sur le "calcul des hasards".*

Exercice 8 *On lance trois fois de suite une pièce, en notant chaque fois la face obtenue. Quelle est la probabilité d'obtenir :*

1. *trois fois Pile ?*
2. *deux fois Pile exactement ?*
3. *au moins une fois Pile ?*
4. *uniquement des Face ?*

On pourra s'aider d'un arbre.

Exercice 9 *Un démarcheur à domicile a prévu de visiter les maisons A, B, C et D ce matin.*

1. *Combien de choix a-t-il pour effectuer ses quatre visites ? (on pourra faire un arbre)*
2. *Quelle est la probabilité qu'il commence par la maison A ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'il commence par la maison A et qu'il termine par la D ?*

6 Probabilités conditionnelles

6.1 Définition

Dans cette partie, (Ω, P) est un espace probabilisé.

Définition 6.1 *Soit B un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement A, on définit la* ***probabilité conditionnelle de A sachant B*** *comme :*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque 6.2 *$P_B(A)$ est parfois notée $P(A|B)$.*

Exemple 6.3 *On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. La probabilité conditionnelle de tirer un roi sachant que la carte est un coeur est $\frac{1}{8}$.*
En effet, notons C : « la carte est un coeur »et R : « la carte est un roi ». $P(C) = \dfrac{1}{4}$ et $P(C \cap R) = \dfrac{1}{32}$ ce qui donne $P_C(R) = \dfrac{1/32}{1/4} = \dfrac{1}{8}$.
On remarque que ceci est conforme à l'intuition puisque choisir un roi sachant que la carte est un coeur revient bien à choisir le seul roi parmi les 8 coeurs.

Exercice 10 *110 étudiants de STS se répartissent de la façon suivante :*

	Filles	*Garçons*
Pratique un sport	*30*	*50*
Ne pratique aucun sport	*12*	*18*

On tire un étudiant au hasard parmi les 110. Tous les étudiant ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
F : « l'étudiant est une fille »
G : « l'étudiant est un garçon »
S : « l'étudiant pratique un sport »et $\overline{S}$: « l'étudiant ne pratique aucun sport ».

1. *Déterminer à l'aide du tableau les probabilités suivantes : $P(S)$, $P(F \cap S)$, $P(\overline{S})$ et $P(G \cap \overline{S})$.*
2. *En déduire $P_S(F)$ et $P_{\overline{S}}(G)$.*

6.2 Formule des probabilités totales

Définition 6.4 ***(partition)***
Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω si :

1. *ces événements sont deux à deux disjoints*
2. *leur réunion est égale à Ω.*

Propriété 6.5 ***(Formule des probabilités totales)***
Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω. Alors, pour tout événement B :

1. *$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$*
2. *Si de plus tous les A_i sont de probabilité non nulle, alors :*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Remarque 6.6 *En pratique, on utilisera souvent la formule avec une partition de deux événements A et $\overline{A}$:*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

d'où

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}).$$

Exemple 6.7 *Une machine produit des pièces pouvant présenter deux défauts de type a ou b. Des études statistiques permettent d'utiliser les estimations suivantes :*

- *la probabilité qu'une pièce ait le défaut a vaut 0,01*
- *sachant qu'une pièce présente le défaut a, la probabilité qu'elle présente le défaut b est 0,02.*
- *sachant qu'une pièce ne présente pas le défaut a, la probabilité qu'elle ne présente alors pas le défaut b est 0,95.*

Soient A : « la pièce présente le défaut a »et B : « la pièce présente le défaut b ». Calculons $P(B)$.
On obtient $P(A) = 0,01$, $P(\overline{A}) = 0,99$, $P_A(B) = 0,02$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,95$.
Cela permet aussi d'écrire $P_A(\overline{B}) = 0,98$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0,05$.

En utilisant la partition $(A, \overline{A})$, on obtient
$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}) = 0,01 \times 0,02 + 0,99 \times 0,05 = 0,0497$.

Remarque 6.8 *Ce genre d'exercice se traite très bien en construisant un arbre pondéré.*

6.3 Inversion de probabilité et formule de Bayes

Théorème 6.9 ***(Théorème de Bayes)*** *Soit B un événement de probabilité non nulle et $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω où les A_i sont aussi de probabilité non nulle. Alors pour tout j de {1,...,n} :*

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

Remarque 6.10 *On utilise souvent cette formule avec la partition $(A, \overline{A})$: connaissant $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$, on veut obtenir $P_B(A)$, d'où le terme **inversion de probabilité**. Dans ce cas de figure, faire l'exercice qui suit :*

Exercice 11 *En construisant un arbre comportant les événements A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$, retrouver la formule de Bayes.*

Exemple 6.11 *Un individu est choisi au hasard dans une population où l'on trouve une proportion de 10^{-4} de gens atteints d'une maladie. On lui fait passer le test de détection de la maladie. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement malade ?*

Considérons les événements M : « l'individu est atteint de la maladie »et $\overline{M}$: « l'individu n'est pas atteint de la maladie », enfin P : « le test de détection donne un résultat positif ». Les données du problème fournissent $P(M) = 10^{-4}$ d'où $P(\overline{M}) = 0,9999$.
Pour calculer $P_P(M)$, il faut connaître $P_M(P)$ (probabilité d'avoir un résultat positif au test si l'individu est malade) et $P_{\overline{M}}(P)$ (probabilité d'avoir un résultat négatif au test si l'individu n'est pas malade).
Si on rajoute les données $P_M(P) = 0,99$ et $P_{\overline{M}}(P) = 0,001$ (les tests ne sont pas infaillibles), on trouve alors :

$$P_P(M) = \frac{P(M)P_M(P)}{P(M)P_M(P) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(P)} = \frac{10^{-4} \times 0,99}{10^{-4} \times 0,99 + 0,9999 \times 0,001} \approx 0,09.$$

Remarque 6.12 *Cette probabilité très faible est due au grand nombre d'erreurs de diagnostic provenant de la proportion énorme de gens non atteints de la maladie dans la population.*

6.4 Exercices

Exercice 12 *Un sac contient 25 boules, dont 15 blanches et 10 noires. L'expérience consiste à tirer une première boule puis une seconde sans remise de la première dans le sac.*

1. *Quelle est la probabilité que la première boule soit blanche ?*
2. *Quelle est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première est blanche ?*
3. *Quelle est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première est noire ?*
4. *Calculer la probabilité que les deux boules soient blanches.*
5. *Calculer la probabilité que la première boule soit blanche sachant que la première est blanche. (ce n'est pas une erreur d'énoncé).*

Exercice 13 *4 % des pièces fabriquées dans un atelier étant défectueuses, on décide de les contrôler à l'aide d'une machine.*

- *si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,98*
- *si la pièce défectueuse, elle refusée avec une probabilité de 0,99*

1. *Calculer la probabilité des événements suivants : (on pourra s'aider d'un arbre pondéré)*
   (a) E_1 *: « la pièce est défectueuse et elle est acceptée »*
   (b) E_2 *: « la pièce est bonne et elle est refusée »*
2. *Calculer* $P(E_1 \cup E_2)$*. Interpréter ce résultat.*
3. *Calculer la probabilité que la pièce soit bonne, sachant qu'elle a été refusée.*

Exercice 14 *Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blanc, le tiers de verts et le sixième de jaunes.*

1. *50 des jetons blancs sont ronds, 30 des jetons verts sont ronds et 40 des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés.*
   On tire un jeton hasard. Sachant que ce jeton est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit jaune ?
2. *Un tiers des jetons blancs sont ronds, un quart des jetons verts sont ronds et un quart des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés.*
   On tire un jeton hasard. Sachant que ce jeton est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit jaune ?

Exercice 15 *Un étudiant répond à une question où il y a à choisir entre m réponses dont une seule est la bonne. Soit p la probabilité que l'étudiant connaisse la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la réponse sachant qu'il a répondu correctement ?*

6.5 Indépendance

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

Définition 6.13 *Nous dirons que deux événements A et B sont* ***indépendants*** *si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Propriété 6.14 ***(probabilités conditionnelles et indépendance)***
Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$*. On a l'équivalence :*

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow P_A(B) = P(B).$$

Le fait que A soit réalisé ou non n'influe pas sur la réalisation de B.

Exemple 6.15 *Dans le lancer d'un dé équilibré, les événements A : « obtenir un numéro pair »et B : « obtenir un multiple de 3 »sont des événements indépendants. Traduit sous forme de probabilité, cela donne* $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$ *et* $P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Une explication intuitive est que la répartition des nombres pairs dans l'univers Ω=*{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} est identique à celle des nombres pairs dans B = {3 ; 6}.*

D'autre part, les événements A : « obtenir un nombre pair »et C : « obtenir au moins 4 »= {4 ; 5 ; 6} ne sont pas indépendants car $P(C) = \dfrac{1}{2}$ *et* $P(A \cap C) = P(\{4; 6\}) = \dfrac{2}{6} \neq P(A)P(C)$ *(intuitivement, la répartition des nombres pairs dans l'univers de départ est de* $\dfrac{1}{2}$ *et la répartition dans le sous-univers C est de* $\dfrac{2}{3}$*).*

Remarque 6.16
- *Deux événements incompatibles, de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants. En effet, leur intersection étant vide, la probabilité de l'intersection est nulle alors que ni* $P(A)$*, ni* $P(B)$ *n'est nul.*
- *Un événement de probabilité nulle est indépendant de tout autre événement. En effet, si* $P(A) = 0$ *alors* $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$*.*

Définition 6.17 ***(Indépendance d'événements)*** *Les événements* $A_1, A_2, ..., A_n$ *sont dits mutuellement indépendants si pour tout sous ensemble d'indices K de {1,2,...,n},*

$$P(\bigcap_{i \in K} A_i) = \prod_{i \in K} P(A_i)$$

Exemple 6.18 *Pour 3 événements A, B et C il faut vérifier la formule pour* $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ *et* $P(A \cap B \cap C)$.

6.6 Exercices

Exercice 16 *Considérons le tirage au hasard d'une carte un jeu de 32 cartes. Les événements C : « tirer un coeur »et AR : « tirer un as rouge »sont-ils indépendants ?*

Exercice 17 *Dans une urne contenant autant de boules rouges que de boules noires, on procède au hasard à deux tirages successifs d'une boule en remettant dans l'urne la boule obtenue au premier tirage.*
On donne les événements suivants : R_1 *: « la première boule est rouge »,* R_2 *: « la seconde boule est rouge »et* B *: « les deux boules tirées sont de la même couleur ».*

Montrer que les événements R_1*,* R_2 *et* B *sont indépendants deux à deux, mais que ces événements ne sont pas mutuellement indépendants.*

Exercice 18 *Une entreprise dispose de cinq serveurs indépendants les uns des autres. Suite à des problèmes techniques, on estime que la probabilité qu'un quelconque parmi ces serveurs tombe en panne durant une période donnée est 0,2. Quelle est la probabilité que l'on ne puisse accéder à aucun de ces serveurs ?*

Exercice 19 *Montrer que si deux événements* A *et* B *sont indépendants alors* A *et* $\overline{B}$ *le sont aussi.*