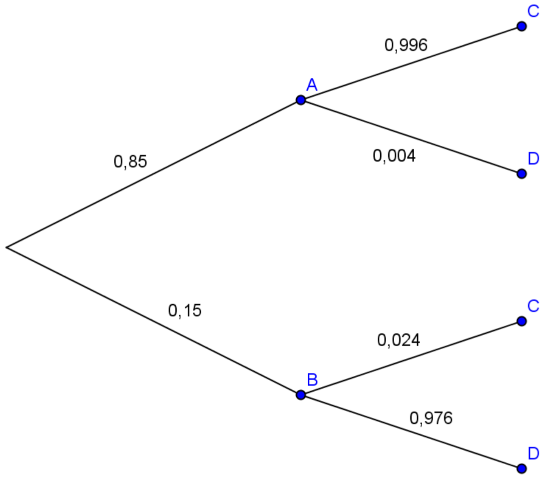
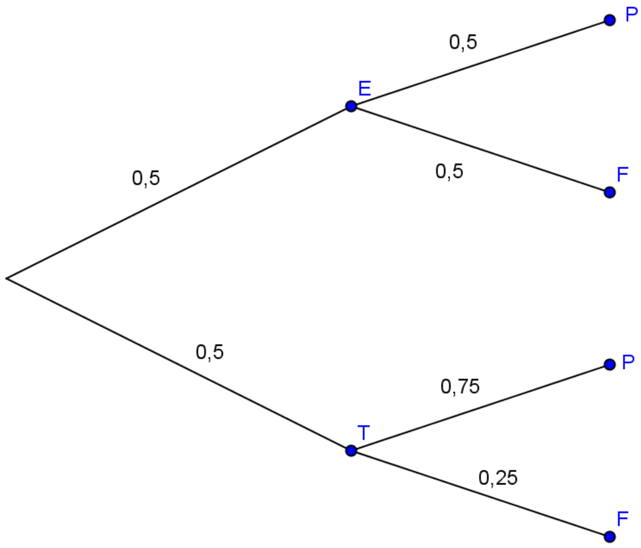
Probabilités - Correction des exercices (fiche d'exercices)

Exercice 5 : Si A et B sont disjoints alors $p(A) + p(B) = p(A \cup B)$.
Or $p(A) + p(B) = 0{,}8 + 0{,}3 = 1{,}1$ et 1,1 ne peut pas être égal à $p(A \cup B)$ (une probabilité ne dépasse jamais 1) donc il est impossible que A et B soient disjoints.

Exercice 10 :
1) $p(A) = 0{,}85, p(B) = 0{,}15, P_A(D) = 0{,}004$ et $p_B(C) = 0{,}024.$
2) $p(D \cap A) = p(A) \times p_A(D) = 0{,}85 \times 0{,}004 = 0{,}0034$
3) $p(C \cap B) = 0{,}15 \times 0{,}024 = 0{,}0036$
4) $p(test\ erroné) = P(D \cap A) + P(C \cap B) = 0{,}007$



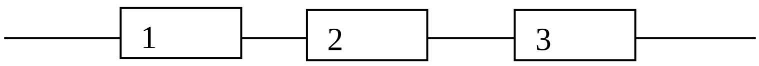


Exercice 13 :
Soit T l'événement « la pièce est truquée »
Et E l'événement « la pièce est équilibrée » .
P pour Pile, F pour Face.

$$p_P(T) = \frac{p(T \cap P)}{p(P)} = \frac{p(T \cap P)}{p(E \cap P) + p(T \cap P)} = \frac{0{,}5 \times 0{,}75}{0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}75} = 0{,}6$$

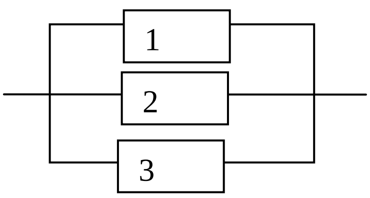
Exercice 17 :
On appelle P_1 l'événement « le composant 1 est en panne » , de même pour P_2 et P_3.
$P(P_1) = p_1$, de même pour $P(P_2)$ et $P(P_3)$.

1) Trois composants en série :



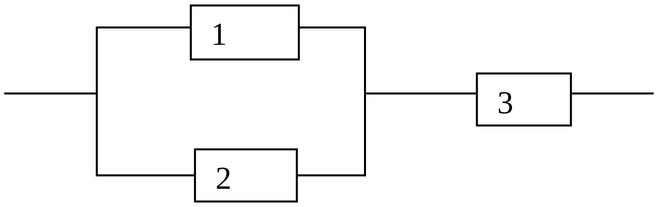
P(panne) = P(1 en panne **ou** 2 en panne **ou** 3 en panne) = $P(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$
$= P(P_1 \cup P_2) + P(P_3) - P((P_1 \cup P_2) \cap P_3)$
$= p_1 + p_2 - p_1 p_2 + p_3 - P(P_1 \cup P_2) \times P(P_3)$ car il y a indépendance des pannes 1, 2, 3
$= p_1 + p_2 - p_1 p_2 + p_3 - (p_1 + p_2 - p_1 p_2) p_3$
$= p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$

2) Trois composants en parallèle :



P(panne) = P(1 en panne **et** 2 en panne **et** 3 en panne)
$= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = p_1 p_2 p_3$. (car indépendance).

3) Deux en parallèle et un en série :



P(panne) = P(1 et 2 en panne ou 3 en panne)
$= P((P_1 \cap P_2) \cup P_3)$
$= p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3$

4) <u>Cas numéro 1</u> : (série)

$$P_{panne}(P_1) = \frac{P(P_1 \cap (P_1 \cup P_2 \cup P_3))}{P(panne)} = \frac{P(P_1)}{P(panne)} \text{ car } P_1 \cap (P_1 \cup P_2 \cup P_3) = P_1$$

$$= \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3}$$

<u>Cas numéro 2</u> : (parallèle)

$$P_{panne}(P_1) = \frac{P(P_1 \cap (P_1 \cap P_2 \cap P_3))}{P(panne)} = \frac{P(P_1 \cap P_2 \cap P_3)}{P(panne)} = 1$$

(le composant 1 est obligatoirement en panne si le circuit est en panne)

<u>Cas numéro 3</u> : (deux en parallèle et un en série)

$$P_{panne}(P_1) = \frac{P(P_1 \cap ((P_1 \cap P_2) \cup P_3))}{P(panne)} = \frac{P((P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap P_3))}{P(panne)} = \frac{p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3}{p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3}$$

<u>Exercice 27</u> :

1. On trouve $E(X) = 320 \times 0{,}06 + ... + 380 \times 0{,}06 \approx 350{,}10$
   $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 249$ soit $\sigma(X) = \sqrt{249} \approx 15{,}78$.
2. a) Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}06$ probabilité d'obtenir une pièce de 320 g. En effet Y compte le nombre de pièces de 320 g. dans une répétition de 10 expériences identiques et indépendantes. On obtient $E(Y) = n \times p = 0{,}6$ et $V(Y) = npq \approx 0{,}75$.
   b) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}94^{10} \approx 0{,}46$.
   c) Y suit cette fois une loi binomiale $B(n, 0{,}06)$. On cherche à déterminer n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0{,}90$.

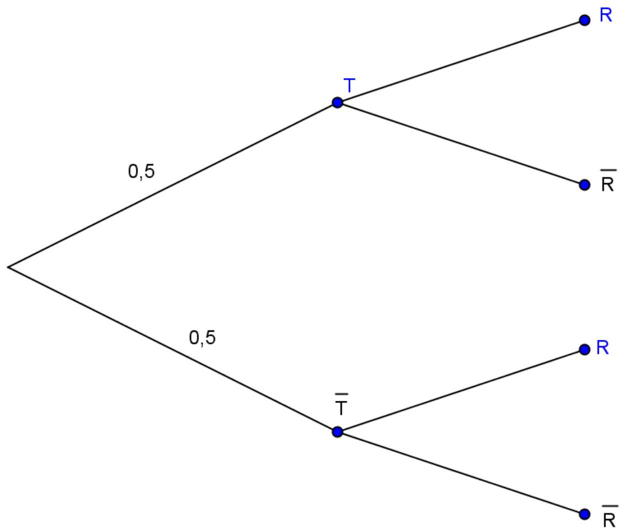
$P(Y \geq 1) \geq 0{,}90 \Leftrightarrow 1 - 0{,}94^n \geq 0{,}90 \Leftrightarrow 0{,}94^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \ln 0{,}94 \leq \ln 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}94} \approx 37{,}21$ (en effet ln 0,94 est négatif)

Il faut donc effectuer au minimum 38 tirages.

<u>Exercice 29</u>

Soient les événements suivants :
R : « sur 6 lancers on obtient 4 piles et 2 faces »
T : « la pièce est truquée ».
On pose X la variable aléatoire comptant le nombre de piles parmi les 6 lancers.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et avec p probabilité d'obtenir pile : p dépend de la pièce choisie : $p = 0{,}5$ si c'est la pièce non truquée et $p = \dfrac{3}{4}$ si c'est la pièce truquée.

On construit un arbre pondéré commençant par T et $\overline{T}$, puis finissant par R et $\overline{R}$.



Probabilités de l'arbre :

P(T) = 0,5 et P($\overline{\text{T}}$) = 0,5

Pièce non truquée :

$$P_{\overline{T}}(R) = P(X = 4) = \binom{6}{4} 0{,}5^4 0{,}5^2$$

$$= 15 \times 0{,}5^6 = \frac{15}{64}$$

Pièce truquée :

$$P_T(R) = P(X = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 15 \times \frac{3^4}{4^6} = \frac{1215}{4096}$$

On cherche à calculer $P_R(T)$: grâce à la formule de Bayes :

$$P_R(T) = \frac{P_T(R)P(T)}{P_T(R)P(T) + P_{\overline{T}}(R)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1215}{4096} \times 0{,}5}{\frac{15}{64} \times 0{,}5 + \frac{1215}{4096} \times 0{,}5} = \frac{81}{145} \approx 0{,}56.$$

Soit un peu plus d'une chance sur 2

<u>Exercice 30</u> :

1. Cette probabilité est P = p(A ∪ B) = p(A) + p(B) (car A et B sont incompatibles) = 0,15.
2. X suit une loi géométrique de paramètre p = 0,15. En effet X donne le rang de l'année où l'animal est malade pour la première fois.
   $P(X = 5) = (1 - p)^4 \times p = 0{,}85^4 \times 0{,}15 \approx 0{,}078.$
   $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \times p = 0{,}85^{n-1} \times 0{,}15.$
3. Soit Y le nombre de fois où l'animal est malade, au cours de *n* années. Y compte le nombre de succès si le succès considéré est « avoir été malade ». Donc Y suit une loi binomiale de paramètres *n* et p = 0,15 probabilité d'être malade. En effet, les années sont supposées indépendantes.
   On cherche *n* pour que $P(Y \geq 1) \geq 0{,}90 \Leftrightarrow 1 - 0{,}85^n \geq 0{,}90 \Leftrightarrow 0{,}85^n \leq 0{,}1$
   $\Leftrightarrow n \ln 0{,}85 \leq \ln 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}85}{\ln 0{,}1} \approx 14{,}16.$

Au bout de 15 ans, l'animal a plus de 90% de chances d'avoir déjà été malade.