CHAPITRE 2

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

Dans cette partie, (Ω, P) est un espace probabilisé.

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1 ***(Ensemble discret)*** *Un ensemble E est dit* ***discret*** *si il est possible de décrire tous ses éléments en les indexant (c'est-à-dire en les numérotant). En général, l'ensemble sera soit fini, soit l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.*

Définition 1.2 ***(Variables aléatoires discrètes)*** *Soit $E = \{x_1; x_2; x_3; ...\}$ un ensemble discret. Une* ***variable aléatoire discrète*** *est une fonction X qui à tout événement élémentaire de Ω associe un élément de E. (on notera v.a. pour variable aléatoire).*

La loi de probabilité de X est donnée par les réels $p_n = P(X = x_n) = P(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x_n\})$

Exemple 1.3 *Si on lance un dé, on peut donner à une variable aléatoire X la valeur des points obtenus sur la face supérieure et dans ce cas l'équiprobabilité fournit la loi de probabilité de X , qu'on présente dans un tableau :*

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Comme toutes les probabilités sont égales, on appelle cette loi la ***loi uniforme discrète****.*
On peut aussi, si on lance deux dés, associer au couple (i, j) de points obtenus la variable S égale à la somme $i + j$.

Définition 1.4 *Soient $E_1, E_2, ..., E_n$ des ensembles discrets ; $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) et à valeurs respectives dans $E_1, E_2, ..., E_n$.*
Les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont dites indépendantes si pour tout x_1 de E_1, ... ,x_2 de E_2, ... , x_n de E_n, les événements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}, ..., \{X = x_n\}$ sont indépendants.

1.2 Fonction de répartition

Définition 1.5 ***(Fonction de répartition)***
Soit X variable aléatoire à valeurs dans E discret. La ***fonction de répartition*** *de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$.*

Propriété 1.6 *Soit F la fonction de répartition de X v.a. discrète à valeurs dans $\{x_1; x_2; x_3; ...\}$.*

1. *F est croissante sur $\mathbb{R}$*
2. *$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$*
3. *F admet un saut de discontinuité en chacun des x_n et ce saut est égal à p_n où $p_n = \; P(X = x_n)$*

Exemple 1.7 *Soit la loi de probabilité suivante :*

valeurs x_i	2	5	6	8	10	12
probabilités $P(X = x_i)$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,15	0,1

On obtient la fonction de répartition suivante :

- *si* $x < 2$ *alors* $F(x) = 0$
- *si* $2 \leqslant x < 5$ *alors* $F(x) = 0,05$
- *si* $5 \leqslant x < 6$ *alors* $F(x) = 0,15$
- *si* $6 \leqslant x < 8$ *alors* $F(x) = 0,35$
- *si* $8 \leqslant x < 10$ *alors* $F(x) = 0,75$

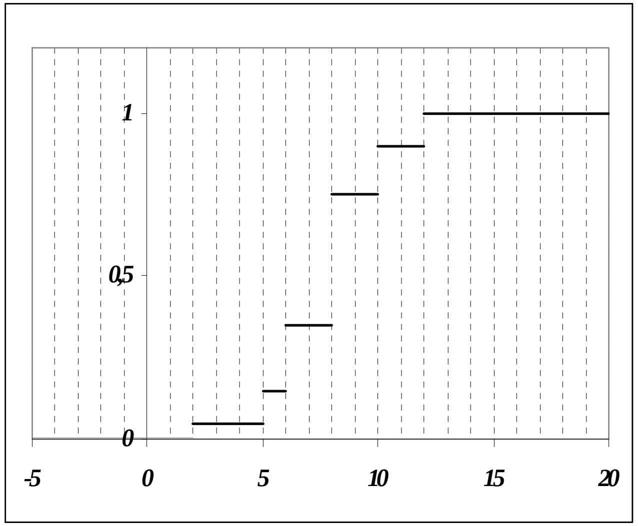

FIG. 1 – Fonction de répartition

- *si* $10 \leqslant x < 12$ *alors* $F(x) = 0,9$
- *si* $12 \leqslant x$ *alors* $F(x) = 1$

Représentation graphique : voir figure 1

1.3 Espérance et variance

Définition 1.8 *Soit X une variable aléatoire finie, c'est-à-dire prenant un nombre fini* $x_1, x_2, ..., x_n$ *de valeurs, et de loi de probabilité*

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

1. *l'**espérance** de X, notée E(X), est définie par :*

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

2. *la **variance** de X, notée V(X), est définie par :*

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

3. *l'**écart-type** de X, noté* $\sigma(X)$*, est défini par*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque 1.9 *On peut montrer que*

$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right) - [E(X)]^2$$

qui est une formule plus pratique pour le calcul.

Remarque 1.10
- *L'espérance s'interprète comme ce qu'on peut espérer obtenir en moyenne si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. Elle est à rapprocher de à la moyenne en statistiques. Par exemple, pour un jeu d'argent, une espérance positive caractérisera un jeu favorable aux joueurs, une espérance négative un jeu défavorable, une espérance nulle un jeu équitable.*
- *l'écart type est une quantité réelle positive, utilisée pour caractériser la répartition d'une variable aléatoire autour de sa moyenne.*

1.4 Exercices

Exercice 1 *Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus avec le dé dans la situation de l'exercice 5 page 4 du chapitre 1 et Y la variable aléatoire donnant le nombre de Pile obtenus dans l'exercice 8 page 4.*

1. *Donner les lois de chacune de ces variables aléatoires.*
2. *Représenter leur fonction de répartition sur deux graphiques différents.*
3. *Calculer l'espérance et la variance des variables X et Y.*

2 Quelques lois de probabilité rencontrées fréquemment

2.1 La loi binomiale

Définition 2.1 *Soit un entier $n \geq 0$ et p un entier de $\{0, 1, 2, ..., n\}$. Le nombre de façons de choisir p éléments dans un ensemble à n éléments est appelé $\binom{n}{p}$ (lire « p parmi n »). C'est le nombre de parties à p éléments qu'on peut extraire de cet ensemble.*

Propriété 2.2 $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarque 2.3 *A la calculatrice (modèles les plus courants) : il faut taper $n\,nCr\,p$:*
- *Casio :* $\boxed{OPTN}$ *PROB nCr*
- *Texas Instruments :* $\boxed{MATH}$ *Prob nCr.*

Exemple 2.4 *Si $E = \{a, b, c, d\}$, les parties à trois éléments que l'on peut extraire de E sont $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ et $\{b, c, d\}$. Il y en a 4 et on vérifie que* $\binom{n}{p} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$

Définition 2.5 ***(Epreuve de*** BERNOULLI*) Soit $p \in [0, 1]$. Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire présentant deux issues : l'une S appelée « succès »de probabilité p, l'autre $\overline{S}$ appelée « échec »de probabilité $q = 1 - p$.*

Définition 2.6 ***(Variable aléatoire de loi binomiale)***
On répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli. La loi de probabilité de la variable X qui compte le nombre de succès au cours de ces n expériences s'appelle la ***loi binomiale de paramètres n et p****, notée $B(n, p)$.*
On note $X \rightsquigarrow B(n, p)$. ($X$ suit la loi binomiale de paramètres n et p).

Propriété 2.7 *Si $X \rightsquigarrow B(n, p)$, alors pour tout k appartenant à $\{0, 1, 2, ..., n\}$,*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

C'est la probabilité d'obtenir k succès parmi les n expériences réalisées.

En effet, il s'agit de répartir k succès parmi n expériences, et on a $\binom{n}{k}$ façons de faire cela. On multiplie ensuite k fois par elle-même la probabilité p et $(n-k)$ fois par elle-même la probabilité q, puisque les expériences successives sont indépendantes.

Exemple 2.8 *Supposons qu'une entreprise dispose de 10 serveurs et que la probabilité de panne de chacun des serveurs durant une période donnée soit 0,01. Sous l'hypothèse d'indépendance des serveurs, la probabilité qu'un serveur parmi les 10 soit en panne est* $\binom{10}{1} 0,01^1 \times 0,99^9 \approx 0,090.$

La probabilité que deux serveurs parmi les 10 tombent en panne est $\binom{10}{2} 0,01^2 \times 0,99^8 \approx 0,004$ *à 10^{-3} près.*

La probabilité qu'aucun serveur ne tombe en panne est $\binom{10}{0} 0,01^0 \times 0,99^{10} = 0,99^{10} \approx 0,904.$

Propriété 2.9 ***(espérance et variance d'une variable aléatoire de loi binomiale)*** *Si X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre n et p (n entier naturel non nul et $p \in [0; 1]$) alors :*

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = npq = np(1-p)$$

Remarque 2.10 *Intuitivement, si on lance 60 fois un dé, on espère obtenir environ 10* SIX *puisqu'on a 1 chance sur 6 d'obtenir un* SIX*. Cela correspond bien à la formule de E(X) pour la loi binomiale.*

2.2 Exercices

Exercice 2 *Dans une urne, il y a 3 boules rouges et 7 boules noires. On choisit au hasard et successivement huit boules dans cette urne, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Si on suppose l'indépendance des tirages, quelle est la probabilité d'obtenir cinq boules rouges ?*

Exercice 3 *On lance deux dés équilibrés 10 fois de suite, les lancers étant indépendants les uns des autres. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de double* SIX *parmi les 10 lancers.*

1. *Préciser la loi de probabilité suivie par X.*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois un double* SIX *?*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un double* SIX *?*

2.3 La loi géométrique

Définition 2.11 ***(Variable aléatoire de loi géométrique)*** *Soit* $p \in [0,1]$. *On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p et celle d'échec* $q = 1 - p$.
On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu'au premier succès. On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès. Les valeurs de X sont les entiers naturels non nuls 1, 2,... On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p. On note $X \rightsquigarrow G(p)$.

La probabilité que le premier succès soit obtenu au rang n est alors :

$$P(X = n) = pq^{n-1} = p(1-p)^{n-1}$$

En effet, pour que le rang soit égal à n, il faut $n-1$ échecs suivis d'un succès.

Remarque 2.12 *La suite* $(p(1-p)^{k-1})_{k\geq 1}$ *est géométrique de premier terme p et de raison* $1 - p$.

Exemple 2.13 *Une machine de casino est réglée pour que le joueur ait une probabilité de gain de 0,4 à chaque partie. Si un joueur s'installe à cette machine, la probabilité de gagner pour la première fois à la troisième partie est* $0,4 \times 0,6^2 = 0,144$.

Propriété 2.14 *Malheureusement, la définition de l'espérance et de la variance ne s'applique qu'aux variables aléatoires ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. En effet, considérons une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre 0,5. La formule donnant l'espérance s'écrirait alors :* $0,5 \times 1 + 0,25 \times 2 + 0,125 \times 3 + 0,0625 \times 4 + ...$ *et cette somme infinie n'a a priori aucun sens.*

Toutefois, à l'aide de la théorie des séries numériques, il est possible de donner un sens à ce calcul :

Si $X \rightsquigarrow G(p)$, *alors* $E(X) = \dfrac{1}{p}$ *et* $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Exemple 2.15 *Si nous revenons à l'exemple de la machine de casino réglée pour que le joueur ait une probabilité de gain de 0,4 à chaque partie, l'espérance vaut* $\dfrac{1}{0,4} = 2,5$ *à 0,1 près, ce qui signifie que sur un grand nombre de joueurs il faut en moyenne 2,5 parties pour gagner.*

2.4 Exercices

Exercice 4 *Une machine produit des composants électroniques. On suppose l'indépendance entre la production de ces composants et que la probabilité de fabrication d'un composant défectueux est 0,01. Déterminer la probabilité qu'un technicien constate que le premier composant défectueux est le cinquième fabriqué.*

Exercice 5 *Un sac contient 36 boules indiscernables au toucher avec équiprobabilité de tirage : 2 blanches, 2 rouges, les autres étant vertes. On tire successivement cinq fois de suite une boule dans le sac, avec remise à chaque fois et on suppose l'indépendance des tirages.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir une rouge au premier tirage ? Au troisième tirage ?*
2. *Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de boules rouges obtenues après ces cinq tirages.*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir exactement cinq boules rouges ?*
4. *Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule rouge ?*
5. *Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges ?*
6. *Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule rouge au quatrième tirage ?*

Exercice 6 *Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (QCM) est utilisé. On s'intéresse à cinq questions de ce QCM, supposées indépendantes. A chaque question sont associées quatre affirmations numérotées 1, 2, 3, 4 et dont une seule est exacte. Le candidat doit cocher l'un de ces numéros. Sa réponse est correcte s'il a coché le bon numéro. Enfin, un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations sont équiprobables.*

1. *X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses parmi les cinq questions proposées.*

   (a) *Donner la loi de probabilité suivie par X.*

(b) *Déterminer l'espérance de X.*

2. *On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note -1 à toute réponse incorrecte. On appelle Y la variable aléatoire égale à la note du candidat sur 20.*

    (a) *Déterminer la loi de probabilité suivie par Y.*

    (b) *En déduire la probabilité que la note supérieure ou égale à 10.*

    (c) *Calculer l'espérance de Y.*

2.5 La loi de Poisson

Contexte : la loi de Poisson de paramètre λ, ou loi des événements rares, correspond au modèle suivant : Sur une période T, un événement arrive en moyenne λ fois. On appelle X la variable aléatoire déterminant le nombre de fois où l'événement se produit dans la période T. X prend des valeurs entières : $0, 1, 2, ...$

Définition 2.16 *Soit $\lambda > 0$ un réel. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\wp(\lambda)$, si :*
- *X est à valeurs dans $\mathbb{N}$*
- *pour tout entier k,*

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriété 2.17 *Si $X \rightsquigarrow \wp(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$*

Exercice 7 *On suppose $X \rightsquigarrow \wp(0,5)$, déterminer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ puis $P(X \leq 2)$ et $P(X > 3)$.*