EXERCICES DE PROBABILITE

1 Chapitre 1

1.1 Evénements

Exercice 1 *Un sac contient des jetons verts, rouges et jaunes en grande quantité. On prend trois jetons au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :*

A : « les trois jetons sont de même couleur »
B : « l'un des jetons est vert »
C : « il y a deux jetons rouges parmi les trois jetons tirés »
D : « les jetons sont de trois couleurs différentes. »

1. *Déterminer les événements suivants :* $A \cap B$, $B \cap C$, $\overline{B} \cap A$ *et* $A \cup D$.
2. *Les événements A et D sont-ils contraires ? Sont-ils incompatibles ?*

Exercice 2 *Un jeu de cubes comporte des cubes bleus, noirs et rouges. On prend au hasard trois cubes et on considère les événements suivants :*

A : « il y a un seul cube bleu »B : « il y a au moins un cube rouge »C : « les cubes sont de deux couleurs »D : « les cubes sont de même couleur »

1. *Déterminer les événements suivants :* $A \cap B$; $B \cap D$; $\overline{B} \cap C$; $D \cup C$.
2. *L'événement contraire de D est-il :*
   D_1 *: « les trois cubes sont de couleur différente » ?*
   D_2 *: « il y a deux cubes de même couleur » ?*
   D_3 *: « il y a au plus deux cubes de même couleur » ?*

1.2 Probabilités simples

Exercice 3 *100 personnes sont interrogées sur l'utilisation de deux produits A et B. 45 utilisent A, 50 utilisent B et 20 n'utilisent ni A ni B. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle utilise :*

1. *A et B*
2. *Au moins l'un des deux produits*
3. *A seulement*
4. *Un seul des deux produits*

(on pourra s'aider d'un schéma des ensembles)

Exercice 4 *On tire au hasard une carte parmi un jeu de 52. Calculer la probabilité d'obtenir :*

1. *Un roi*
2. *Le valet de trèfle*
3. *L'As de coeur ou la dame de pique*
4. *Un carreau*
5. *Un trèfle ou un coeur ou un pique*
6. *Ni 3 ni pique*

Exercice 5 *On donne des événements A et B tels que P(A) = 0,8 et P(B) = 0,3. Les événements A et B peuvent-ils être disjoints ?*

Exercice 6 *Dans un atelier, deux machines* M_1 *et* M_2 *produisent des pièces de même type. La machine* M_1 *fournit les* $\frac{4}{5}$ *de la production, et la machine* M_2 *le reste. Parmi ces pièces, certaines sont défectueuses : c'est le cas pour* 5% *des pièces produites par* M_1 *et* 4% *des pièces produites par* M_2.

1. *Compléter le tableau suivant qui décrit la production journalière :*

	Nombre de pièces produites par M_1	*Nombre de pièces produites par* M_2	*Total*
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			

2. *Un jour donné, on tire au hasard une pièce parmi la production des deux machines. On considère les événements suivants :*
   A : « la pièce choisie est produite par M1 »
   B : « la pièce choisie est produite par M2 »
   C : « la pièce choisie est défectueuse »
   Déterminer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(\overline{C})$, $P(A \cap C)$ *et* $P(A \cup C)$.

1.3 Probabilités conditionnelles

Exercice 7 *Soient A et B deux événements tels que* $P(A) = 0,2$ *;* $P(B) = 0,3$ *et* $P(A \cup B) = 0,4$. *Calculer* $P_B(A)$ *et* $P_A(B)$.

Exercice 8 *Soient A et B deux événements tels que* $P_B(A) = \frac{1}{2}$ *;* $P_A(B) = \frac{2}{3}$ *et* $P(A \cup B) = 0,2$. *Calculer* $P(A)$ *et* $P(B)$.

Exercice 9 *(arbre pondéré) On donne* $P(A) = 0,42$ *;* $P(B) = 0,8$ *et* $P_B(A) = 0,3$. *Représenter un arbre pondéré comportant* B, $\overline{B}$, A, $\overline{A}$ *et les probabilités données.*

Calculer $P(A \cap B)$ *puis compléter les probabilités manquantes de l'arbre.*

Exercice 10 *(Les résultats numériques seront arrondis au millième le plus proche) Dans une région d'un pays en voie de développement,* 15% *de la population est atteinte par un certain virus. On met en place un test de dépistage. On tire au hasard un individu dans la région, tous les individus ayant la même probabilité d'être choisis. On note :*

A l'événement : « l'individu est sain »
B l'événement : « l'individu est contaminé »
C l'événement : « l'individu a un test négatif »
D l'événement : « l'individu a un test positif »
La probabilité qu'un test soit positif sachant que le sujet est sain est 0,004.
La probabilité qu'un test soit négatif sachant que le sujet est contaminé est 0,024.

1. *Déduire de l'énoncé* $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ *et* $P_B(C)$.
2. *Calculer la probabilité que le test soit positif et l'individu sain.*
3. *Calculer la probabilité que le test soit négatif et l'individu contaminé.*
4. *En déduire la probabilité que le résultat du test soit erroné.*

Exercice 11 *Une usine produit chaque jour 2000 pièces du même modèle. Chacune des pièces peut présenter un défaut d'épaisseur noté e, un défaut de longueur noté h ou les deux défauts.* 6% *des pièces présentent le défaut e,* 5% *présentent le défaut h, et parmi les pièces présentant le défaut e,* 25% *ont aussi le défaut h.*

On tire au hasard une pièce dans la production journalière. Calculer la probabilité des événements suivants :

E_1 *: « la pièce choisie présente les deux défauts »*E_2 *: « la pièce présente uniquement le défaut h »*E_3 *: « la pièce présente uniquement le défaut e »*E_4 *: « la pièce présente au moins un défaut »*E_5 *: « la pièce présente un seul défaut ».*

Exercice 12 *Pour entrer sur une section de route on jette une pièce de 2€ dans un panier. On estime que :*

- $\frac{1}{20}$ *des pièces de 2€ jetées dans le panier ont été mises en circulation par des faussaires.*
- *les autres pièces de 2€ jetées dans le panier ont été frappées par la Banque de France.*

Soit A l'événement « la pièce de 2€ jetée dans le panier est acceptée par l'appareil »

Soit B l'événement « la pièce de 2€ jetée dans le panier a été frappée par la Banque de France »et $\overline{B}$ *l'événement contraire.*

Dans la suite, on suppose que la probabilité de l'événement « A sachant que B est réalisé »est 0,98 et que la probabilité de l'événement « A sachant que $\overline{B}$ *est réalisé »est de 0,04. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.*

1. *Calculer la probabilité de l'événement A.*
2. *Calculer la probabilité qu'une pièce de 2€ jetée dans le panier ait été frappée par la Banque de France et soit refusée par l'appareil.*
3. *Calculer la probabilité qu'une pièce de deux euros jetés dans le panier ait été mise en circulation par des faussaires et soit acceptée par l'appareil.*

1.4 Formule de Bayes

Exercice 13 *Je dispose de deux pièces, une équilibrée et l'autre, truquée qui donne « pile »dans* 75% *des cas. Je choisis une des deux pièces au hasard, et en la lançant, j'obtiens « pile ». Quelle est la probabilité que la pièce que j'ai lancée soit la pièce truquée ?*

Exercice 14 *Deux usines A et B fabriquent des calculatrices. L'usine A fabrique deux fois plus de calculatrices que l'usine B. Les calculatrices provenant de l'usine A ont dans* 5% *des cas un défaut, alors que celles provenant de l'usine B ont dans* 2% *des cas un défaut. Je viens d'acheter une calculatrice, laquelle se révèle être défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?*

1.5 Indépendance

Exercice 15 *Un joueur utilise un dé truqué à six faces. La probabilité de voir apparaître chacun des six numéros est donnée par le tableau suivant :*

Numéro	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Probabilité	*0,4*	*0,15*	*0,15*	*0,05*	*a*	*b*

1. *Calculer a et b sachant que l'apparition du numéro 5 est quatre fois plus probable que celle du 6.*
2. *Le joueur lance le dé.*
   (a) *Quelle est la probabilité de voir apparaître un numéro pair ? un numéro impair ?*
   (b) *Quelle est la probabilité que ce soit le numéro 1, sachant que c'est un numéro impair ? On donnera une valeur approchée arrondis à* 10^{-2}
   (c) *On considère les événements suivants :*
   A : « voir apparaître un numéro pair »
   B : « voir apparaître un multiple de 3 »
   C : « voir apparaître un nombre inférieur ou égal à 3 »
   A est-il indépendant de B ? A est-il indépendant de C ?

Exercice 16 *On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte tirée est rouge », B : « la carte tirée est un Coeur »et C : « la carte tirée est un Roi ».*

1. *Etudier l'indépendance des événements A et B, A et C puis B et C.*
2. *On effectue 5 tirages successifs avec remise entre chaque tirage. Quelle est la probabilité de tirer 5 cartes rouges ?*

Exercice 17 *Un circuit électrique est formé de 3 composants, qui ont chacun pour probabilités d'être en panne* p_1, p_2 *et* p_3, *avec la propriété que les pannes des différents composants sont indépendantes. Calculer la probabilité que le circuit soit en panne dans chacun des cas suivants :*

1. *Les 3 composants sont montés en série.*
2. *Les trois composants sont montés en parallèle.*
3. *Deux sont en parallèle, et le troisième en série avec ce groupe de deux.*
4. *Dans chacun des cas précédents, calculer la probabilité que le composant 1 soit en panne sachant que le circuit ne fonctionne pas.*

1.6 Bilan

Exercice 18 *Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants. On note* p_n *la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des* $n-1$ *premiers tirages et une boule blanche lors du* $n^{\text{ième}}$ *tirage.*

1. *Calculer les probabilités* p_2, p_3 *et* p_4.
2. *On considère les événements suivants :*
   Bn : « On tire une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ *tirage »*
   Un : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ *premiers tirages »*
   (a) *Calculer la probabilité de l'événement Bn .*
   (b) *Exprimer la probabilité de l'événement Un en fonction de n.*
   (c) *En déduire l'expression de* p_n *en fonction de n et vérifier l'égalité :*

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2 Chapitre 2

2.1 Variables aléatoires

Exercice 19 *Une entreprise commercialise 7 variétés d'un même article. Le profit pour chaque variété est le suivant :*
variétés 1et 6 : 4 € variétés 2, 4 et 5 : 8 € variété 3 : 9€ variété 7 : 10 €
On suppose qu'il y a équiprobabilité de la demande d'une variété quelconque de cet article. Soit X la variable aléatoire qui associe à tout article choisi au hasard, le profit.

1. *Déterminer l'univers des possibles puis la loi de probabilité de X*
2. *Calculer E(X). Que représente cette valeur ?*

Exercice 20 *Une urne contient 16 boules : 8 boules blanches, 5 noires et 3 rouges. On tire simultanément 3 boules dans l'urne. On suppose l'équiprobabilité des tirages.*

1. *Montrer que le nombre de tirages possibles est de 560.*
2. *On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe :*
   - *1 si les 3 boules sont de couleur différente*
   - *-1 dans les autres cas*

   (a) *Montrer que* $P(X = 1) = \dfrac{3}{14}$

(b) *Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.*

Exercice 21 *Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte 6 portes de sortie, numérotées de 1 à 6.*

Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le numéro de la porte de sortie franchie.

Sa loi de probabilité est définie par le tableau suivant

Numéro	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 2 € ; il reçoit 12 € si la bille franchit les portes 1 ou 6, 2 € si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.

Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise. Le gain peut donc être éventuellement un nombre négatif ou nul.

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque partie effectuée par un joueur donné associe le gain.

1. *Quelles sont les valeurs possibles de Y ?*
2. *Déterminer la loi de probabilité de Y.*
3. *Un jeu est équitable si l'espérance mathématique du gain est nulle. Le jeu est-il équitable ?*

2.2 Combinaisons et permutations

Exercice 22 1. *Calculer à la main puis à la calculatrice les nombres suivants :*

$$\frac{23!}{21!} \qquad \frac{25!}{20!5!} \qquad \frac{12!}{10!4!}$$

2. *Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $2\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = 9n$.*

Exercice 23 *On tire au hasard et simultanément cinq cartes parmi un jeu de 52. Calculer la probabilité d'obtenir un full au roi par les valets (trois rois et deux valets).*

2.3 Loi binomiale

Exercice 24 *On suppose que X suite la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 110)$.*

1. *Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 10)$, $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 4)$.*
2. *Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.*

Exercice 25 *On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{1}{100})$.*

1. *Déterminer n pour que $P(X = 0) \leq 0,02$.*
2. *Déterminer n pour que $P(X \geq 1) \leq 0,90$.*

Exercice 26 *Une machine produit des pièces dont 5% sont défectueuses. Soit X la v.a. associant à chaque échantillon de 30 pièces le nombre de pièces défectueuses de cet échantillon. (l'échantillon est constitué à l'aide d'un tirage assimilé à un tirage avec remise)*

1. *Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Expliquer pourquoi.*
2. *Calculer la probabilité que l'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse.*
3. *Calculer la probabilité que toutes les pièces de l'échantillon soient défectueuses.*
4. *Calculer la probabilité que l'échantillon comporte au plus deux pièces défectueuses.*

Exercice 27 *Soit X la variable aléatoire associant, à une pièce choisie au hasard dans la production, son poids. On suppose que X est une variable aléatoire discrète de loi :*

Poids	320	330	340	350	360	370	380
Probabilité	0,06	0,12	0,20	0,25	0,17	0,14	0,06

1. *Calculer, à 10^{-2} près, l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la v.a. X.*
2. *On prélève au hasard et avec remise, 10 pièces dans la production. Soit Y la v.a. qui à chaque prélèvement ainsi effectué, associe le nombre de pièces de 320 g.*
   (a) *Déterminer la loi de Y ainsi que les caractéristiques $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.*
   (b) *Calculer la probabilité qu'au moins une pièce ait un poids de 320 g.*
   (c) *Quelle est la valeur minimale du nombre de pièces à prélever dans la production pour que la probabilité d'obtenir au moins une pièce de 320 g soit supérieure à 0,90 ?*

Exercice 28 *Quatre amis décident de jouer avec un jeu de 32 cartes auxquelles ils attribuent des points : 4 points pour chacun des quatre As ; 3 points pour chacun des quatre rois ; 2 points pour chacune des quatre dames ; 1 Point pour chacun des quatre valets ; Aucun point pour chacune des 16 autres cartes.*

Une partie consiste à tirer simultanément trois cartes du jeu et à relever le total des points qui leurs sont attribués. On dit que le joueur ne marque pas lorsque le total relevé est nul. On dit que le joueur marque dans tous les autres cas. On admet que, lors de chaque partie, tous les tirages de trois cartes sont équiprobables.

1. *Un joueur fait une partie. On considère les événements suivants :*
   A : « le joueur ne marque pas »
   B : « le joueur marque »
   C : « le joueur marque avec un total de 9 points. »

   (a) *Montrer que la probabilité de l'événement A est* $\frac{7}{62}$.

   (b) *Calculer la probabilité des événements B et C. (Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.)*
2. *Les quatre amis jouent successivement chacun une partie On admet que les résultats des quatre parties sont indépendants. Calculer la probabilité que l'un au moins des quatre amis marque. Donner une approximation décimale du résultat à* 10^{-4} *près par défaut.*

Exercice 29 *Je dispose de deux pièces, une équilibrée et l'autre, truquée qui donne « pile »dans* 75% *des cas. Je choisis une des deux pièces au hasard, et en la lançant 6 fois, j'obtiens 4 fois « pile ». Quelle est la probabilité que la pièce que j'ai lancée soit la pièce truquée ?*

2.4 Loi géométrique

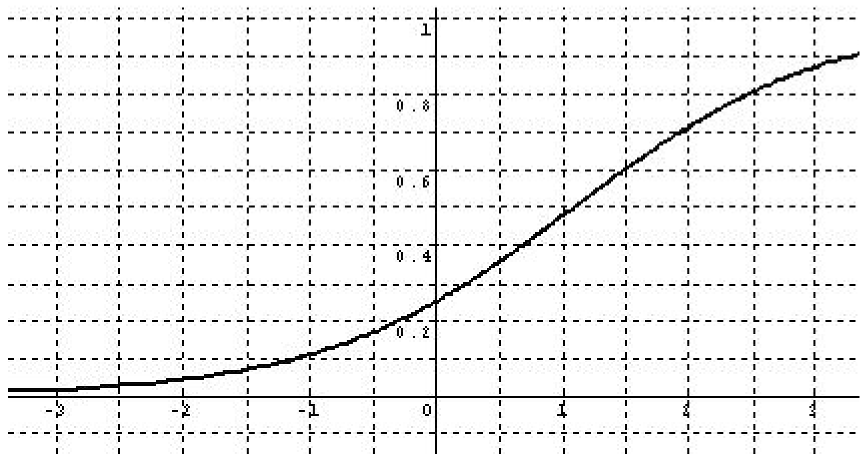
Exercice 30 *Un animal peut être atteint de 2 maladies incompatibles A et B. On sait que la probabilité de contracter A au cours d'une année est 0,05 et 0,10 pour B. Les années sont supposées indépendantes.*

1. *Calculer la probabilité qu'un individu soit malade au cours d'une année.*
2. *Quelle est la probabilité pour qu'un individu soit malade pour la première fois au cours de la* $5^{\text{ème}}$ *année ? La* $n^{\text{ième}}$ *année ?*
3. *Calculer le nombre d'années au bout duquel l'individu a au moins* 90% *de chances d'avoir déjà été malade.*

3 Chapitre 3

3.1 Variable aléatoire continue

Exercice 31 *On considère une variable aléatoire continue X et F la fonction de répartition de X. On donne la représentation graphique de F. Déterminer approximativement les probabilités :*
$P(X \leq 1,2)$ $P(X \leq 0)$ $P(X \leq -1)$ $P(X > 1,5)$
$P(X > 0)$ $P(X > -1)$ $P(0 \leq X \leq 1,5)$ $P(-1 \leq X \leq 2,5)$



Exercice 32 *Soit X une variable aléatoire continue positive. Etablir l'inégalité de Markov :*

$$\text{pour tout } r > 0,\ P(X \geq r) \leq \frac{E(X)}{r}$$

3.2 Loi exponentielle

Exercice 33 *La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre* λ. *Pour chaque question, choisir parmi les trois réponses proposées.*

1. *Pout* $t \geq 0$, *la valeur exacte de* $P(T \geq t)$ *est :*

$$1 - e^{-\lambda t}\ ;\ e^{-\lambda t} \text{ ou } 1 + e^{-\lambda t}$$

2. *La valeur de t pour laquelle* $P(T \leq t) = P(T \geq t)$ *est :*

$$\frac{\ln(2)}{\lambda} \; ; \; \frac{\lambda}{\ln(2)} \; ou \; \frac{\lambda}{2}$$

3. *D'après une simulation statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est* $0,18$. *La valeur exacte de* λ *est alors :*

$$\ln \frac{50}{41} \; ; \; \ln \frac{41}{50} \; ou \; \frac{\ln 82}{\ln 100}$$

4. *Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est identique à :*

$$P(T \geq 1) \; ; \; P(T \geq 3) \; ou \; P(2 \leq T \leq 3)$$

3.3 Loi de Poisson

Exercice 34 *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda = 5$. *Calculer* $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X < 3)$ *et* $P(2 \leq X \leq 4)$.

Exercice 35 *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda = 5$. *Calculer la plus petite valeur de k vérifiant* $P(X \leq k) \geq 0,90$.

Exercice 36 *Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre* λ. *Déterminer* λ *sachant que* $P(X = 0) = \frac{1}{4}$.

Exercice 37 *Un livre de 300 pages comporte en moyenne 150 « coquilles ». La variable aléatoire qui à une page choisie au hasard associe le nombre de coquilles de cette page, suit une loi de Poisson.*

1. *Déterminer le paramètre de cette loi.*
2. *Calculer la probabilité qu'une page choisie au hasard ne comporte aucune coquille.*

Exercice 38 *Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré qu'il y avait 5% de bons de commande comportant au moins une erreur. On constitue au hasard un échantillon de 100 bons de commande parmi ceux traités un jour donné.*

Le nombre de bons traités dans cette journée est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bons de commande. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 100 bons le nombre de bons erronés. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 5.

1. *Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :*
   E_1 *: « il y a exactement 5 bons erronés parmi les 100 bons »*
   E_2 *: « il y a moins de 5 bons erronés parmi les 100 bons »*
   E_3 *: « il y a au moins 5 bons erronés parmi les 100 bons »*
2. *Déterminer le plus petit entier k tel que la probabilité d'avoir moins de k erreurs soit supérieure à 0,9.*

Exercice 39 *Dans cet exercice, chaque probabilité demandée sera arrondie à* 10^{-2} *près. Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est de 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la v.a. qui à chaque jour tiré au hasard associe le nombre d'employés absents.*

1. *Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.*
2. *Calculer la probabilité des événements suivants :*
   A : « un jour donné il y a exactement trois absents. »
   B : « un jour donné il y a strictement plus de deux absents. »
   C : « un jour donné le nombre d'absents est compris entre 3 et 6, bornes comprises »
3. *Calculer l'espérance mathématique notée* $E(X)$ *de la variable aléatoire X. Que représente* $E(X)$ *?*
4. *On approche la loi binomiale du 1. par une loi de Poisson de paramètre* $\lambda = np$ *où n et p sont les paramètres de cette loi binomiale.*
   (a) *En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des événements A, B et C précédents.*
   (b) *Vérifier que les résultats obtenus diffèrent de moins de 1% des résultats obtenus au 2.*

Exercice 40 *Le nombre d'oeufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *avec* $\lambda > 0$. *Un oeuf a la probabilité p d'arriver à éclosion, avec* $0 < p < 1$. *Quelle est la loi suivie par le nombre de bébés tortues qui naissent à chaque ponte ?*