ALGEBRE DE BOOLE

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1 *Soit B un ensemble contenant au moins deux éléments notés 0 et 1, et muni de trois opérations :*

- *une opération binaire appelée* ***somme****, notée « + »*
- *une opération binaire appelée* ***produit****, notée « . »*
- *une opération unaire appelée* ***complémentation****, notée « $^-$ »*

*On dit que (B , + , . ,$^-$) a une structure d'****algèbre de Boole*** *si elle vérifie les 5 axiomes suivants :*

Axiome 1. ***Commutativité*** *: Les deux opérations binaires sont commutatives :*

$$\forall a, b \in B,\ b + a = a + b \text{ et } b.a = a.b$$

Axiome 2. ***Associativité*** *: Les deux opérations binaires sont associatives*

$$\forall a, b, c \in B,\ (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \text{ et } (a.b).c = a.(b.c) = a.b.c$$

*Axiome 3. 0 est l'****élément neutre*** *pour + et 1 est l'élément neutre pour .*

$$\forall a, b \in B,\ a + 0 = a \text{ et } a.1 = a$$

Axiome 4. ***Distributivité*** *: Chaque opération binaire est distributive par rapport à l'autre :*

$$\forall a, b, c \in B,\ a.(b + c) = (a.b) + (a.c) \text{et } a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$

Axiome 5. Le ***complémentaire*** *d'un élément a vérifie :*

$$\forall a \in B,\ a + \overline{a} = 1 \text{ et } a.\overline{a} = 0$$

Propriété 1.2 ***(Développements et simplifications en algèbre de Boole)*** *Dans la pratique, on effectue les développements comme en algèbre classique (dans $\mathbb{R}$) et on donne la priorité à l'opérateur « produit » (« . »). Les règles de suppression de parenthèses sont les mêmes que celles de l'algèbre classique. Par exemple :*

- $a + (b.c)$ *s'écrira* $a + bc$ *mais on aura toujours* $a + bc = (a + b).(a + c)$
- $(a.b) + (a.\overline{b}.c)$ *s'écrira* $ab + a\overline{b}c$
- $(\overline{a} + \overline{b}).(c + d)$ *s'écrira* $\overline{a}c + \overline{a}d + \overline{b}c + \overline{b}d$

Exemple 1.3 *Soient E un référentiel non vide, et $P(E)$ l'ensemble des parties de E. Si on prend $P(E)$ comme ensemble et que l'on définit les opérations :*

$$A + B = A \cup B$$
$$A.B = A \cap B$$
$$\overline{A} = \text{le complémentaire de } A \text{ dans } E$$

Alors $(P(E), \cup, \cap, ^-)$ est une algèbre de Boole. Quels en sont les éléments neutres ?

1.2 L'algèbre binaire

Définition 1.4 *L'ensemble $\{0; 1\}$ muni des opérations booléennes + et . ainsi définies :*

+	0	1
0	0	1
1	1	1

et

.	0	1
0	0	0
1	0	1

est une algèbre de Boole. De plus $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$.

Les résultats des opérations de base peuvent s'interpréter en termes de logique :

- *somme logique :* $a + b = 1$ *si* $a = 1$ *OU* $b = 1$
- *produit logique :* $a.b = 1$ *si* $a = 1$ *ET* $b = 1$
- *complémentation : NON* $1 = 0$ *et NON* $0 = 1$

Remarque 1.5 *On remplace parfois 1 et 0 par "vrai" ou "faux".*

1.3 Principe de dualité

Définition 1.6 *Dans une algèbre de Boole, tout résultat se présente sous deux formes duales. Soit P un résultat, son dual P^* s'obtient en permutant systématiquement :*

- *les symboles « + »et « . »*
- *les symboles 0 et 1*

Si un résultat P est vrai dans une algèbre de Boole, il en est de même pour son dual.

Par exemple :

Soit P le résultat suivant : $\forall a \in B$, $a + a = a$, qui est la règle d'idempotence.

Son dual P^* est donc : $\forall a \in B$, $a.a = a$.

Exemple 1.7 *Comme $(P(E), \cup, \cap, ^{-})$ est une algèbre de Boole, selon le principe de dualité, $(P(E), \cap, \cup, ^{-})$ est aussi une algèbre de Boole.*

1.4 Règles de calcul dans les algèbres de Boole

Dans cette section, a, b, x, y sont des éléments quelconques de l'algèbre de Boole B.

Théorème 1.8 *(Unicité des complémentaires)*

$$\overline{a} \text{ est l'unique élément de } B \text{ vérifiant : } a + \overline{a} = 1 \text{ et } a.\overline{a} = 0$$

Théorème 1.9 *(Idempotence)*

$$a + a = a \text{ et } a.a = a \text{ par dualité}$$

Théorème 1.10 $\overline{0} = 1$ *et* $\overline{1} = 0$

Théorème 1.11 *(Eléments absorbants)*

$$a + 1 = 1 \text{ et } a.0 = 0$$

Théorème 1.12 *(Involution)*

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Théorème 1.13 *(Absorption)*

$$a + a.b = a$$
$$\text{et } a.(a + b) = a$$

Théorème 1.14 *(Redondance)*

$$a.x + \overline{a}.y = a.x + \overline{a}.y + x.y$$

Théorème 1.15 *(Lois de De Morgan)*

$$\overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}$$
$$\text{et } \overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$$

1.5 Démonstrations

1.5.1 Théorème 1.8

D'après l'axiome 5, pour tout $a \in B$, son complémentaire $\overline{a}$ vérifie $a + \overline{a} = 1$ et $a\overline{a} = 0$.

Il reste à vérifier que est $\overline{a}$ l'unique élément de B vérifiant ces 2 relations.

Supposons donc qu'il existe un autre élément b de B tel que $a + b = 1$ et $a.b = 0$.

On calcule $\overline{a}.(a + b)$ de deux façons différentes : $\overline{a}.(a + b) = \overline{a}.1 = \overline{a}$; ou bien $\overline{a}.(a + b) = \overline{a}.a + \overline{a}.b = 0 + \overline{a}.b = \overline{a}.b$.

D'où $\overline{a}.b = \overline{a}$.

De même on calcule $(a + \overline{a}).b$ de deux façons : $(a + \overline{a}).b = 1.b = b$ et $(a + \overline{a}).b = a.b + \overline{a}.b = 0 + \overline{a}.b = \overline{a}.b$.

D'où $\overline{a}b = b$, mais comme $\overline{a}b = \overline{a}$ on obtient $\overline{a} = b$.

1.5.2 Théorème 1.9

Soit $a \in B$.
$a = 0 + a$
$= a.\overline{a} + a$ (axiomes 3 et 5)
$= (a + a).(\overline{a} + a)$ (axiome 4)
$= (a + a).1$ (axiome 5)
$= a + a$ (axiome 3)

D'où $a = a + a$ et par dualité $a.a = a$.

1.5.3 Théorème 1.10

D'après l'axiome 3, $0+1=1$ et $0.1=0$

Il découle alors du théorème 8 que 1 est le complémentaire unique de 0, soit : $1=\overline{0}$.

1.5.4 Théorème 1.11

Soit $a \in B.a+1 = a+(a+\overline{a})$ (axiome 5) $= a+a+\overline{a} = a+\overline{a}$ (idempotence) $= 1$

Par dualité $a.0 = 0$.

1.5.5 Théorème 1.12

Soit $a \in B$. $\overline{a}$ vérifie $a+\overline{a}=1$ et $a.\overline{a}=0$.

Par commutativité de "+" et "." on obtient $\overline{a}+a=1$ et $\overline{a}.a=0$, donc a est le complémentaire de $\overline{a}$.

Puisque $\overline{\overline{a}}$ est aussi le complémentaire de a, par unicité du complémentaire on obtient $\overline{\overline{a}}=a$.

1.5.6 Théorème 1.13

Pour tout $a, x \in B$, $a+a.x = a.1+a.x = a.(1+x) = a.1$ (*théorème* 9) $= a$

1.5.7 Théorème 1.14

Pour tout $a, x, y \in B$: $a.x+\overline{a}.y$

$= a.x+\overline{a}.y+a.x.y+\overline{a}.x.y$ (redondance)

$= a.x+\overline{a}.y+x.y.(a+\overline{a})$

$= a.x+\overline{a}.y+x.y.1$

$= a.x+\overline{a}.y+x.y.$

1.5.8 Théorème 1.15

Pour tout $a, b \in B$:

D'une part : $(\overline{a}.\overline{b}).(a+b) = \overline{a}.\overline{b}.a+\overline{a}.\overline{b}.b = 0.\overline{b}+0.\overline{a} = 0$

D'autre part $\overline{a}.\overline{b}+(a+b) = \overline{a}.\overline{b}+a+a\overline{b}+b$ (*redondance sur a*) $= (\overline{a}+a)\overline{b}+a+b = 1.\overline{b}+a+b = a+b+\overline{b} = a+1 = 1$.

Il s'ensuit que $\overline{a}.\overline{b}$ est le complémentaire de $a+b$, c'est-à-dire $\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$.

Par dualité : $\overline{a.b} = \overline{a}+\overline{b}$.

1.6 Règle sur les égalités

Dans cette section, a, b, c, d sont des éléments quelconques de l'algèbre de Boole B.

1. $a=b \Rightarrow a+c=b+c$
   $a=b \Rightarrow a.c=b.c$
   Remarque : Il n'y a pas de réciproques à ces règles.

2. $\left.\begin{array}{c} a+c=b+c \\ a.c=b.c \end{array}\right\} \Rightarrow a=b$

3. $\left.\begin{array}{c} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a+c=b+d \\ a.c=b.d \end{array}\right.$

4. $a=b \Leftrightarrow \overline{a}=\overline{b}$

5. $a.b=1 \Rightarrow a=1$ et $b=1$
   par dualité $a+b=0 \Rightarrow a=0$ et $b=0$

Remarque 1.16 *$a.b=0$ n'équivaut pas à $a=0$ ou $b=0$. De même, $a+b=1$ n'équivaut pas à $a=1$ ou $b=1$.*

Sauf dans l'algèbre binaire $(\{0;1\},+,.,^{-})$ où les seuls éléments sont 0 et 1.

1.7 Exercices

Exercice 1 *Soit E un référentiel, P(E) l'ensemble des parties de E et $\varkappa(E)$ l'ensemble des fonctions caractéristiques de E. On définit sur $\varkappa(E)$ deux opérations « + »et « . »et une opération «$^{-}$ »de la manière suivante :*

Soient 1_A et 1_B deux éléments de $\varkappa(E)$. On pose $1_A+1_B = 1_{A\cup B}$, $1_A.1_B = 1_{A\cap B}$ et $\overline{1_A} = 1_{\overline{A}}$.

Vérifier que $(\varkappa(E),+,.,^{-})$ est une algèbre de Boole.

Exercice 2 *Soit* $(B, +, ., ^-)$ *une algèbre de Boole et soient* a, b, c, d *des éléments de* B*. Prouver les égalités suivantes et écrire leur duales :*

1. $a + \overline{a.b} = 1$
2. $\overline{ab + \overline{a} + \overline{b}} = 0$
3. $abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} = a$
4. $a + c = a + \overline{a}\overline{b}c(ad + c) + c$
5. $\overline{(a+b)(b+c)} + \overline{(c+d)(d+a)} = \overline{(ac+bd)}$
6. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = ac + bd$

Exercice 3 *Soient* a*,* b*,* c *des éléments d'une algèbre de Boole* $(B, +, ., ^-)$ *et* $e = abc + \overline{bc} + \overline{ab}$

1. *Ecrire* $a.b$ *en n'utilisant que les opérations addition et complémentation*
2. *Ecrire* $a + b$ *en n'utilisant que les opérations produit et complémentation*
3. *Ecrire* e *en n'utilisant que les opérations addition et complémentation*
4. *Ecrire* e *en n'utilisant que les opérations produit et complémentation*

Exercice 4 a, b *étant des éléments d'une algèbre de Boole* $(B, +, ., ^-)$*, prouver les implications suivantes et examiner leur réciproques :*

1. $ab + \overline{c} = 0 \Rightarrow \overline{a}c + \overline{b}c = 1$
2. $a = b + c \Rightarrow \overline{a} = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$
3. $a + b = a + c \Rightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}.\overline{b} = \overline{a}.\overline{c}$

Exercice 5 *Soient* a, b, c *des éléments d'une algèbre de Boole* $(B, +, ., ^-)$*.*

1. *Prouver les équivalences suivantes :*
   - $(ac = bc$ *et* $a\overline{c} = b\overline{c}) \Leftrightarrow a = b$
   - $(a + c = b + c$ *et* $a + \overline{c} = b + \overline{c}) \Leftrightarrow a = b$
2. *On suppose que* $ac = bc$ *et que* $a + \overline{c} = b + \overline{c}$*. Peut on en conclure que* $a = b$ *?*
3. *Montrer la relation* $ab + \overline{a} + \overline{b} = 1$ *(on pourra utiliser la relation duale).*

2 Les fonctions booléennes

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soit* $(B, +, ., ^-)$ *une algèbre de Boole. On appelle fonction booléenne de* n *variables toute combinaison de ces variables au moyen des trois opérations booléennes + , . et* $^-$*.*

Exemple 2.2 $f(a, b, c) = a.\overline{b} + c.(a.\overline{b} + b)$ *est une fonction booléenne des trois variables* a, b, c*.*

Définition 2.3 *Un* ***minterme*** *de* n *variables est un produit de ces* n *variables ou de leurs complémentaires.*

Exemple 2.4 *Soient 4 variables* a, b, c *et* d*, alors* $a.b.\overline{c}.d$ *et* $\overline{a}.b.c.\overline{d}$ *sont des mintermes mais* $a.b.\overline{d}$ *n'en est pas un.*

Définition 2.5 *Un* ***maxterme*** *de* n *variables est une somme de ces* n *variables ou de leurs complémentaires.*

Exemple 2.6 *Soient 4 variables* a, b, c *et* d*, alors* $a + b + \overline{c} + d$ *et* $\overline{a} + b + c + \overline{d}$ *sont des maxtermes mais* $a + c + \overline{d}$ *n'en est pas un.*

2.2 Indexation des mintermes et maxtermes

Pour indexer les mintermes (maxtermes), on utilise la règle suivante :

- pour chaque minterme (maxterme), on construit un code binaire en posant 1 si une variable est présente, 0 si son complémentaire est présent.
- on convertit le code binaire en base décimale pour obtenir l'indice du minterme (maxterme).

Exemple 2.7 *Soit le minterme de 4 variables* $m_i = a.\overline{b}.\overline{c}.d$*, alors le code binaire associé à ce minterme est* (1001) *donc* $i = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$*.*

Remarque 2.8 *Si deux mintermes sont différents alors leur code binaire donc leur indice sera différent.*

Exemple 2.9 *Liste exhaustive pour 3 variables*

mintermes	*maxtermes*	*binaire*	*décimale*
$\bar a\bar b\bar c$	$\bar a+\bar b+\bar c$	*000*	*0*
$\bar a\bar b c$	$\bar a+\bar b+c$	*001*	*1*
$\bar a b\bar c$	$\bar a+b+\bar c$	*010*	*2*
$\bar a bc$	$\bar a+b+c$	*011*	*3*
$a\bar b\bar c$	$a+\bar b+\bar c$	*100*	*4*
$a\bar b c$	$a+\bar b+c$	*101*	*5*
$ab\bar c$	$a+b+\bar c$	*110*	*6*
abc	$a+b+c$	*111*	*7*

2.3 Propriétés des mintermes et maxtermes

Soient n variables booléennes $a_1, a_2, ..., a_n$.

Théorème 2.10 *Il existe 2^n mintermes notés $m_0, m_1, ..., m_{2^n-1}$, et 2^n maxtermes notés $M_0, M_1, ..., M_{2^n-1}$.*

Théorème 2.11 *La somme de tous les mintermes vaut 1, le produit de tous les maxtermes vaut 0.*

Théorème 2.12 *Le produit de deux mintermes distincts est nul. La somme de deux maxtermes distincts vaut 1.*

Exemple 2.13 *pour $n = 3$: $(a\bar b c).(abc) = ab\bar b c$ (redondance de a et c) $= 0$ car* $b\bar b = 0$

2.4 Formes canoniques des fonctions booléennes

Théorème 2.14 *Toute fonction booléenne de n variables s'écrit de manière unique comme somme de mintermes tous distincts. C'est sa **forme canonique disjonctive**.*

Théorème 2.15 *Toute fonction booléenne de n variables s'écrit de manière unique comme produit de maxtermes tous distincts. C'est sa **forme canonique conjonctive.***

Exemple 2.16 *Pour $n = 3$: Si $f(a,b,c) = \overline{(a+\bar b+\bar c)} + \bar a b$:*

$f(a,b,c) = \overline{(a+\bar b+\bar c)} + \bar a b = \bar a bc + \bar a b(\bar c + c) = \bar a bc + \bar a b\bar c + \bar a bc$

Or $\bar a bc + \bar a bc = \bar a bc$, on obtient donc :$f(a,b,c) = \bar a bc + \bar a b\bar c$

C'est la forme canonique disjonctive.

2.5 Passage d'une forme canonique à une autre

Il s'agit connaissant l'une des décompositions canoniques de déterminer l'autre. Pour cela il suffit d'utiliser l'identité $\overline{\overline{f}} = f$ et la propriété suivante :

Propriété 2.17 *Soit f une fonction booléenne écrite sous sa forme canonique disjonctive, alors $\overline{f}$ est la somme des mintermes qui n'apparaissent pas dans l'expression de f.*

En effet, $\overline{f}$ est caractérisé par $f + \overline{f} = 1$ et $f\overline{f} = 0$

Remarque 2.18 *De même $\overline{f}$ est le produit des maxtermes qui n'apparaissent pas dans f.*

Exemple 2.19 *$f(a,b,c) = \bar a\bar b\bar c + a\bar b\bar c + \bar a b\bar c + \bar a\bar b c + \bar a bc$.*

Alors $\overline{f}(a,b,c) = abc + a\bar b c + ab\bar c$.

Et $f(a,b,c) = (\bar a + \bar b + \bar c).(\bar a + b + \bar c).(\bar a + \bar b + c)$.

2.6 Détermination des formes canoniques

On se concentrera sur les formes canoniques disjonctives, le cas conjonctif étant semblable.

Il s'agit dans un premier temps d'utiliser le calcul booléen pour avoir une forme développée, et ensuite dans chaque monôme, de faire apparaître les variables manquantes.

Exemple 2.20 *Pour 3 variables a,b,c on aura : $a\bar b = a\bar b(c+\bar c) = a\bar b c + a\bar b\bar c$.*

Exemple 2.21 *Pour 4 variables a,b,c,d on aura : $a\bar b = a\bar b(c+\bar c) = a\bar b c + a\bar b\bar c = a\bar b c(d+\bar d) + a\bar b\bar c(d+\bar d) = a\bar b cd + a\bar b c\bar d + a\bar b\bar c d + a\bar b\bar c\bar d$*

2.7 Exercices

Exercice 6 *Trouver la forme canonique disjonctive de $f(a,b) = (a+b)\bar a b$ et $f(a,b,c) = \overline{ab\bar c + \bar a b}$.*

Exercice 7 *Soit $(B, +, ., \bar{\ })$ une algèbre de Boole et a,b,c,d des éléments de B. Donner les formes canoniques disjonctives des expressions suivantes :*

1. $f(a,b,c) = ab\overline{c} + \overline{a}b$
2. $f(a,b,c) = \overline{(a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})}$
3. $f(a,b,c,d) = abcd + a\overline{d} + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{d}$

Exercice 8 *Soit $(B,+,.,^{-})$ une algèbre de Boole et a,b,c des éléments de B et $f(a,b,c) = abc + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.*

1. *Ecrire f^* la fonction duale de f.*
2. *Donner la forme canonique disjonctive de f^*.*
3. *En déduire la forme canonique conjonctive de f.*

2.8 Simplification des fonctions booléennes

Les tableaux de Karnaugh sont une méthode graphique pour simplifier les fonctions booléennes comportant un nombre modéré de variables (maximum 8). Chaque case du tableau correspond à un des mintermes.

Pour 4 variables :

ab\cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Pour 5 variables :

ab\cde	000	010	110	100	101	111	011	001
00								
01								
11								
10								

Utilisation : si f est est une fonction booléenne, on a simplifie en deux étapes :

- on remplit le tableau par 1 pour les mintermes qui composent f, 0 pour les autres
- on regroupe les mintermes en blocs, les plus importants possibles (les blocs peuvent se chevaucher)

Exercice 9 $f(a,b,c,d) = \overline{c}\overline{d}b + cab + \overline{c}dab + c\overline{d}\overline{a}b + ca\overline{b}$ *: Montrer que* $f(a,b,c,d) = ab + ac + b\overline{d}$.

3 Les fonctions booléennes sur variables binaires

3.1 Définitions

On se place dans l'algèbre binaire $\{0;1\}$.

Définition 3.1 *Une fonction booléenne de n variables binaires est une application de l'ensemble $\{0;1\}^n$ vers $\{0;1\}$.*

Les valeurs prises par une fonction booléenne de plusieurs variables peuvent être lues dans une table de vérité.

Définition 3.2 *Une table de vérité est un tableau qui représente des entrées (en colonne) et des états binaire (0/1, faux/vrai, éteint/allumé, etc.). Une sortie, également représentée sous forme de colonne, est la résultante des états d'entrée, elle-même exprimée sous forme d'état binaire.*

Exemple 3.3 *Table de vérité du OU exclusif (ou XOR) :*

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

On en déduit que $a \oplus b = \overline{a}b + a\overline{b}$

Propriété 3.4 *(Numérotation des fonctions booléennes) Pour n variables binaires il existe 2^N fonctions booléennes avec $N = 2^n$.*

Remarque 3.5 *Il existe donc 16 fonctions booléennes à deux variables différentes.*

Exercice 10 *Construire la table de vérité de la fonction booléenne $F(a,b,c) = a\overline{b} + \overline{a}c$. En déduire directement sa forme disjonctive.*

3.2 Fonctions de deux variables

fonction	apellation	expression	duale
$f(x,y)=0$	constante nulle		1
$f(x,y)=\overline{xy}$	NI (NOR)	$x \downarrow y$	$x \uparrow y$
$f(x,y)=\overline{x}y$	inhibition		$x \rightarrow y$
$f(x,y)=\overline{x}$	négation		$\overline{x}$
$f(x,y)=x\overline{y}$	inhibition		$x \leftarrow y$
$f(x,y)=\overline{y}$	négation		$\overline{y}$
$f(x,y)=x\overline{y}+\overline{x}y$	OU exclusif (XOR)	$x \oplus y$	$x \odot y$
$f(x,y)=\overline{x}+\overline{y}$	ON (NAND)	$x \uparrow y$	$x \downarrow y$
$f(x,y)=xy$	ET (multiplication)	$x.y$	$x+y$
$f(x,y)=xy+\overline{xy}$	équivalence	$x \odot y \quad x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$
$f(x,y)=y$			y
$f(x,y)=\overline{x}+y$	implication	$x \rightarrow y$	$\overline{x}y$
$f(x,y)=x$			x
$f(x,y)=x+\overline{y}$	implication	$x \leftarrow y$	$x\overline{y}$
$f(x,y)=x+y$	OU (addition)	$x+y$	xy
$f(x,y)=1$	constante unité		0

3.3 Exercices

Exercice 11 *Sur l'algèbre binaire, on considère la fonction booléenne* $f(a,b,c,d) = ab+\overline{a}c\overline{d}+ac+b\overline{c}+bc\overline{d}+\overline{a}b\overline{c}$

1. *Utiliser les diagrammes de Karnaugh pour trouver une simplification minimale de f.*
2. *Avec l'hypothèse supplémentaire $\overline{a}b=0$, simplifier l'expression précédente.*

Exercice 12 *Soit $(B,+,.,^{-})$ une algèbre de Boole et a,b,c des éléments de B.*

1. *Ecrire le tableau de Karnaugh de la fonction $f(a,b,c)=ab+\overline{a}\overline{b}+\overline{bc}$*
2. *Utiliser ce tableau pour montrer que $f(a,b,c)=\overline{\overline{a}bc}$.*
3. *En déduire la forme la plus simple de f.*
4. *Utiliser la question 2 pour prouver par calcul l'implication $ac=bc \Longrightarrow ab+\overline{a}\overline{b}+\overline{bc}=1$.*
5. *Retrouver cette implication sur l'algèbre binaire en dressant la table de vérité de « $ac=bc$ »puis de f.*

Exercice 13

1. *Soit f la fonction booléenne définie par $f(a,b,c,d)=cd+\overline{a}d+a\overline{b}\overline{c}d$. Utiliser un tableau de Karnaugh pour simplifier f.*
2. *A quelle condition est-ce qu'on aura $f(a,b,c,d)=d$?*

4 Application aux circuits

4.1 Les opérations duales NOR et NAND

4.1.1 Définition

Définition 4.1 *Dans une algèbre de Boole $(B,+,.,^{-})$, on définit les opérations NOR ($\downarrow$) et NAND ($\uparrow$) par :*

$$\forall a,b \in B, a \downarrow b = \overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$$
$$\forall a,b \in B, a \uparrow b = \overline{a.b} = \overline{a}+\overline{b}$$

Elles sont duales.

4.1.2 Interprétation

Comme son nom l'indique assez bien, l'opérateur NOR ("NON-OU"), est le complément de l'opérateur OU. Par conséquent, $(a \downarrow b)$ ne donnera "vrai" que si a et b sont simultanément "faux". L'opérateur NOR est l'équivalent de NI dans le langage parlé. Son intérêt en électronique est assez essentiel.

L'opérateur NAND ("NON-ET"), est le complément de l'opérateur ET. En clair, $(a \uparrow b)$ ne donnera "faux" que si a et b sont simultanément "vrai". Le NAND n'a pas d'équivalent direct dans le langage parlé, mais son importance est tout aussi fondamentale en électronique.

Tables de vérité des opérateurs :

a	b	NOR $a \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

et

a	b	NAND $a \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4.2 Propriétés

Propriété 4.2 *Dans toute algèbre de Boole, les opérations NOR et NAND sont commutatives mais pas associatives.*

Propriété 4.3 *Si* $a, b \in B$ *:*

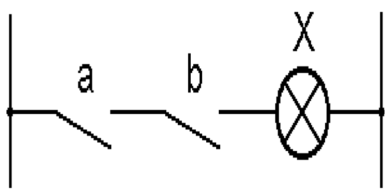
$$a + b = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$$
$$a.b = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$$
$$\overline{a} = a \downarrow a$$

et

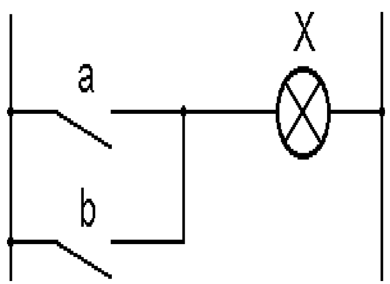
$$a.b = (a \uparrow b) \uparrow (a \uparrow b)$$
$$a + b = (a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b)$$
$$\overline{a} = a \uparrow a$$

On peut donc exprimer toute opération dans B par les fonctions NAND ou NOR. (elles sont dites *universelles*)

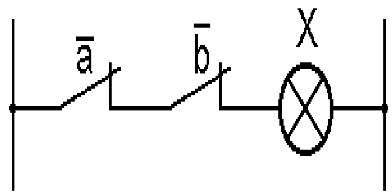
4.3 Réalisations électriques



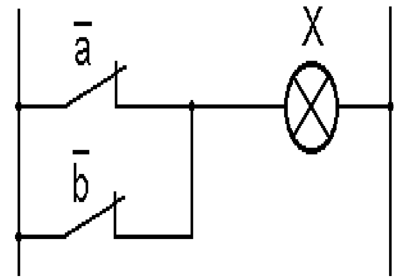
ET



OU



NON-OU (NOR)



NON-ET (NAND)