CHAPITRE 3

LOIS DE PROBABILITE CONTINUES

1 Généralités

En probabilité, les univers vus jusqu'à présent étaient finis (pour la loi binomiale par exemple), ou dénombrables (pour la loi géométrique). Déterminer une loi de probabilité P sur $\Omega = \{x_1, x_2, ...\}$ revenait à déterminer les valeurs $P(X = x_i)$. Il peut arriver que l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. (exemple : on étudie la durée d'une communication téléphonique, la durée de fonctionnement sans panne d'un appareil...) X peut alors prendre une infinité de valeurs, donc la probabilité de chacune d'elles serait nulle. Les événements intéressants ne sont plus « obtenir tel ou tel réel », mais plutôt « obtenir un réel compris entre a et b »(noté $P(X \in [a;b])$ ou $P(a \leq X \leq b)$.

Dans toute la suite, (Ω, P) est un espace probabilisé.

Définition 1.1 *Soit Ω un univers. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est **continue** lorsque l'ensemble de ses valeurs est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1.1 Densité de probabilité

Définition 1.2 *Une fonction f est une **densité de probabilité** si :*

- *pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$*
- *f est continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points)*
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Définition 1.3 *On appelle **loi de probabilité de densité f** la loi définie pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ par*

$$P([a;b]) = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque 1.4 *On obtient bien une probabilité puisque $P(\Omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ et que si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ par linéarité de l'intégrale.*

Propriété 1.5 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$*

1.2 Fonction de répartition

Définition 1.6 *La **fonction de répartition** de la variable aléatoire X est la fonction F définie par :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0;1] \\ x &\mapsto F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Propriété 1.7 *Soient x et y deux réels.*

- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
- $P(x < X < y) = F(y) - F(x)$
- *F est croissante sur $\mathbb{R}$*
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- *F est continue sur $\mathbb{R}$*

Propriété 1.8 *Si X suit une loi de probabilité de densité f alors :*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

et la fonction de répartition de X est définie pour tout x par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

F est donc une primitive de f.

Ou bien : F est dérivable et F' = f.

Remarque 1.9 *Cela montre que la fonction de répartition d'une v.a. X est déterminée par sa loi de probabilité, et réciproquement.*

1.3 Espérance, variance, écart type

Définition 1.10 *L'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire continue X est le nombre réel :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Définition 1.11 *La **variance** de X est le nombre réel positif :*

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

*L'**écart type** est le réel* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriété 1.12 *L'espérance est linéaire : si a et b sont deux réels et X et Y deux variables aléatoires alors* $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

2 Loi uniforme

2.1 Présentation

Considérons les intervalles $[0; 0,5]$ et $[0,5; 1]$. Si on veut définir une variable aléatoire de loi « uniforme »sur $[0; 1]$, il est souhaitable d'avoir

$$P(X \in [0; 0,5]) = 0,5 \text{ et } P(X \in [0,5; 1]) = 0,5$$

Plus généralement, si I est un intervalle inclus dans $[0; 1]$, la probabilité que X soit à valeurs dans I est égale à la longueur de l'intervalle I.

Remarque : Cette loi modélise par exemple le tirage aléatoire d'un réel dans l'intervalle I. C'est la version « continue »de la loi uniforme discrète.

Définition 2.1 *Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur* $[0; 1]$*, notée* $\mathcal{U}([0; 1])$*, si :*

- *X est à valeurs dans* $[0; 1]$
- $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \beta - \alpha$ *avec* $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$

Plus généralement :

Définition 2.2 *Soient a et b des réels tels que a < b. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur* $[a; b]$*, notée* $\mathcal{U}([a; b])$*, si :*

- *X est à valeurs dans* $[a; b]$
- $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$ *avec* $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$

Exemple 2.3 *Si* $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([-1; 1])$ *alors* $P(X \in [0,5; 1,5]) = P(X \in [0,5; 1]) = \dfrac{1 - 0,5}{1 - (-1)} = 0,25$.

2.2 Densité et fonction de répartition

Propriété 2.4 *La fonction **densité** de la loi uniforme sur* $[a; b]$ *est la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \text{ ou } x > b \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \end{cases}$$

Propriété 2.5 *On suppose que* $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a; b])$*. La **fonction de répartition** F de X est définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

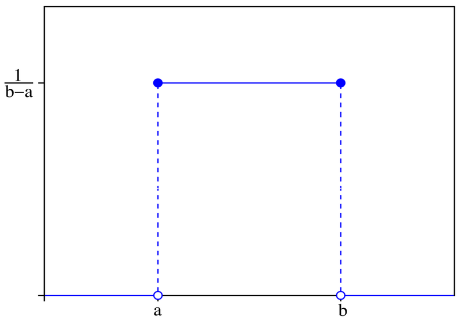

FIG. 1 – Densité de la loi uniforme

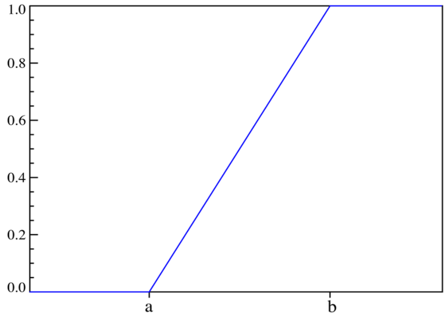

FIG. 2 – Fonction de répartition de la loi uniforme

Propriété 2.6 ***(espérance et variance)*** *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a;b])$ alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(a-b)^2}{12}$.*

2.3 Exercices

Exercice 1 *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([-1;4])$.*

1. *Calculer les probabilités les événements suivants :*
   $P(X=0)$; $P(1<X<3)$; $P(-2<X\leq 3)$; $P(-2<X<5)$.
2. *On appelle A l'événement $(1<X<3)$ et B l'événement $(2<X<3,5)$. Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.*
3. *Tracer la représentation graphique de F fonction de répartition de X.*
4. *Calculer l'espérance et la variance de X.*

Exercice 2 *Démontrer la propriété 2.6 page 3.*

3 Loi exponentielle

3.1 Présentation

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène lorsqu'elle est sans vieillissement, c'est-à-dire si la durée de vie après l'instant t est indépendante des instants avant l'instant t. Exemples :

- un verre ne s'use pas, c'est à dire qu'il ne vieillit pas. Par contre, il arrive qu'il se casse. La probabilité qu'il se casse pendant un intervalle de temps donné ne dépend pas de son âge.
- *désintégration des noyaux radioactifs* : la proportion de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps donné ne dépend pas de l'âge des noyaux. La probabilité que le noyau se désintègre pendant un intervalle de temps donné est indépendante de l'âge de ce noyau.

3.2 Densité et fonction de répartition

Définition 3.1 *Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire T suit la loi **exponentielle de paramètre** λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si :*

- *T est à valeurs dans $[0;+\infty[$*
- *la fonction densité de T est*

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Propriété 3.2 *Si $T \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour $0 \leq a \leq b$:*

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Propriété 3.3 *Si $T \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors la fonction de répartition de T est définie par :*

$$F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

En effet, $P(T \leq t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$. En particulier F est continue sur $\mathbb{R}$.

3.3 Espérance et variance

Propriété 3.4

$$E(T) = \lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(T) = \lambda \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt - E(T)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Remarque 3.5 *La notation* $\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}dt$ *signifie* $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-\lambda t}dt$

3.4 Exercices

Exercice 3 *Soit* T *une variable aléatoire suivant la loi* $\mathcal{E}(2)$.

1. *Donner des valeurs approchées à* 10^{-2} *près des probabilités des événements suivants :* $P(1 \leq T < 3)$;$P(T \leq 5)$; $P(T \geq 5)$.
2. *Tracer la représentation graphique de* F *fonction de répartition de* T.

Exercice 4 ***(Fonction de survie ou de fiabilité)***

Soit T *une variable aléatoire suivant la loi* $\mathcal{E}(\lambda)$. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* g *(dite de survie ou de fiabilité) par* $g(t) = P(T > t)$.

1. *Montrer que pour tout* $A > 0$ *et* t *réel positif,* $\int_t^A \lambda e^{-\lambda u}du = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda A}$.
2. *Sachant que* $g(t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u}du$, *en déduire l'expression de* $g(t)$.
3. *Retrouver ce résultat en remarquant que* $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$.

Exercice 5 ***(Médiane)*** *Soit* T *une variable aléatoire suivant la loi* $\mathcal{E}(\lambda)$. *Déterminer la médiane de* T, *c'est-à-dire le réel* m *tel que* $F(m) = 0,5$ *où* F *désigne la fonction de répartition de* T .

Exercice 6 *La durée de vie (exprimée en heures) d'un certain type d'ampoule électrique est une variable aléatoire* T *qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,002.*

1. *Calculer, à* 10^{-3} *près, la probabilité qu'une ampoule de ce type ait une défaillance avant 500 heures.*
2. *Calculer, à* 10^{-3} *près, la probabilité qu'une ampoule de ce type n'ait pas de défaillance avant 100 heures.*
3. *Calculer la probabilité pour qu'une ampoule de ce type fonctionne encore au bout de 600 heures sachant qu'elle fonctionne au bout de 500 heures. Que remarque-t-on ?*

Exercice 7 *La variable aléatoire* X *égale à la durée de vie d'un atome d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle. On sait que la probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 2 jours est, à* 10^{-3} *près, égale à 0,160.*

1. *Calculer, à* 10^{-3} *près, le paramètre de cette loi exponentielle.*
2. *Calculer les probabilités des événements* $(X = 7)$ *et* $(6 < X < 10)$.
3. *La demi-vie d'un nuclide est le temps* T *au bout duquel la moitié des atomes initiaux sont désintégrés. Calculer, à 0,1 près, le temps de demi-vie de l'iode 131.*

Exercice 8 ***(la loi exponentielle est "sans mémoire")***

Soit T *une variable aléatoire suivant la loi* $\mathcal{E}(\lambda)$. *Pour des réels positifs* s *et* t, *montrer l'égalité* $P_{T>s}(T > s + t) = P(T > t)$.

Supposons par exemple que le temps d'attente dans une banque suit une loi exponentielle. La probabilité d'attendre encore une durée t alors qu'on a déjà attendu une durée s est la même que la probabilité d'attendre t à partir du début. On dit qu'une loi exponentielle est sans mémoire ou sans vieillissement.

Remarque 3.6 *On peut démontrer que seules les variables exponentielles sont sans mémoire. Si la relation* $P_{T>s}(T > s + t) = P(T > t)$ *est vérifiée, on obtient* $P(T > s + t) = P(T > s)P(T > t)$. *En posant* $\varphi(t) = P(X > t)$, *l'égalité précédente nous donne* $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$, *qui est l'équation caractéristique de la fonction exponentielle.*

Exercice 9 ***(démonstration de la formule de l'espérance)***

On suppose $T \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

1. *A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout* $A > 0$, $\lambda \int_0^A te^{-\lambda t}dt = -\left(A + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda}$.
2. *En faisant tendre* A *vers* $+\infty$, *en déduire que* $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Remarque 3.7 *On peut aussi démontrer la formule de la variance à l'aide de deux intégrations par parties successives (*$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda^2}$*).*