Corrigé de l'énigme n°7 : la bande chronologique

Rappel des règles :
Un pion est sur la case 1.
Le jeu se joue à deux : chaque joueur avance chacun à son tour le pion du nombre d'années m de son choix, ce nombre m devant être compris entre 1 et n, avec n fixé au début du jeu, n étant compris entre un siècle et cinq siècles. Celui qui arrive sur l'année 2009 a gagné une année de présidence.
Oscar commence. Gaston choisit le nombre n.

1. Gaston choisit $n = 400$.

Ce jeu est analogue au jeu de Fort-Boyard : en deux coups successifs de Gaston, suivi d'Oscar, Oscar peut toujours se débrouiller pour que le total des case parcourues soit égal à 401.

En effet, si Gaston avance de 400 cases, Oscar avance d'une seule : cela fait bien 401.

Si Gaston avance d'une seule case, Oscar avance de 400 : cela fait bien 401.

Si Gaston avance de x cases, avec $1 < x < 400$, Oscar avance de $y = 401\ \ x$ cases, avec $1 < x < 400$ (y est en fait le complément à 401 de x).

Avec cette stratégie, Oscar sait qu'une position est gagnante (quand il vient de jouer), lorsqu'il est sur la case 2009 (évidemment !), mais aussi $2009 - 401 = 1608$, $2009 - 802 = 1207$, etc…, c'est-à-dire $2009 - 401 \times x$, avec x entier. Sachant que $2009 - 5 \times 401 = 4$, il suffit à Oscar d'avancer de 3 cases au premier coup pour être sûr de gagner, en employant la stratégie du complément à 401, puisqu'il se trouvera sur la case 4, puis 405,. puis 806, puis 1207, puis 1608, puis 2009. Il gagnera en $1 + 2 \times 5 = 11$ coups.

Remarque : on utilise en fait dans ce problème la division euclidienne $2009 = 5 \times 401 + 4$...

2. Pour que Gaston soit sûr de gagner, il suffit que ce soit lui qui utilise cette tactique du complément. Sachant qu'il est au départ sur la case 1, et qu'il veut arriver sur 2009, il lui suffit de choisir son nombre n de manière que $n + 1$ soit un diviseur de $2009 - 1 = 2008$. Or $2008 = 8 \times 251$. Il suffira donc à Gaston d'appliquer la tactique du complément à 251 pour être sûr de gagner, et donc de choisir $n = 250$.

Une description du jeu est alors la suivante :

Gaston se trouvera sur la case 1, puis 252, puis 503, puis 754, puis 1005, puis 1256, puis 1507, puis 1758, puis 2009. Cela représente donc $2 \times 8 = 16$ coups au total.

Remarque : 251 étant un nombre premier, et sachant que $2008 = 2^3 \times 251$, le nombre 250 est la seule valeur de n qui convient, puisque le jeu impose $100 \leq n \leq 500$. En effet, les deux diviseurs de 2008 encadrant 251 sont 8 ($n = 7$ est trop petit) et 502 ($n = 501$ est trop grand).

Corrigé du défi n°7 : Les pions réversibles (2)

Après plusieurs essais, on constate que l'on n'arrive pas à faire afficher tous les pions de la même couleur.

Problème : peut-on démontrer que le problème n'a pas de solution ?

Méthode 1 (exhaustive) : chaque case à cocher a deux positions ; sachant qu'il y a 8 cases à cocher, il suffira de tester les $2^8 = 256$ configurations possibles. C'est faisable , mais long (on peut toutefois utiliser les symétries du problème, et se restreindre à 128 configurations avec la symétrie vert/rouge, puis 64 avec la symétrie par rapport à la première diagonale)…
Méthode 2 : on constate que 3 pions des coins sur 4 sont rouges. On constate également que toute modification d'une case à cocher (que ce soit sur l'horizontale, la verticale ou la diagonale) change 2 pions des coins de couleur. En conséquence, puisqu'on débute avec 3 pions rouges dans les coins, toute modification sur une case à cocher va nous faire obtenir une configuration avec un seul pion rouge dans les coins, la modification suivante nous donnera trois pions rouges dans les coins, etc... : on n'aura jamais de configuration avec 0 ou 4 pions rouges dans les coins, ce qui est une condition nécessaire à la résolution du problème : le problème n'a donc pas de solution.
Remarque : une condition nécessaire (mais non suffisante : cherchez un exemple !) pour que ce problème ait une solution est donc que, sur les 4 pions des coins, un nombre pair soit rouge (et donc un nombre pair soit vert).