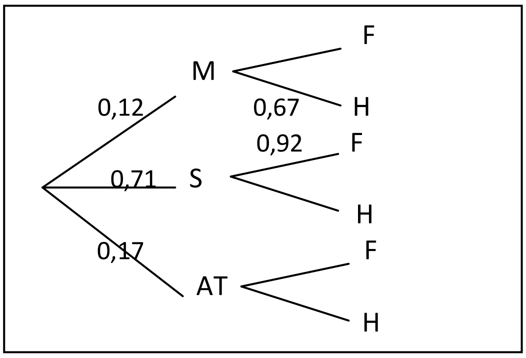
PROBABILITES – ALGEBRE DE BOOLE

Evaluation 2009-2010 (Correction)

Exercice 1 On note M les médecins, S les soignants (non médecins) et AT le personnel AT.



1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   - **a.** $P(F \cap S) = P_S(F) \times P(S) = 0{,}92 \times 0{,}71 = 0{,}6532.$
   - **b.** $P(F \cap M) = P_M(F) \times P(M) = 0{,}12 \times 0{,}33 = 0{,}0396.$
   - **c.** $P(F) = 0{,}80 = P(F \cap S) + P(F \cap M) + P(F \cap AT)$ donc $P(F \cap AT) = 0{,}80 - 0{,}6532 - 0{,}0396 = 0{,}1072.$
   - d. $P_{AT}(F) = \frac{P(F \cap AT)}{P(AT)} = \frac{0{,}1072}{0{,}17} \approx 0{,}6306.$
2. Soit T la variable aléatoire mesurant la durée du trajet domicile-hopital. $T \leadsto \mathcal{U}[0;\ 1]$.
   15 min = $\frac{1}{4}$ heures ; 20 min = $\frac{1}{3}$ heures.
   $P\left(\frac{1}{4} \leq T \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$

Exercice 2

1) a) Les événements T et G sont indépendants donc P (A) = P($T \cap G$) = P(T) $\times$ P(G) = 0,2 $\times$ 0,1 = 0,02

b) P(B) = P ($T \cup G$) = P(T) + P(G) – P($T \cap G$) = 0,1 +0,2 – 0,02 = 0,28

c) C : « ne pas gagner du tout » = $\overline{T \cup G}$: P(C) = 1 – P ($T \cup G$) = 1 – 0,28 = 0,72

2) D : « Alfred a gagné au moins une fois » est l'événement contraire de « Alfred n'a jamais gagné ».

Les cinq achats sont indépendants donc P($\overline{D}$) = $(0{,}72)^5 \approx$ 0,193 et P(D) = 1 – P($\overline{D}$) $\approx$ 0,807.

Exercice 3 $E \leadsto \mathcal{E}(1{,}5).$

1. C'est l'espérance de la variable aléatoire E, c'est-à-dire $E(E) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}667$. On peut espérer avoir en moyenne un écart de 0 ,667 dixième de millimètre.

2. **a)** $P(E \leq 1) = 1 - e^{-1{,}5} \approx 0{,}777$

b) $P(1 < E \leq 2) = e^{-1,5} - e^{-2\times 1,5} \approx 0,173$

c) $P(E > 2) = 1 - P(E \leq 2) = e^{-2\times 1,5} \approx 0,050$

3. Le cylindre est accepté si $E \leq 1$ ou si $1 < E < 2$ avec une probabilité de 0,80 : $P_{(1<E<2)}(A) = 0,80$:

$$P(A) = P(E \leq 1) + P(1 < E < 2) \times P_{(1<E<2)}(A) = 0,777 + 0,173 \times 0,80 = 0,915.$$

4. $P_A(R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} = \frac{0,8\times 0,173}{0,915} = 0,151.$

5. On prélève de manière indépendante et identique 10 cylindres de la production. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de cylindres acceptés parmi les 10. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0,915)$.

a) $P(X = 6) = \binom{10}{6} 0,915^6 0,085^4 = 0,076.$

b) $P(X = 10) = \binom{10}{10} 0,915^{10} 0,085^0 = 0,915^{10} \approx 0,411$

c) « Au moins un des cylindres est refusé » est le contraire de « tous les cylindres sont acceptés » :

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X = 10) \approx 0,589$$

6. Soit Y la variable aléatoire qui donne le rang du premier cylindre refusé. Y suit une loi géométrique de paramètre 0,085 (la probabilité qu'un cylindre soit refusé).
   - **a.** $P(Y = 2) = 0,085 \times 0,915^1 = 0,078.$
   - **b.** $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,085} \approx 12$. On doit obtenir en moyenne 12 cylindre avant de tomber sur un cylindre refusé.

Exercice 4

1. Si N est la variable aléatoire comptant le nombre de défaillances, N suit une loi de Poisson dont l'espérance est $\lambda = E(N) = \frac{200}{100} = 2$.
2. $P(X = 2) = e^{-2} \times \frac{2^2}{2!} \approx 0,271$
3. Le temps moyen passé sur une voiture est l'espérance de la variable aléatoire T qui compte le temps que dure l'intervention.
   Les valeurs possibles de T sont 2 ; 2,5 ; 3 et 4.
   Les probabilités associées sont :

$$P(T = 2) = P(X = 0) = e^{-2} \approx 0,135.$$
$$P(T = 2,5) = P(X = 1) = e^{-2} \times \frac{2^1}{1!} \approx 0,271$$
$$P(T = 3) = P(X = 2) \approx 0,271$$
$$P(T = 4) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$
$$= 1 - 0,135 - 0,271 - 0,271 = 0,323$$

D' où la loi de probabilité de T :

T	2	2,5	3	4
$P(T = t)$	0,135	0,271	0,271	0,323

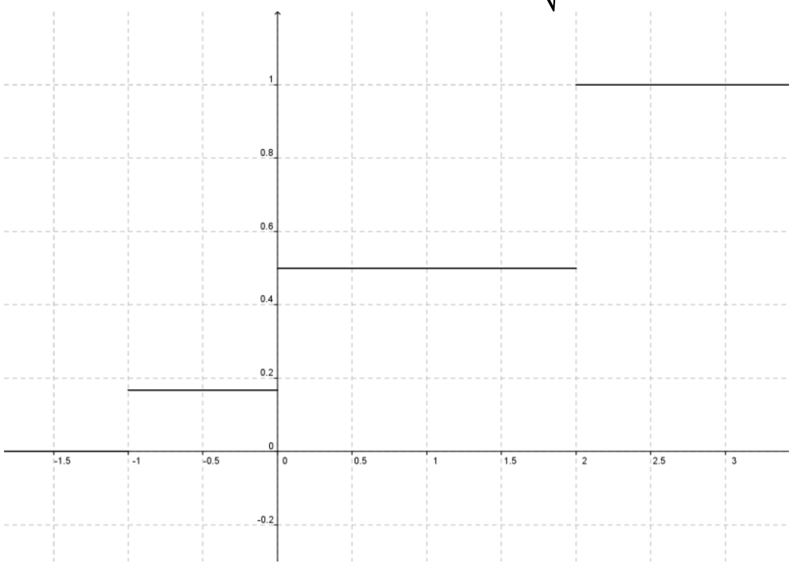
$E(T) = 2 \times 0,135 + \cdots + 4 \times 0,323 \approx 3,05$ heures soit environ 3h03.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-1; 0; 2\}$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$ et p.

1. $p = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
2. $E(X) = -\frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$; $V(X) = (-1)^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{2} - \left(E(X)\right)^2 = \frac{53}{36}$

$$et\ \ \sigma(X) = \sqrt{\frac{53}{36}} \approx 1{,}21.$$

3. 

Exercice 6 – algèbre de Boole

1. $\bar{d} + \left(a + \bar{b}\right)\bar{c} = \overline{\overline{a.\bar{c}}.\overline{\bar{b}\bar{c}}.d}$
2. **a)** $f(a, b, c, d) = bc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{c}bd + a\bar{b}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$.

cd / ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	0	1

Les quatre 1 des coins forment le bloc $\bar{b}\bar{d}$, on regroupe les autres en 3 blocs de 4 qui se chevauchent : $\bar{a}c, bc$ et bd. Donc $f(a, b, c, d) = \bar{b}\bar{d} + \bar{a}c + bc + bd$.

b) On obtient le tableau de Karnaugh suivant avec l'entrée $a\bar{b}$ qui ne se produit pas :

possibilité de mettre ce qui nous arrange pour simplifier à la place des X.

cd / ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	X	X	X	X

cela donne par exemple :

cd / ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	1	1

Ainsi les cases grisées forment le bloc c et les autres 1 se regroupent comme précédemment en bd et $\bar{b}\bar{d}$. D'où $f(a,b,c,d) = c + bd + \bar{b}\bar{d}$.

3. a) $h(a,b,c) = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b}c + \bar{a}b$:

a	b	c	$h(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

b) Chaque « 1 » représente un minterme : $h(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}c$.

c) Facile en faisant apparaitre les variables manquantes comme dans $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}(c + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$, puis en éliminant les redondants.

d) Les cases grisées forment le bloc $\bar{b}c$ et le bloc de 4 est $\bar{a}$. Donc $h(a,b,c) = \bar{a} + \bar{b}c$.

ab \ c	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	0	1

e)

a	b	c	$h(a,b,c)$	$a = b + \bar{c}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

A chaque fois que $a = b + \bar{c}$ est vrai (ligne où cette égalité vaut 1), on a a et $h(a,b,c)$ qui sont contraires, donc $\bar{a}$ et $h(a,b,c)$ qui sont égaux. Voir les cases grisées.

f) Si $a = b + \bar{c}$ alors $h(a,b,c) = \bar{a} + \bar{b}c = \overline{b + \bar{c}} + \bar{b}c = \bar{b}c + \bar{b}c = \bar{b}c = \overline{b + \bar{c}} = \bar{a}$.