PROBABILITES – ALGEBRE DE BOOLE

Evaluation 2009-2010 (2 heures)

Calculatrice autorisée – Cours non autorisé – Formulaire en fin de sujet

Exercice 1

Le personnel d'un très grand hôpital est reparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).

12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.
67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   c. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
   d. En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}[0;\ 1]$. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?

Exercice 2

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

La « françoise » des jeux a lancé un nouveau produit : une carte à acheter chez le buraliste où l'on a deux chances de gagner : au grattage ou au tirage (deux jeux pour une seule carte).

La probabilité de gagner au grattage est de 0,2 (événement G) et celle de gagner au tirage est de 0,1 (événement T) .

Les événements T et G sont supposés indépendants.

1) a) Quelle est la probabilité de A : « gagner pour les deux jeux » quand on a acheté une carte ?

b) Quelle est la probabilité de B : « gagner à l'un des deux jeux » ?

c) Quelle est la probabilité de C : « ne pas gagner du tout » ?

2) *Dans cette question, « gagner » sous-entend gagner au tirage ou au grattage*. Alfred achète cinq de ces cartes. On suppose que ces cinq achats sont indépendants ; quelle est la probabilité de D : « Alfred a gagné au moins une fois » ?

Exercice 3

Une machine fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart E est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté (on note cet événement A)

Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas (l'événement : « le cylindre subit une rectification » sera noté R).

Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

On arrondira, si besoin, tous les calculs à 10^{-3}*près.*

1. Quel est l'écart E qu'on peut espérer obtenir en moyenne ?

2. On prélève au hasard un cylindre dans la production. Calculer :

a) $P(E \leq 1)$

b) $P(1 < E \leq 2)$

c) $P(E > 2)$.

3. Montrer que la probabilité que le cylindre soit accepté est d'environ 0 ,915.

4. Sachant qu'un cylindre est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

5. On prélève de manière indépendante et identique 10 cylindres de la production.

a) Quelle est la probabilité que 6 cylindres parmi les 10 soient acceptés ?

b) Quelle est la probabilité que les 10 cylindres soient acceptés ?

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des cylindres soit refusé ?

6. On prélève de manière indépendante et identique des cylindres de la production jusqu'à ce qu'on obtienne un cylindre que l'on doive refuser.

- **a.** Quelle est la probabilité que le premier cylindre refusé soit le deuxième tiré ?
- **b.** Combien de cylindres doit-on tirer en moyenne pour obtenir un cylindre refusé ?

Exercice 4

Une voiture est soumise au contrôle technique. Le nombre de défaillances découvertes suit une loi de Poisson de paramètre λ (la loi des événements rares). Statistiquement, sur 100 voitures contrôlées, on compte en moyenne 200 défaillances techniques.

S'il n'y a pas de défaillance, le contrôle dure en moyenne 2 heures. Si on découvre 1 ou 2 défaillances, pour les éliminer, on rajoute encore 30 minutes pour chacune d'elles. Si on en découvre plus de 2, la voiture est soumise à l'inspection technique qui dure en moyenne 4 heures.

1. Expliquer pourquoi $\lambda = 2$.
2. Calculer la probabilité que le contrôle dure 3 heures (c'est-à-dire, la probabilité qu'il y ait 2 défaillances).
3. Déterminer le temps moyen passé sur une voiture.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-1; 0; 2\}$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{6}; \frac{1}{3}$ et p.

1. Déterminer la valeur de p.
2. Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.
3. Tracer la représentation graphique de la fonction de répartition de X.

Exercice 6 – algèbre de Boole

Dans cet exercice, on se place dans (B, +, . , $^-$) l' algèbre de Boole binaire. a, b, c, d sont des variables booléennes. Les trois questions sont indépendantes.

1. Réécrire $\bar{d} + \left(a + \bar{b}\right)\bar{c}$ sans utiliser l'opération $+$ (c'est-à-dire, en n'utilisant que des produits et des complémentaires).
2. **a)** Soit $f(a, b, c, d) = bc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{c}bd + a\bar{b}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$. Dresser le tableau de Karnaugh de f puis donner une expression simplifiée de f.

   b) En ajoutant l'hypothèse $a\bar{b} = 0$ (l'entrée $a\bar{b}$ ne se produit pas), simplifier encore f.

3. **a)** Recopier puis compléter sans justifier la table de vérité de la fonction booléenne $h(a, b, c) = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b}c + \bar{a}b$:

a	b	c	$h(a,b,c)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

   b) En déduire la forme canonique disjonctive de h.

   c) Retrouver le résultat par le calcul.

   d) En utilisant un tableau de Karnaugh, ou bien à l'aide de calcul booléen, simplifier h au maximum.

   e) Dresser la table de vérité de $a = b + \bar{c}$ à côté de celle de h puis expliquer comment ces tables prouvent l'implication : $a = b + \bar{c} \Rightarrow \bar{a}\bar{b} + a\bar{b}c + \bar{a}b = \bar{a}$.

   f) Retrouver cette implication par calcul booléen.

Barème indicatif : 40 points

Ex 1 : 4,5 points	Ex 2 : 4,5 points	Ex 3 : 11,5 points
Ex 4 : 5 points	Ex 5 : 3,5 points	Ex 6 : 10 points

Formulaire Probabilités – Algèbre de Boole

Langage des probabilités

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Variables aléatoires discrètes

Fonction de répartition : pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 - E(X)^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Lois de probabilité discrètes

Loi binomiale $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = npq$$

Loi géométrique

$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Loi de Poisson $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ et $E(X) = \lambda$

Lois de probabilité continues

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

où f est la densité de probabilité de la loi de X

Loi uniforme

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

Loi exponentielle : pour tout $t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$P(a \leq T \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

Algèbre de Boole

$$a + 0 = a \text{ et } a.1 = a$$

$$a.(b+c) = ab + ac \text{ et } a + (b.c) = (a+b).(a+c)$$

$$a + \bar{a} = 1 \text{ et } a.\bar{a} = 0$$

$$a + a = a \text{ et } a.a = a$$

$$\bar{0} = 1 \text{ et } \bar{1} = 0$$

$$a + 1 = 1 \text{ et } a.0 = 0$$

$$a + ab = a \text{ et } a.(a+b) = a$$

$$ax + \bar{a}y = ax + \bar{a}y + xy$$

$$\overline{a+b} = \bar{a}.\bar{b} \text{ et } \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$$