

EXERCICE

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{Z} le système

$$(S) . \quad n \equiv 13 \pmod{19}$$

$$n \equiv 6 \pmod{12}$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u+12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$n \equiv n_0 \pmod{19}$$

$$n \equiv n_0 \pmod{12}$$

- b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.

3. a. Trouver un couple $(u ; v)$ solution de l'équation $19u+12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

- b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division?