TS LOGARITHME *feuille 1*

Problème 10 points
Commun à tous les candidats
Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A
Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative C
On considère la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par C sa courbe représentative relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.
a. Étudier les variations de u.
b. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2\,;3]$. Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.
c. Étudier le signe de $u(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
4. a. Étudier les variations de f.
b. Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α.

Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ %

5. a. Étudier le signe de $f(x)$.
b. Tracer C .

Partie B

Étude d'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
Soit F la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. a. Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0\,;+\infty[$.
b. Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

2. Calcul de $F(x)$.

soit g la fonction définie sur r $]0\,;+\infty[$ par
$g(x) = x\ln(x) - x$
montrer que g est une primitive la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$
En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3. a déterminer la limite de F en 0.
b. déterminer la limite de F en $+\infty$.