TS ARITHMETIQUE *feuille 5*

Exercice 1 (spécialité) 5 points

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n + 3$, $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. **a.** Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

   b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n + 2 = 7k$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.

Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.

Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Exercice 2 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres
$a_n = 4 \times 10^n - 1$, $b_n = 2 \times 10^n - 1$ et $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

1. **a.** Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
2.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ?
Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e. Montrer que PGCD (b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2).
En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :
(1) $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
(2)

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c. Résoudre l'équation (1).
ci.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11; 13 ; 17; 19 ; 23; 29 ; 31; 37 ; 41; 43 ; 47; 53 ; 59; 61 ; 67; 71 ; 73; 79 ; 83; 89 ; 97.