COURS THEORIQUE : PROPORTIONNALITE ; FONCTIONS LINEAIRES ; POURCENTAGES

I. Généralités

Cadre numérique : Quotient

Def 1 : a, b, c, d sont 4 réels ($b \neq 0$ et $d \neq 0$). Dire que (a, c) et (b, d) sont proportionnelles signifie que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Prop 1 : soient a, b, c, d sont 4 réels non nuls : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (produit en croix).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Cadre fonctionnel : coefficient de proportionnalité et fonction linéaire

Prop 2 : les suites de nombres réels $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n)$ sont proportionnelles si et seulement si il existe un réel k tel que $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $y_3 = kx_3$, …….., $y_n = kx_n$.
k est appelé le coefficient (ou rapport) de proportionnalité (ou multiplicateur) permettant de passer de la suite $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ à la suite $(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n)$.

Csq : Si k est non nul, $\dfrac{1}{k}$ permet de passer de la suite $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ à la suite $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$.

Représentation fréquente d'une situation de proportionnalité : tableau de proportionnalité

x_1	x_2	x_3		x_n
y_1	y_2	y_3		y_n

$\times k$ $\quad \times \dfrac{1}{k}$

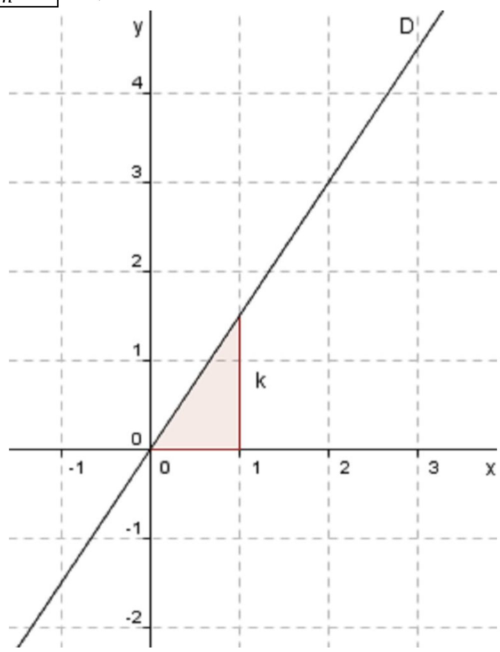
Def 2 : La fonction f, qui à tout x, associe $f(x) = kx$ est appelée fonction linéaire de coefficient k.

Prop 3 : soit f la fonction linéaire de rapport k, avec x_1, x_2 et a trois réels

- propriété additive : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
- propriété multiplicative : $f(ax_1) = af(x_1)$.

Csq : dans un tableau de proportionnalité, on peut additionner des colonnes, multiplier une colonne par un même nombre, donc soustraire des colonnes, etc...

Cadre graphique : droite



Prop 4 : La fonction f, qui à tout x, associe $f(x) = kx$, est représentée graphiquement dans un repère du plan par la droite D passant par l'origine et par le point de cordonnées $(1\ ;\ k)$.

Csq : si les suites $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n)$ sont proportionnelles de rapport k, alors les points $A_1(x_1\ ;\ y_1)$, $A_2(x_2\ ;\ y_2)$, $A_3(x_3\ ;\ y_3)$, ……….., $A_n(x_n\ ;\ y_n)$ sont alignés sur D.

II. Cinq situations de proportionnalité

1. Pourcentages

Def 3 : dire que le nombre a vaut t% du nombre b signifie que $a = \dfrac{t}{100} \times b$, d'où $\dfrac{a}{b} = \dfrac{t}{100}$.

Prop 5 : si un nombre n est augmenté de t%, alors sa valeur après augmentation est $n \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$

si un nombre n est diminué de t%, alors sa valeur après diminution est $n \times \left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$.

2. Echelle d'un plan

Def 4 : dire que l'échelle d'un plan est $\dfrac{1}{k}$ signifie que 1 cm sur le plan représente k cm dans la réalité.

3. Vitesse

Def 5 : dire qu'une vitesse est v en $\mathrm{km.h^{-1}}$ signifie que $v = \dfrac{d}{t}$ (d'où $d = vt$, d'où $t = \dfrac{d}{v}$), avec d en km et v en h.

Rq 1 : v est le rapport de proportionnalité permettant de passer de la suite des temps en h à celle des distances en km.
Rq 2 : on a des définitions analogues pour le débit, la masse volumique, etc… (mesures quotients : attention aux unités !).

4. Théorème de Thalès : voir le cours de géométrie de novembre.

5. Triangles semblables : voir le cours de géométrie de mars.