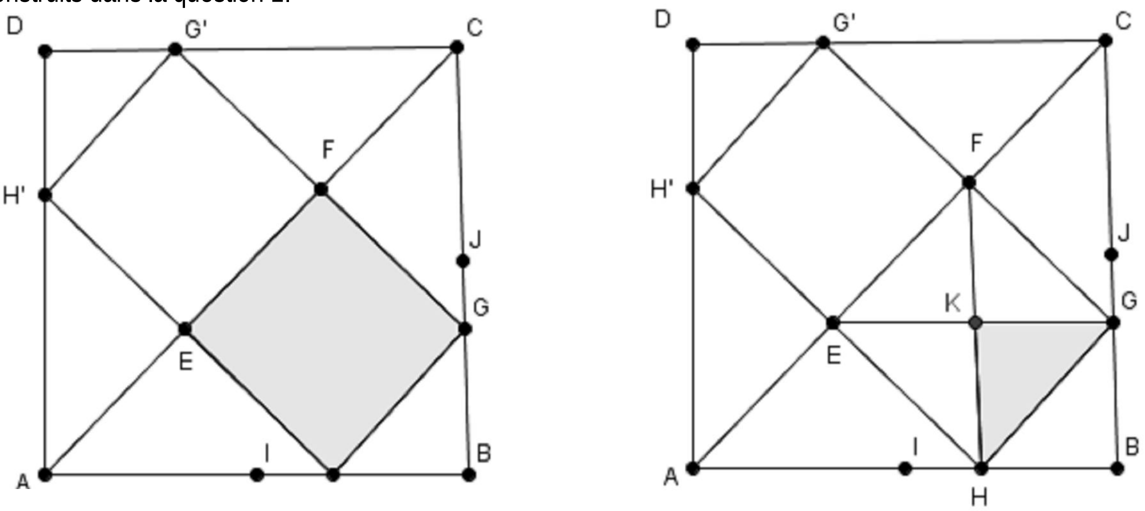
TD sur les isométries et les triangles semblables

Exercice 1. (Académies d'Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse 2007)
Soit $ABCD$ un carré de centre O et de côté 9 cm. On note I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[BC]$, puis E et F les points d'intersection de la droite (AC) avec respectivement les droites (DI) et (DJ). La perpendiculaire en E à la droite (AC) coupe (AB) en H ; la perpendiculaire en F à la droite (AC) coupe (BC) en G. On considère alors le quadrilatère $EFGH$.

1. Construction : tracer le carré $ABCD$ et les points I et J en vous aidant du quadrillage de la copie (un carreau de la copie correspond à une longueur de 5 mm).
Compléter la figure par une construction à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.

2. L'objectif de cette question est de prouver que $EFGH$ est un carré
   a. Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABD. En déduire la valeur du rapport $\dfrac{AE}{AO}$, puis prouver que $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{3}$.
   b. Montrer que $AE = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.
   c. Quelle est la nature du triangle AEH ? Justifier la réponse. En déduire que $EH = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.
   d. On rappelle qu'une diagonale d'un carré est un axe de symétrie de ce carré. Indiquer sans justification les symétriques respectifs des points E et H par rapport à l'axe (DB). En déduire les longueurs FG, FC puis la longueur EF.
   e. Conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$. Justifier la réponse.

3. Recherche d'un pavage commun aux carrés $ABCD$ et $EFGH$.
On rappelle que le pavage d'une surface est l'action de couverture totale et sans superposition de cette surface par un nombre entier de « pièces » isométriques. Les figures ci-dessous correspondent aux carrés $ABCD$ et $EFGH$ construits dans la question 1.



   a. Peut-on paver le carré $ABCD$ à l'aide de carrés isométriques au carré $EFGH$? Justifier la réponse.
   b. Peut-on paver les carrés $EFGH$ et $ABCD$ à l'aide de triangles isométriques au triangle GHK où K désigne le centre du carré $EFGH$? Justifier la réponse.

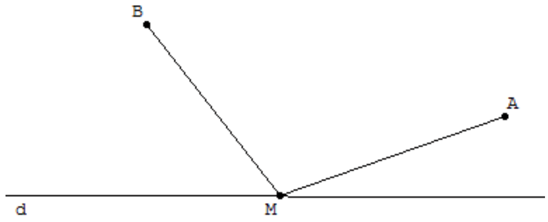
Question complémentaire
Le document présenté en annexe 1 est un extrait d'un manuel de CM2 (*Cap Maths,* page 67, Éditions Hatier, 2004).

1. Quelle est la grandeur en jeu dans cette activité ? Justifier le titre « Comparaison et mesure ».
2. Indiquer la procédure attendue pour répondre à la question 1, compte tenu du matériel proposé.
3. Proposer une aide matérielle que le maître peut apporter à des élèves qui ne maîtrisent pas cette procédure.
4. Dans la question 2, quelle difficulté les élèves peuvent-ils rencontrer pour ranger les surfaces de la plus petite à la plus grande aire ?

Exercice 2. Hauteur du triangle rectangle.
ABC est un triangle rectangle en A, le point H est le pied de la hauteur issue de A.

1. Montrer que la figure obtenue contient trois triangles semblables que l'on précisera.
2. En déduire que $BA^2 = BH\times BC$, $CA^2 = CH\times CB$ et $AH^2 = BH\times CH$.
3. Application : construire sur une feuille non quadrillée à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{35}\text{ cm}$ à partir de deux segments de longueur 7 cm et 5 cm.

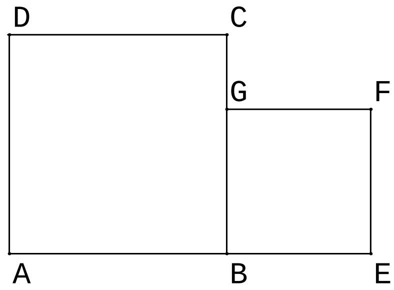
Exercice 3. Trajet minimum (symétrie axiale)



On désire aller du point A au point B en passant par un point M de la droite d. On se demande où l'on doit placer le point M sur d pour que le trajet soit minimum.

1. Simulation : construire la figure, choisir M sur d, calculer la distance $MA + MB$ pour plusieurs positions de M et conjecturer la position de M (on pourra le faire « à la main », ou avec un logiciel de géométrie : fichier TrajetMin en ligne sur le site dans « Activités en ligne »).
2. Démonstration : utiliser la symétrie d'axe d pour justifier la construction du point M qui rend minimale la somme $MA + MB$.

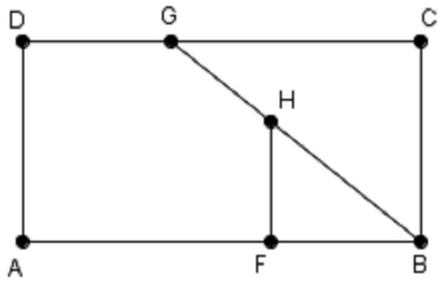
Exercice 4. Puzzle transformant deux carrés en un seul carré



On considère deux carrés $ABCD$ et $EFGH$ de côtés $AD = a$ et $EF = b$. On suppose que $a > b$. On accole ces deux carrés de la manière ci-contre ($B = H$, et A, B, E alignés). On désire réaliser un puzzle transformant ces deux carrés en un seul carré. On notera c le côté du carré que l'on recherche.

1. Construire la figure dans du carton ou du papier (on pourra choisir par exemple $a = 16$ cm et $b = 11$ cm).
2. On considère le point K du segment $[AB]$ tel que $AK = b$. Montrer que les triangles DAK et FEK sont isométriques. En déduire un découpage du puzzle de manière à résoudre le problème posé avec des translations. Peut-on le résoudre avec des rotations ?
3. Quel théorème bien connu ce puzzle nous permet-il de retrouver ?

Exercice 5. Puzzle transformant un rectangle en un autre rectangle, puis en un carré.



Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle de longueur L et de largeur l, le point G est un point du segment $[DC]$, avec $DG < \frac{1}{2}DC$, le point F est le point du segment $[AB]$ tel que $BF = DG$.

1. On découpe le rectangle en trois parties suivant les segments de la figure. Montrer que l'on peut reconstituer un autre rectangle. Quelles transformations a-t-on utilisées ?
2. Peut-on placer le point G sur $[DC]$ de telle façon que le nouveau rectangle obtenu soit un carré ? Si oui, construire à la règle et au compas sur une feuille $A4$ non quadrillée un puzzle rectangulaire, avec $L = 16$ cm et $l = 11$ cm, qui soit transformable en carré avec la méthode vue ci-dessus.

Exercice 6. Agrandissement d'un puzzle (d'après Ermel, Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cycle 3, CM2, p. 303 à 308), Hatier Editeur

Partie 1

On donne le rectangle R constitué des pièces A, B, C, D, E de l'annexe 2, ainsi que la pièce A'.
Construire, à partir de la pièce A', les pièces B', C', D', E' de manière à constituer un agrandissement R' du rectangle R.

Partie 2

La même situation est présentée à des élèves de CM2 : la maîtresse ou le maître donne aux élèves l'annexe 2, présente au tableau les rectangles R et R' l'un à côté de l'autre, avec chaque pièce indiquée par sa lettre, puis dit aux enfants : « La pièce A' est un agrandissement de la pièce A : découpez-là, puis découpez les quatre pièces B', C', D', E' de manière à former le grand rectangle comme au tableau».

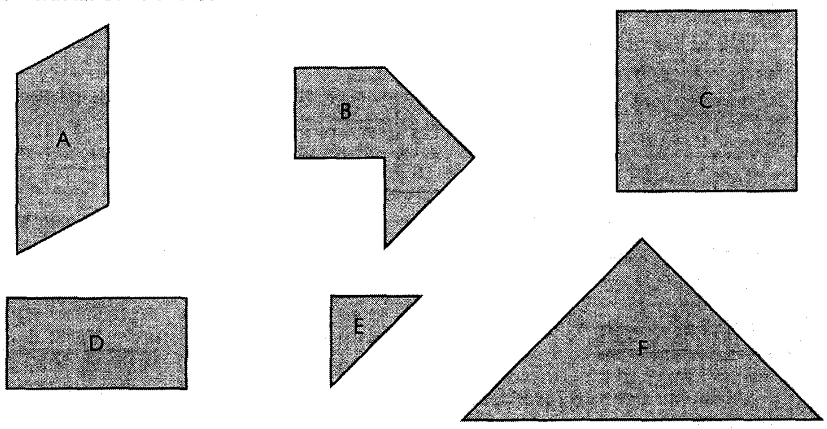
1. Quelle est la notion mise en jeu par cette activité ?
2. Quelle disposition des enfants peut-on envisager ?
3. Quelle procédure de validation les enfants pourront-ils utiliser ?
4. Dans les documents d'accompagnement des programmes de mathématiques (CNDP, 2005), on distingue quatre types de problèmes :
   - problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance ;
   - problèmes destinés à permettre le réinvestissement des connaissances déjà travaillées, à les exercer ;
   - problèmes plus complexes que les précédents, dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances ;
   - problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

   Dans quel(s) type(s) de classification peut-on placer le problème proposé ?
5. Quelles actions l'enseignant peut-il envisager pour aider les enfants à résoudre ce problème ?

Annexe 1 :

Chercher Comparaison et mesure

▶ **Travail sur fiche 26**



❶ Quelles sont les surfaces de même aire ?

❷ Range les surfaces de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire.

❸ On prend la surface D comme unité. Quelle est la mesure des aires de A, B, C et E ?

❹ On prend la surface E comme unité. Quelle est la mesure des aires de B, C, D et F ?

Annexe 2 :

Extrait de la page 67 du manuel *Cap Maths*, CM2, Éditions Hatier, 2004.