TS ARITHMETIQUE feuille 7

Exercice 1 (spécialité) 5 points

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n + 3$, $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

,

1) Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.

2)Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. a. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.
b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n + 2 = 7k$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Exercice 2 4 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2) Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3). Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier
$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$

.

a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7?

,

b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7

.

Étudier le cas où $p = 3n + 2$

.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$a = \overline{1001001000}$ $b = \overline{1000100010000}$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p

.

Sont-ils divisibles par 7 ?