Corrigé du concours blanc de maths du 03/03/09

Exercice 1 :

1. Appelons p la masse en grammes de ce plat.

100 g de ce plat contiennent 23 g de viande.

p g de ce plat contiennent 100 g de viande, donc $p = \dfrac{100 \times 100}{23} \approx 435$ g.

$\boxed{\text{Ce plat a une masse d'environ } 435 \text{ g}}$.

2. Le coefficient multiplicateur est $CM = \dfrac{41600}{51300} \approx 0{,}85 = 1 - 0{,}15$.

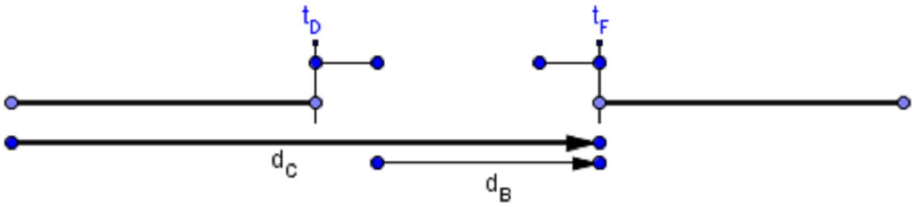
$\boxed{\text{Le pourcentage de diminution est donc de } 15\%}$.

3. Notons p la population initiale, p_1 la population après un mois, p_2 la population après deux mois.

$p_1 = (1 + 0{,}2)p = 1{,}2p$ et $p_2 = (1 - 0{,}1)p_1 = 0{,}9p_1$, d'où $p_2 = 0{,}9 \times 1{,}2p = 1{,}08p = (1 + 0{,}08)p$.

On en déduit que $\boxed{\text{la population d'insectes a augmenté de } 8\ \% \text{ en deux mois}}$.

4. Un petit dessin peut aider…



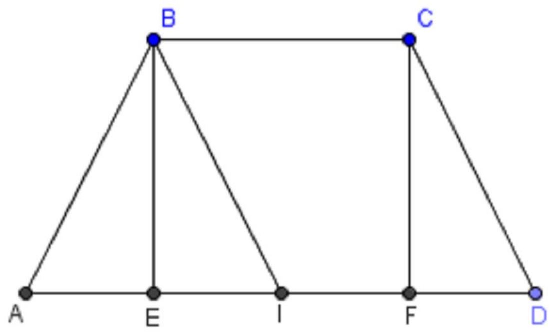
Le dépassement débute au temps t_D, finit au temps t_F. Pendant le temps $t = t_F - t_D$ du dépassement, qui est le même pour le cargo et le bateau, le cargo parcourt la distance d_C, le bateau parcourt la distance d_B, avec $d_C = d_B + 15 + 76 = d_B + 91$.

Notons v_C la vitesse du cargo, v_D la vitesse du bateau, on a $d_C = v_C \times t$, et $d_B = v_B \times t$, avec $v_C = 25\,000$ m/h et $v_B = 13\,000$ m/h. On a donc le système $\begin{cases} d_B = 12\,000t \\ d_B + 91 = 25\,000t \end{cases}$, d'où par soustraction $13\,000t = 91$.

On a donc $t = \dfrac{7}{1\,000} h$. Converti en secondes, cela donne $t = \dfrac{7}{1\,000} \times 3600 = 25{,}2$ s.

$\boxed{\text{La durée du dépassement est } 25{,}2 \text{ s}}$.

Exercice 2 :



1. Une petite figure à main levée (les proportions de la figure ci-contre sont fausses) permet de guider le raisonnement.

Comme $ABCD$ est isocèle, on a $AB = CD$.

D'autre part, $AB + BC + CD = 36$, avec $BC = 12$, donc $2AB = 24$, d'où $\boxed{AB = CD = 12 \text{ m}}$.

2. On sait par hypothèse que $(CD)//(BI)$ et $(CB)//(DI)$, donc $BCDI$ est un parallélogramme.

Par ailleurs, d'après la première question, $BC = CD = 12$, donc $BCDI$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.

On en conclut que $\boxed{BCDI \text{ est un losange}}$.

De plus, $ID = 12$, donc $AI = AD - ID = 24 - 12 = 12$. On sait alors que $AI = AB = BI = 12$,donc $\boxed{ABI \text{ est un triangle équilatéral}}$.

3. Appelons E le pied de la hauteur de sommet B du triangle ABI. Comme ABI est équilatéral, on sait que E est le milieu de $[AI]$, donc $EI = 6$.

Dans le triangle rectangle BEI, $EI = 6$ et $BI = 12$. Le théorème de Pythagore donne $BE^2 = BI^2 - EI^2$, d'où $BE^2 = 6^2(2^2 - 1^2)$, d'où $\boxed{BE = 6\sqrt{3}}$.

Sachant que $\text{Aire}(ABCD) = \dfrac{1}{2}(AD + BC) \times BE$, on a donc $\text{Aire}(ABCD) = \dfrac{1}{2}(24 + 12) \times 6\sqrt{3}$, donc.

$\boxed{\text{Aire}(ABCD) = 108\sqrt{3} \text{ m}^2}$.

Exercice 3 :

A. Notons x le nombre de billets de $1\ 000$ F et y le nombre de billets de $5\ 000$ F utilisés par Moana pour payer.

On sait : d'une part que $1\ 000\ x + 5\ 000\ y = 45\ 000$, équation équivalente à $x + 5y = 45$ (1),

d'autre part, que $10 \leq x + y \leq 15$ (2).

Il n'y a plus qu'à faire tous les essais (méthode exhaustive : 10 cas en utilisant y) pour conclure : on peut restreindre le nombre de cas en remarquant que l'équation (1) équivaut à $x = 5(9 - y)$, avec x entier, donc 5 divise x.

Il suffit donc de tester les quatre cas $x = 0$; $y = 45$: ce cas est en contradiction avec (2),

$x = 5$; $y = 8$: ce cas satisfait à l'encadrement (2),

$x = 10$; $y = 7$: ce cas est en contradiction avec (2),

$x = 15$; $y = 6$: ce cas est en contradiction avec (2).

Conclusion : $\boxed{\text{Moana a utilisé 5 billets de 1 000 F et 8 billets de 5 000 F}}$.

B. Notons x le nombre de billets de 10 €, y le nombre de billets de 50 €, z le nombre de billets de 100 €, t le nombre de billets de 500 €, versés par le banquier pour payer 15 000 €.

On sait que $y = 10x$, $t = 2z$, et que $10\ x + 50\ y + 100\ z + 500\ t = 15\ 000$, équation équivalente en substituant les deux premières équations dans la troisième à $510x + 1\ 100\ z = 15\ 000$. On obtient donc, en divisant par 10, l'équation $51\ x + 110\ z = 1\ 500$ (1), avec x et z entiers positifs.

Il n'y a plus qu'à faire tous les essais (méthode exhaustive : 15 cas en utilisant z) pour conclure : on peut restreindre le nombre de cas en remarquant que l'équation (1) équivaut à $51x = 10\times(150 - 11z)$. Comme 10 et 51 sont premiers entre eux, 10 divise x : on n'a plus qu'à étudier trois cas (en effet $x < 30$, car $51\times30 = 1\ 530 > 1\ 500$)

$x = 0$; $150 - 11z = 0$: impossible avec z entier.

$x = 10$; $150 - 11z = 51$, donc $z = 9$.

$x = 20$; $150 - 11z = 102$: impossible avec z entier.

Conclusion : $x = 10$, $z = 9$, donc ;

le caissier a utilisé $\boxed{\text{10 billets de 10 €, 100 billets de 50 €, 9 billets de 100 €, 18 billets de 500 €}}$.

Vérification : $10\times10 + 100\times50 + 9\times100 + 18 \times 500 = 15\ 000$.

Exercice 3 – questions complémentaires

Par « monnaie » il faut entendre le support matériel qui permet de faire des échanges, des billets et des pièces. Il faut donc proposer des exercices qui utilisent ce support, un matériel imitant de la monnaie ou bien qui l'évoque directement. Un exercice évoquant simplement un contexte de prix comme « j'achète un aticle à 500 F et trois autres à 250 F chacun, combien vais-je payer ? » ne répondrait pas à la question posée.

- ***utilisation de la monnaie pour travailler la numération***.

Objectif : comprendre le système d'écriture des nombres entiers supérieurs à 10 000 et décomposer ces écritures, ou renforcer ces notions.

Exemple : CE2 – les élèves ont à leur disposition des photocopies de billets et de pièces en francs pacifique : 1F, 10F, 100F, 1000F et 10000F.

« 1- Tu vas chez le marchand et tu vas acheter un jeu de console qui coûte 3425 F. Prépare le montant exact en utilisant le moins de billets et de pièces possible .

Ecris la décomposition de 3425 F que tu obtiens avec les billets et les pièces : 3425 F = ...

2- Et si tu voulais acheter la console qui coûte 24630 F quels billets et pièces donnerais-tu ?

3- un article a été payé avec 2 pièces de 100F, 4 billets de 1000 F, 5 pièces de 1 F et pas de pièces de 10F. Quel est son prix ? »

Autre exemple : CM – le monopoly – matériel : une fiche avec des billets dessinés, pas de matériel particulier pour chaque élève

« Tu es le banquier dans le jeu du monopoly et tu as des billets de 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 et 1000 000 F.

1- Un joueur te donne 15 billets de 10 000 et 12 billets de 1000, il voudrait avoir la même somme avec le moins de billets possible, que vas-tu lui donner ?

2- Un joueur veut acheter une carte de rue qui coûte 32 500 F. Si le joueur te donne le montant exact, quels billets va-t-il te donner ? essaie de trouver la solution qui utilise le moins de billets possible, dessine ou écris la solution puis complète l'égalité : 32 500 F = ………………………………………………………………………………..

(On pourrait utiliser un tableau de numération à compléter éventuellement)

3- Tu dois donner à un joueur la somme de 2 736 200 F, quels billets utilises-tu ? Ecris la décomposition obtenue.

4- Tu as 5 billets de 1 000 000, 3 billets de 1000, 9 billets de 10 000, 2 de 100 000 et 1 de 10, quelle somme d'argent as-tu ? »

- ***utilisation de la monnaie pour résoudre des problèmes numériques.***

Objectif : travailler les compléments à 10, 100,1000…

Exemple CE2 :
1- Un article coûte 460 F. Une cliente donne un billet de 1000F, le commerçant lui rend la monnaie en disant : « voilà 40 F qui font 500 et voilà 500 F qui font 1000 ». Explique ce que fait le commerçant et essaie de comprendre pourquoi il dit ça.
2- Tu es le commerçant. Un article coûte 675 F, une cliente te donne 1000 F. Que vas-tu lui rendre ?
3- Une cliente a donné 1000F et tu lui as rendu 3 pièces de 1F, 4 pièces de 10F et 2 pièces de 100F. Quel était le prix de l'article ? »

Objectif : consolider la technique opératoire de l'addition en colonnes

Exemple CE2 : les élèves ont à disposition des photocopies de billets et de pièces de monnaie. Cet exercice est dans le prolongement du premier (CE2 – travail sur la numération). Les élèves sont par deux, chacun a un article avec un prix et doit trouver la décomposition en billets et en pièces du prix de son article. Une fois cela vérifié, on propose aux élèves de payer leurs deux articles en un seul paiement et de trouver la décomposition minimale en pièces et billets à donner au maître (évidemment il faut qu'il y ait des retenues).
Puis exercices d'application individuel sur le même type et mise sous forme de tableau de numération pour faire apparaître les échanges des paquets de 10, de 100 ou de 1000. Le tableau dérive naturellement vers l'addition en colonnes avec retenue.

- ***utilisation de la monnaie pour travailler les nombres décimaux.***

Objectif : consolider la notion de dixième et de centièmes.

Exercice – CM : les élèves ont à leur disposition des pièces de 1euro, de 10c et de 1c.
1- Un article coûte 3,62 euro. Donne le prix exact en utilisant le minimum de pièces.
2- J'ai 5 pièces de 1 euro, 36 pièces de 1c et 28 pièces de 10c. Combien j'ai d'argent en tout ?
3- Si je donne 2 pièce de 10c, 6 pièces de 1 euro et 8 pièces de 1c pour payer un article, quel est le prix de cet article ?

Exercice 4 :

1. a. Une méthode est de chercher le coefficient multiplicatif entre les photos A et B, puis entre les photos A et C, puis de l'interpréter en terme d'augmentation. Comparons par exemple les hauteurs :

$\frac{30}{20} = 1,5 = 1 + \frac{50}{100}$, donc la photo B est un agrandissement de $50\ \%$ de la photo A.

$\frac{50}{20} = 2,5 = 1 + \frac{150}{100}$, donc la photo C est un agrandissement de $150\ \%$ de la photo A.

b. $20\times3 = 60$, donc par linéarité multiplcative,

la largeur d'une photo agrandie qui aurait 60 cm de haut serait $30\times3 = 90$ cm.

2. Remarque : ici, le mot « long » doit être pris au sens mathématique du terme (il correspond donc au mot « large » de la question précédente).

Notons l la largeur cherchée : on a donc $\frac{147}{30} = \frac{l}{20}$, d'où $l = \frac{147\times 20}{30} = 98$.

La largeur d'une photo agrandie de 147 cm de long serait 98 cm.

3. Il nous suffit de raisonner avec les périmètres, le coefficient multiplicatif étant le même que pour la longueur ou la largeur.

Raisonnons avec la photo A, de périmètre $p_A = 2\times(20 + 30) = 100$ cm.

Le coefficient de propormultiplicatif maximal sera donc $\frac{320}{100} = 3,2$. On en conclut que la longueur maximale sera $30\times3,2 = 96$ cm et la largeur maximale sera $20\times3,2 = 64$ cm.

Les dimensions maximales de l'agrandissement de périmètre inférieur à $3,20$ m sont 64×96 (en cm).

Exercice 4 – questions complémentaires

1- La notion travaillée dans cet exercice est la proportionnalité : pour chaque photo, le coefficient de proportionnalité entre les deux côtés du rectangle reste fixe et définit la forme de la photo : il vaut ici 1,5.
Par ailleurs, il y a une situation d'agrandissement/réduction qui met en relation les dimensions d'une photo par rapport à l'autre. Si on fait un tableau pour mieux comprendre la notion, on pourrait proposer par exemple :

	Photo A	Photo B	Photo C	
Largeur du rectangle (appelée hauteur de la photo)	20	30	50	$\times 1,5$
Longueur du rectangle (appelée largeur de la photo)	30	45	75	
	$\times 1,5$		$\times 2,5$	

2- La proportionnalité est enseignée en tant que telle à partir du CM1. Cette situation peut être proposée en CM1 ou en CM2.

3- a/ analyse des travaux d'élèves.
Appelons l_1 et L_1 les dimensions du premier rectangle, l_2 et L_2 celles du deuxième et l_3 et L_3 celles du troisième.
La réponse attendue est *a priori* celle-ci : l_2 et L_2 sont une demi fois plus grandes que l_1 et L_1, et l_3 et L_3 sont une fois et demi plus grandes que l_1 et L_1. Ce qui, traduit en pourcentage, donne la réponse précédente à la question 1 de la partie mathématique.
ELISE.

- *Ce qu'elle a fait :*

Elle a remarqué qu'entre l_1 et l_2 il y a 10cm de différence et qu'entre l_2 et l_3 il y a 20cm de différence et que 20 est le double de 10. Elle en déduit que cette idée s'applique aussi aux longueurs, et qu'il faut partir de 15, donc ensuite ajouter 30 cm. Sa procédure est donc basée sur des relations de linéarité additive et multiplicative.

- *Conformité de sa réponse :*

Sa production n'est pas exactement conforme à ce qu'on attendait, elle n'a pas répondu à la question posée : elle a su traduire le mot « augmentation », mais pas « en proportion », puisque elle utilise un agrandissement exprimé en ajout d'une valeur et non pas en proportion d'agrandissement.

- *Bilan :*

Elise a reconnu la notion en jeu, a décelé quelle procédure elle pourrait utiliser mais n'a pas compris la question qui lui était posée.
ANTOINE

- *Ce qu'il a fait :*

Il a aussi donné un agrandissement absolu et non relatif, c'est à dire la différence en cm entre les dimensions des photos A et B et A et C. Il a considéré en plus le périmètre des rectangles et donne aussi leur agrandissement en différence de longueur.

- *Conformité de sa réponse :*

Comme Elise, sa production n'est pas conforme à ce qu'on attendait, il n'a pas répondu à la question posée puisque il exprime un agrandissement en ajout d'une valeur et non pas en proportion d'agrandissement.

- *Bilan :*

Antoine n'a pas compris la question : il a compris le mot « augmentation », mais pas ce que signifie « en proportion ».
JEREMY

- *Ce qu'il a fait :*

Jeremy a calculé des aires et a exprimé un agrandissement des photos en différence d'aires. Il a comme les autres donné une différence absolue et non pas en proportion. Ses calculs d'aires sont justes mais les différences sont fausses.

- *Conformité de sa réponse :*

Sa production n'est pas conforme à ce qu'on attendait, il n'a pas répondu à la question posée puisque il calcule un agrandissement sur les aires alors que la question porte sur les « dimensions », ce qui sous-entend « les longueurs des côtés ».

- *Bilan :*

Jeremy est dans le même cas qu'Antoine. Il n'a pas compris la question, a confondu les dimensions et les aires, a compris le mot augmentation et n'a pas entendu ce qui signifie « en proportion ».
Remarque entre nous (cela n'est pas à signaler sur la copie, quoique…) : la consigne de cet exercice est extrèmement mal formulée : ce problème mériterait d'être reformulé entièrement… C'est incompréhensible pour la plupart des élèves de CM (et certains d'entre vous)..

b- procédures utilisées pour la question b
ELISE :
En doublant les proportions de la photo B elle utilise une linéarité multiplicative. Puisqu'on a doublé 30, il faut doubler aussi 45.
ANTOINE.
Il utilise la même linéarité multiplicative qu'Elise mais il l'exprime mal en écritures mathématiques. Sa première écriture est fausse bien que l'idée soit juste.
JEREMY
Il utilise une linéarité additive en remarquant que quand on ajoute 10cm sur la hauteur cela rajoute 15cm sur la longueur. Il reporte les différences des dimensions des photos A et B sur les photos C et D pour trouver la dimension manquante. Sa procédure est correcte.

c- Les remédiations ou aides possibles sont de plusieurs sortes mais il faut faire comprendre aux élèves que la proportionnalité dans ce problème se trouve entre la longueur et la largeur, mais que dans la première question, on relie entre elles les dimensions des photos, c'est-à-dire les colonnes d'un tableau de proportionnalité posé en ligne.
Une explication orale peut être donnée qui explique que la forme d'une photo est donnée par le rapport entre longueur et largeur, mais cela ne serait sans doute pas le plus pertinent.
Il vaudrait mieux leur donner un début de tableau comme celui donné en réponse de la question 1 (sans les coefficients de proportionnalité) ou au moins les aiguiller vers la réalisation d'un tableau. Cette réorganisation des données de l'énonce permettrait aux élèves de mieux en saisir le cadre et donc de débloquer des procédures connues.
Un graphique pourrait aussi être fait en mettant en abscisse les longueurs et en ordonnées les longueurs. Cette aide serait alors plus qu'une aide car les élèves ne l'auraient jamais fait tout seuls et c'est alors leur donner quasiment la solution…