

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle:

$$(E_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!} * e^{-x}$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur \mathbb{R} , vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x) e^{-x} .$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h(x) = \frac{x^n}{n!}$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$.

Quelle est alors la fonction g ?

2) Soit ϕ une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

a. Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation :

$$(F) \quad y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c) Déterminer la solution générale ϕ de l'équation (E_n) .

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.