Analyse vectorielle : gradient, rotationnel et divergence

1 Notions fondamentales

1.1 Opérateur 'nabla'

L'opérateur 'nabla' ou $\vec{\nabla}$ est très utile en analyse vectorielle. Il permet de déterminer les notions de gradient, rotationnel, divergence et laplacien de manière simple et concise. Il se définit comme suit :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

1.2 Travail d'un champ vectoriel le long d'une courbe - Intégrale curviligne

Soient un champ vectoriel $\vec{A}$ et deux points de l'espace P_a et P_b reliés par une courbe C. A chaque point de C, on assigne un vecteur $\vec{A}$.

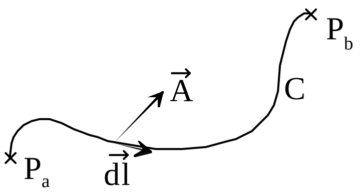

Figure 1

Le travail du champ vectoriel $\vec{A}$ de P_a à P_b le long de C s'écrit ainsi :

$$T = \int_{P_a}^{P_b}{}_C \; \vec{A} \cdot \vec{dl} \qquad (2)$$

On montre que :

$$\int_{P_b}^{P_a}{}_C \; \vec{A} \cdot \vec{dl} = -\int_{P_a}^{P_b}{}_C \; \vec{A} \cdot \vec{dl} \qquad (3)$$

Si $P_a = P_b$, alors on parle de **circulation** du champ vectoriel $\vec{A}$ le long de la courbe fermée C et on écrit :

$$T = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \tag{4}$$

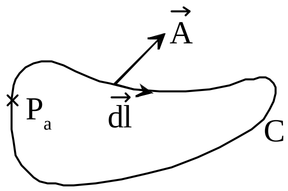

Figure 2

1.3 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface - Intégrale de surface

Soient un champ vectoriel $\vec{A}$ et une surface S. Chaque unité de surface dS au voisinage d'on point P peut être représenté par un vecteur perpendiculaire à S au point P appelé simplement $\vec{dS}$. Si on définit $\vec{n}(x,y,z)$ le vecteur de module 1 perpendiculaire à S en tout point, on trouve $\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS$.

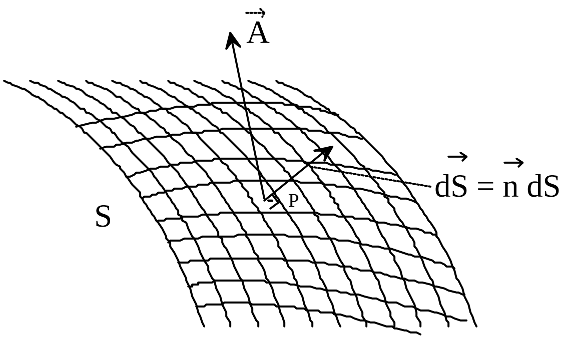

Figure 3

Le flux du champ vectoriel $\vec{A}$ à travers la surface S est défini ainsi :

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS \tag{5}$$

Si la surface S est fermée on écrit :

$$\Phi = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS \tag{6}$$

La notion de flux à travers une surface fermée est importante. Si aucune 'source' ne se trouve à l'intérieur de S, alors ce flux doit être nul.

Remarque importante : quand on parle de surface fermée S, le vecteur $\vec{n}$ est toujours dirigé vers **l'extérieur** de S.

Prenons le cas d'un écoulement d'eau à travers un tuyau. Imaginons une surface fermée virtuelle de la forme d'un cylindre (voir Figure 4).

Le champ vectoriel est la vitesse de l'eau $\vec{v}$. L'écoulement à travers la surface totale du cylindre est égale au flux à travers S_1 et S_2. En effet, aucun flux ne passe à travers les parois du tuyau (les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{dS_3}$ sont perpendiculaires sur toute la surface de S_3).

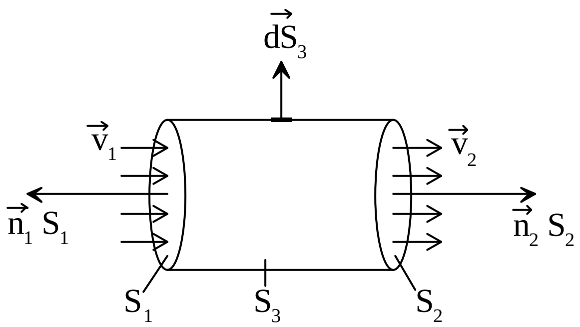

Figure 4

Si on calcule le flux à travers la surface fermée, on trouve :

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{7}$$

En admettant que (voir Figure 4) :

$S_1 = S_2 = S$	(surfaces S_1 et S_2 égales)
$\vec{n} = \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$	(vecteurs de surface opposés)
$\vec{v}(S_1) = \vec{v}_1$	(vitesse constante $v=v_1$ sur la surface S_1)
$\vec{v}(S_2) = \vec{v}_2$	(vitesse constante $v=v_2$ sur la surface S_2)
$\vec{v}_1 // \vec{v}_2 // \vec{n}_1 // \vec{n}_2$	(vitesses parallèles aux vecteurs surfaces)

On trouve :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{S_1} \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{n_1} \cdot dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{n_2} \cdot dS \\
\Phi &= -\iint_{S_1} \overrightarrow{v_1} \cdot \vec{n} \cdot dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{v_2} \cdot \vec{n} \cdot dS \\
\Phi &= -\iint_{S_1} v_1 \cdot dS + \iint_{S_2} v_2 \cdot dS \\
\Phi &= -S_1 \cdot v_1 + S_2 \cdot v_2 \\
\Phi &= S \cdot (v_2 - v_1)
\end{aligned} \tag{8}$$

S'il n'y a pas de source à l'intérieur du tuyau, on en conclut que le flux total est nul, donc :

$$v_2 = v_1 \tag{9}$$

Si les surfaces S_1 et S_2 n'avaient pas été égales, on aurait trouvé de (8) :

$$S_2 \cdot v_2 = S_1 \cdot v_1 \tag{10}$$

Grosso modo, les équations (9) et (10) disent que, sans source d'eau interne, ce qui sort du tuyau doit être égal à ce qui y rentre !

1.4 Lignes de champ

1.4.1 Pour un champ vectoriel à deux dimensions

Soit un champ vectoriel donné en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A}(x,y) = \begin{pmatrix} a_x(x,y) \\ a_y(x,y) \end{pmatrix} \quad (11)$$

On appelle **lignes de champs** l'ensemble des courbes parallèles au champ vectoriel $\vec{A}$. On les trouve en résolvant l'équation différentielle :

$$\frac{\partial x}{a_x} = \frac{\partial y}{a_y} \quad (12)$$

1.4.2 Exemple

Soit le champ vectoriel :

$$\vec{A}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 y \end{pmatrix} \quad (13)$$

On applique :

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{-x^2 y} \quad (14)$$

On trouve :

$$y = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (15)$$

avec C à déterminer en fonction des conditions initiales.

1.4.3 Pour un champ vectoriel à trois dimensions

Soit un champ vectoriel donné en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix} \quad (16)$$

On appelle **lignes de champs** l'ensemble des courbes parallèles au champ vectoriel $\vec{A}$. On les trouve en résolvant l'équation différentielle :

$$\frac{\partial x}{a_x} = \frac{\partial y}{a_y} = \frac{\partial z}{a_z} \quad (17)$$

1.4.4 Exemple

Soit le champ vectoriel :

$$\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -x^2y \\ -z^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

On applique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{x} = \dfrac{\partial y}{-x^2y} \\ \dfrac{\partial x}{x} = \dfrac{\partial z}{-z^2} \end{cases} \tag{19}$$

On trouve :

$$\begin{cases} y = C_1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ x = C_2 \cdot e^{\frac{1}{z}} \end{cases} \tag{20}$$

avec C_1 et C_2 à déterminer en fonction des conditions initiales. La première équation de (20) est la projection des lignes de champ dans le plan xOy et la seconde équation est la projection des lignes de champ dans le plan xOz. Il faut en effet deux équations pour déterminer une courbe simple dans $\mathbb{R}^3$.

1.4.5 Lignes de champ en coordonnées cylindriques

Si le champ vectoriel $\vec{A}$ est donné en coordonnées cylindriques :

$$\vec{A}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix}_{<u_r,u_\varphi,u_z>} \tag{21}$$

Les équations différentielles des lignes de champ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{a_r} = r \cdot \dfrac{\partial \varphi}{a_\varphi} \\ \dfrac{\partial r}{a_r} = \dfrac{\partial z}{a_z} \end{cases} \tag{22}$$

1.4.6 Lignes de champ en coordonnées sphériques

Si le champ vectoriel $\vec{A}$ est donné en coordonnées sphériques :

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix}_{<u_r,u_\theta,u_\varphi>} \tag{23}$$

Les équations différentielles des lignes de champ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{a_r} = r \cdot \dfrac{\partial \theta}{a_\theta} \\ \dfrac{\partial r}{a_r} = r \cdot \dfrac{\partial \varphi}{a_\varphi} \end{cases} \tag{24}$$

2 Gradient

Le gradient d'une fonction f s'exprime ainsi :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{25}$$

En utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$, on trouve plus simplement :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{\nabla} \cdot f \tag{26}$$

Entrée : le champ scalaire f

Sortie : le champ vectoriel $\vec{\nabla} f$

Note : un champ de gradient est encore appelé **champ conservatif**.

2.1 Dérivée du champ scalaire dans une direction

Soit une direction indiquée par le vecteur :

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{27}$$

avec $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ (vecteur de module 1).

La dérivée du champ scalaire f dans la direction indiquée par $\vec{e}$ au point (x, y, z) est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \vec{e} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} f \tag{28}$$

2.2 Interprétation du gradient

On conclut de (28) que le gradient indique la direction où la dérivée de f est la plus élevée. Si on prend l'exemple des cartes géographiques 2D, le gradient indiquera toujours la direction de la pente la plus élevée.

2.2.1 Equipotentielles

Les **lignes équipotentielles** de f, c'est à dire les lignes virtuelles joignant les points de l'espace (x, y, z) où le champ scalaire f est constant, sont **perpendiculaires** au gradient.

2.2.2 Travail d'un champ de gradient

Soit f une fonction de plusieurs variables, $\vec{\nabla} f$ son champ de gradient et C une courbe quelconque reliant deux points P_a et P_b. On montre la très importante loi suivante :

$$\int_{P_a\,C}^{P_b} \vec{\nabla} f \cdot \vec{dl} = f\left(P_b\right) - f\left(P_a\right) \tag{29}$$

Quel que soit le chemin C, le travail d'un champ de gradient entre deux points P_a et P_b est toujours identique et égal à $f(P_b)-f(P_a)$.

Si C est un chemin fermé, on conclut de (29) :

$$\oint_C \vec{\nabla} f \cdot \vec{dl} = 0 \tag{30}$$

L'intégrale curviligne d'un champ de gradient le long d'un chemin fermé C est toujours nulle.

2.3 Gradient en coordonnées cylindriques

Le gradient d'une fonction donnée en coordonnées cylindriques f(r, φ, z) s'exprime ainsi :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{<u_r, u_\varphi, u_z>} \tag{31}$$

2.4 Gradient en coordonnées sphériques

Le gradient d'une fonction donnée en coordonnées sphériques f(r, θ, φ) s'exprime ainsi :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{<u_r, u_\theta, u_\varphi>} \tag{32}$$

2.5 Exemple de gradient pour une fonction de deux variables

Soit la fonction z=f(x, y) définie ainsi :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{33}$$

$$\vec{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \tag{34}$$

La Figure 5 montre les équipotentielles de f ainsi que son champ de gradient.

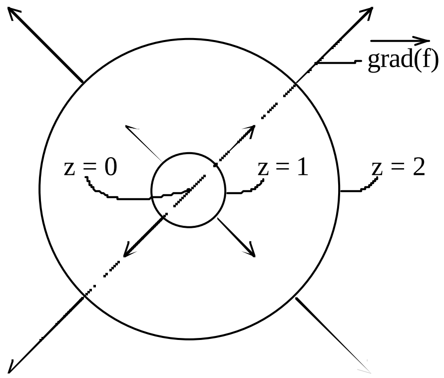

Figure 5

Si on cherche à présent les lignes de champ du gradient, on trouve en appliquant (12) :

$$\frac{\partial x}{2x} = \frac{\partial y}{2y} \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot x \tag{35}$$

Soient les points $P_a(1, 2)$ et $P_b(2, 4)$, avec le chemin C: y=2x reliant les deux points. Sur ce chemin, on conclut que dy=2·dx. Si on calcule le travail du champ de gradient le long de C, on trouve :

$$\int_{P_a}^{P_b} {}_C\ \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = \int_{P_a}^{P_b} {}_C \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_{x=1}^{2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \cdot (2x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 2 \cdot dx \end{pmatrix} = \int_{x=1}^{2} 10x \cdot dx = 15 \tag{36}$$

En utilisant (29), on trouve beaucoup plus directement :

$$\int_{P_a}^{P_b} {}_C\ \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = \left[2^2 + 4^2\right] - \left[1^2 + 2^2\right] = 15 \tag{37}$$

3 Rotationnel

Soit un champ vectoriel $\vec{A}$ défini de la manière suivante :

$$\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{38}$$

Le rotationnel de $\vec{A}$ s'exprime ainsi :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{39}$$

En utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$, on trouve plus simplement :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{40}$$

Entrée : le champ vectoriel $\vec{A}$
Sortie : le champ vectoriel $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

3.1 Théorème de Stokes

On veut calculer la **circulation** d'un champ vectoriel $\vec{A}$ le long d'une **courbe fermée C**. On définit une surface S quelconque, mais dont le bord est délimité par C. On admet encore que les dérivées partielles de a_x, a_y et a_z sont continues dans toute une région de $\mathbb{R}^3$ contenant S. Le théorème de Stokes s'énonce ainsi :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot \vec{n} \cdot dS \tag{41}$$

La circulation de $\vec{A}$ le long de C est égale à l'intégrale de surface du rotationnel de $\vec{A}$ sur n'importe quelle surface S dont le bord est délimité par la courbe C.

Le sens de $\vec{n}$ (vecteur perpendiculaire à S) dépend du sens de l'intégration le long de C. On dit de la courbe C qu'elle est **orientée**. Pour connaître le sens de $\vec{n}$, on applique la règle du tire-bouchon: si un tire-bouchon effectue une rotation dans la direction définie par l'orientation de C, le sens du déplacement du tire-bouchon donne le sens de $\vec{n}$ (voir Figure 6).

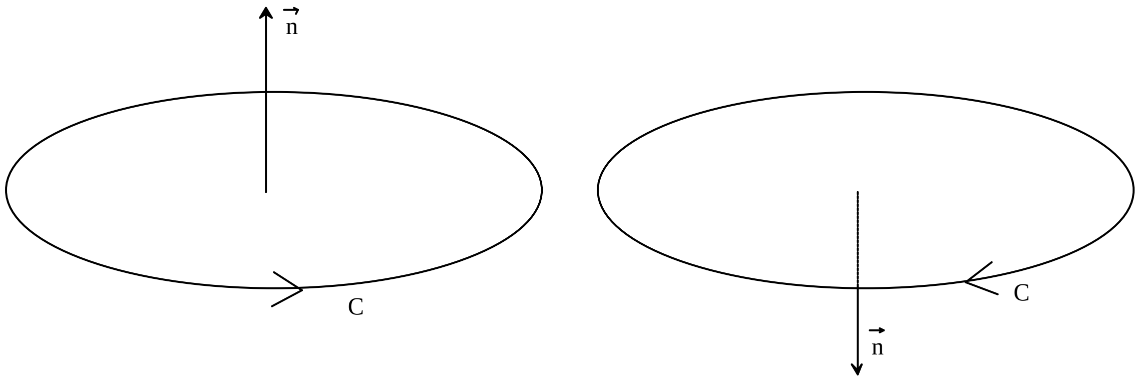

Figure 6

3.2 Rotationnel d'un champ de gradient

Soit une fonction quelconque f(x, y, z). Si on calcule le rotationnel de son champ de gradient on trouve :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y\cdot\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\cdot\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\cdot\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\cdot\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (42)$$

Le rotationnel d'un champ de gradient donne un champ nul. L'inverse est vrai : si le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est le vecteur nul, alors $\vec{A}$ est un champ de gradient. On en conclut que la circulation d'un champ de gradient le long d'une courbe fermée est toujours nul, ce que nous savions déjà (voir (30) page 7).

En regardant de plus près (42), on remarque que le produit vectoriel $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f$ a comme opérandes $\vec{\nabla}$ et un multiple de $\vec{\nabla}$: les deux opérandes du produit vectoriel sont 'alignés', donc le résultat est forcément nul.

3.3 Rotationnel en coordonnées cylindriques

Le rotationnel d'un champ donné en coordonnées cylindriques $\vec{A}(r,\varphi,z)$ s'exprime ainsi :

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\\[2ex] \frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\\[2ex] \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot a_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot a_r)}{\partial\varphi}\end{pmatrix}_{<u_r,u_\varphi,u_z>} \tag{43}$$

3.4 Rotationnel en coordonnées sphériques

Le rotationnel d'un champ donné en coordonnées sphériques $\vec{A}(r,\theta,\varphi)$ s'exprime ainsi :

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r\cdot\sin(\theta)}\cdot\left(\frac{\partial(\sin(\theta)\cdot a_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\\[2ex] \frac{1}{r\cdot\sin(\theta)}\cdot\left(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(r\cdot\sin(\theta)\cdot a_\varphi)}{\partial r}\right)\\[2ex] \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial(r\cdot a_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\end{pmatrix}_{<u_r,u_\theta,u_\varphi>} \tag{44}$$

3.5 Exemple d'application

Soit le champ vectoriel $\vec{A}$ suivant :

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}e^x+2y+\sin(x^2z)\\ 12x+\operatorname{arctg}(y\cdot z)\\ \cos(x\cdot y\cdot z)\end{pmatrix} \tag{45}$$

Soit encore la courbe C définie par le cercle :

$$x^2+y^2=R^2 \tag{46}$$

Le sens de C est le sens trigonométrique (sens contraire des aiguilles de la montre).

Calculer la circulation de A le long de la courbe orientée C.

Résolution

On va calculer cette circulation au moyen du rotationnel.

Comme C est comprise dans le plan xOy, on va prendre comme surface d'intégration le cercle délimité par C et situé sur xOy. Bien entendu, on pourrait choisir une autre surface, mais cela n'aurait pas beaucoup de sens…

Comme C est orientée dans le sens trigonométrique, le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est le suivant :

$$d\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dx \cdot dy \tag{47}$$

On calcule le rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} -x \cdot z \cdot \sin(x \cdot y \cdot z) - \left(\dfrac{y}{1 + y^2 \cdot z^2} \right) \\ x^2 \cdot \cos(x^2 \cdot z) - (-y \cdot z \cdot \sin(x \cdot y \cdot z)) \\ 12 - (2) \end{pmatrix} \tag{48}$$

On calcule la circulation :

$$T = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dx \cdot dy = \iint_S 1 \cdot dx \cdot dy = 10 \cdot \pi \cdot R^2 \tag{49}$$

On voit que les deux premiers coefficients du rotationnel sont annulés par une multiplication par zéro, donc on n'en tient pas compte ! En étant un peu malin, on se serait même épargné de les calculer…

4 Divergence

Soit un champ vectoriel $\vec{A}$ défini de la manière suivante :

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_x(x, y, z) \\ a_y(x, y, z) \\ a_z(x, y, z) \end{pmatrix} \tag{50}$$

La divergence de $\vec{A}$ s'exprime ainsi :

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{51}$$

En utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$, on trouve plus simplement :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \tag{52}$$

Entrée : le champ vectoriel $\vec{A}$
Sortie : le champ scalaire $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

4.1 Théorème d'Ostrogradski

On veut calculer le flux total d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers une surface fermée S. On définit V le volume délimité par S. On admet encore que les dérivées partielles de a_x, a_y et a_z sont continues dans V. Le théorème d'Ostrogradski s'énonce ainsi :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) \cdot dV \tag{53}$$

Le flux de $\vec{A}$ à travers une surface fermée S est égale à l'intégrale volumique sur V de la divergence de $\vec{A}$.

4.2 Divergence d'un champ de gradient - Laplacien

Soit un champ scalaire f quelconque. Si on calcule la divergence de son gradient, on trouve :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{54}$$

On appelle **laplacien scalaire de f** la divergence du gradient de f, et on le note Δf ou $\nabla^2 f$.

4.3 Divergence d'un champ de rotationnel

Soit un champ vectoriel $\vec{A}$ quelconque. Si on calcule la divergence de son rotationnel, on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \\ &\frac{\partial^2 a_z}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \cdot \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \cdot \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \cdot \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \cdot \partial y} = 0\end{aligned} \tag{55}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle. En observant de plus près (54), on remarque que $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ est perpendiculaire à $\vec{\nabla}$, donc le produit mixte $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ est forcément nul.

4.4 Divergence/laplacien en coordonnées cylindriques

La divergence d'un champ donné en coordonnées cylindriques $\vec{A}(r, \varphi, z)$ s'exprime ainsi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{56}$$

Le laplacien scalaire d'une fonction donnée en coordonnées cylindriques $f(r,\varphi,z)$ s'exprime ainsi :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (57)$$

4.5 Divergence/laplacien en coordonnées sphériques

La divergence d'un champ donné en coordonnées sphériques $\vec{A}(r,\theta,\varphi)$ s'exprime ainsi :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(r^2\cdot a_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial(\sin(\theta)\cdot a_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (58)$$

Le laplacien scalaire d'une fonction donnée en coordonnées sphériques $f(r,\theta,\varphi)$ s'exprime ainsi :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \qquad (59)$$

4.6 Exemple d'application

Soit le champ vectoriel $\vec{A}$ suivant :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5x+\sin(y^2 z) \\ \operatorname{arctg}(x\cdot z)+4y \\ \cos(x\cdot y)-6z \end{pmatrix} \qquad (60)$$

Soit encore la surface fermée S définie par la sphère :

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \qquad (61)$$

Calculer le flux total de $\vec{A}$ à travers S.

Résolution

On va calculer ce flux au moyen de la divergence.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = (5)+(4)+(-6) = 3 \qquad (62)$$

On applique le théorème :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (3)\cdot dV = 3\cdot \text{Volume} = 4\pi\cdot R^3 \qquad (63)$$

4.7 Autre définition de la divergence

Imaginons un champ vectoriel $\vec{A}$ défini au point P. Imaginons autour de P une surface infinitésimale S de forme quelconque et de volume V. La divergence de $\vec{A}$ au point P vaut :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\!\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (64)$$

Cette dernière équation illustre bien l'interprétation de la divergence. La divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}$ en un point P nous donne une grandeur de la 'source' de $\vec{A}$ en ce point.

- Si un champ vectoriel a une divergence nulle en un point, il n'y a aucune 'source' en ce point.
- Si un champ vectoriel a une divergence nulle en tout point (champ de rotationnel), ce champ n'a aucune 'source'.

5 Laplacien vectoriel

Pour être exhaustif, citons encore le laplacien vectoriel.

Soit un champ vectoriel $\vec{A}$ défini de la manière suivante :

$$\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{65}$$

Le **laplacien vectoriel** de $\vec{A}$ s'exprime ainsi :

$$\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} \\ \\ \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \\ \Delta a_y \\ \\ \Delta a_z \end{pmatrix} \tag{66}$$

Entrée : le champ vectoriel $\vec{A}$
Sortie : le champ vectoriel $\Delta\vec{A}$

6 Résumé

On va admettre un champ scalaire f et un champ vectoriel $\vec{A}$.

6.1 Coordonnées cartésiennes

Gradient $$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Rotationnel $$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Divergence $$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Laplacien scalaire $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplacien vectoriel $$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

6.2 Coordonnées cylindriques

Gradient
$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{<u_r, u_\varphi, u_z>}$$

Rotationnel
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial a_\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial (r \cdot a_\varphi)}{\partial r} - \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial (r \cdot a_r)}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{<u_r, u_\varphi, u_z>}$$

Divergence
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Laplacien scalaire
$$\Delta f = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

6.3 Coordonnées sphériques

Gradient

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{<u_r, u_\theta, u_\varphi>}$$

Rotationnel

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \left(\dfrac{\partial (\sin(\theta) \cdot a_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \dfrac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \left(\dfrac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial (r \cdot \sin(\theta) \cdot a_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \dfrac{1}{r} \cdot \left(\dfrac{\partial (r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}_{<u_r, u_\theta, u_\varphi>}$$

Divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial (\sin(\theta) \cdot a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Laplacien scalaire

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$