

Université Paris XII Val de Marne

Année 2007–2008,

Licence, parcours maths, 3ème année.

COURBES ET SURFACES.

Chapitre 1

Courbes paramétrées

Une droite dans \mathbb{R}^2 est un objet idéalement commode à étudier. On peut la définir par une *équation* comme l'ensemble des couples (x, y) vérifiant une relation du type $ax + by = c$, où a et b sont deux réels dont un au moins est non nul. On peut également la définir sous forme *paramétrique* à l'aide d'un point P et d'un vecteur directeur U comme ensemble des points de la forme $P + tU$, où t parcourt l'ensemble des réels. Mais surtout, on peut la définir *intrinsèquement*, comme un sous-espace affine de dimension 1 de \mathbb{R}^2 . C'est une définition particulièrement satisfaisante pour l'esprit, même si elle est moins élémentaire que les précédentes, car elle définit ce qu'est une droite au lieu d'en définir l'équation ou la paramétrisation.

Malheureusement, sauf exceptions notables comme les coniques, cette dernière possibilité ne nous est pas offerte pour définir les objets géométriques plus généraux que sont les courbes ou les surfaces. On doit recourir à une paramétrisation pour les décrire en restant à un niveau mathématique abordable.

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle *courbe paramétrée* une application continue $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de \mathbb{R} et n un entier strictement positif. La courbe est dite *plane* si $n = 2$ et *gauche* si $n = 3$. La courbe est dite *fermée* si $I = [a, b]$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Une courbe paramétrée γ est dite *de classe C^k* si d'une part l'application γ est C^k et d'autre part, dans le cas d'une courbe fermée définie sur $[a, b]$, si les dérivées d'ordre 1 jusqu'à k se raccordent en a et b , c.à.d. si $\gamma^{(i)}(a) = \gamma^{(i)}(b)$ pour $i = 1, \dots, k$. Lorsqu'on parlera de courbe C^k , on sous-entendra que $k \geq 1$. De même, γ est *dérivable* si l'application γ est dérivable et, dans le cas d'une courbe fermée définie sur $[a, b]$, si $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.

La *trace* ou le *support* de γ est l'ensemble $\gamma(I)$. Un élément de $\gamma(I)$ est appelé un *point de γ* . Un point $P \in \gamma(I)$ est dit *simple* s'il existe un unique $t \in I$ tel que $\gamma(t) = P$ ou, dans le cas d'une courbe fermée définie sur $[a, b]$, si a et b

sont les seules solutions de $\gamma(t) = P$. La courbe γ est *simple* si tous ses points sont simples. Ceci revient à dire que l'application γ est injective ou, dans le cas où γ est fermée et définie sur $[a, b]$, que la restriction de γ à $[a, b[$ est injective (Vérifier).

Si γ est dérivable, $t \in I$ est dit *régulier* si le vecteur $\gamma'(t)$ est non nul. On dira que la courbe est *régulière* si elle est dérivable et $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Si tout t tel que $P = \gamma(t)$ est régulier, on dit que le point P est régulier.

Remarque 1. Une courbe paramétrée peut être vue comme la trajectoire d'un point dans \mathbb{R}^n , le point $\gamma(t)$ représentant la position du point à l'instant t . C'est une description cinématique. L'objet géométrique, qui est celui qui nous intéresse, c'est plutôt le support de la courbe. Il faudra donc être attentif en introduisant des notions à celles qui sont d'ordre cinématique (vitesse, accélération) et celles qui sont d'ordre géométrique (courbure, longueur). On reconnaîtra ces dernières à ce qu'elles sont invariantes par changement de paramétrisation.

Remarque 2. Le « vrai » espace dans lequel nous vivons n'est pas \mathbb{R}^3 mais un espace affine de dimension 3. Si l'on fixe un point O de cet espace affine et si l'on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on peut associer à un point de l'espace ses coordonnées (x, y, z) dans ce repère, et ce triplet de coordonnées est un élément de \mathbb{R}^3 . Nous préférons travailler directement dans \mathbb{R}^3 plutôt que d'introduire un espace abstrait E (qui serait un espace affine euclidien), mais il faut être conscient que l'on travaille alors dans un système de coordonnées particulier, et que les notions que l'on définit doivent pour être intéressantes être invariantes par changement de repère orthonormé. Nous y reviendrons.

Un autre inconvénient est que les points et les vecteurs qui dans un espace affine sont des objets de natures différentes, sont représentés ici tous deux par des éléments de \mathbb{R}^n . Toutefois nous appellerons certains de ces éléments « vecteurs » et d'autres « points », et nous représenterons sur les figures les uns par des flèches et les autres par des points.

Remarque 3. Pour comprendre le terme de « courbe régulière », il faut remarquer que si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, où x et y sont deux fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{R} , alors la dérivabilité de x et y ne garantit pas que le support $\gamma(I)$ soit une courbe sans angles.

Posons par exemple pour tout réel t

$$x(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

Ces deux fonctions sont C^1 (le démontrer) et pourtant la trace $\gamma(\mathbb{R})$, représentée sur la figure 1.1, présente un angle. Un autre exemple est $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, plus facile à écrire mais plus difficile à comprendre (tracer $\gamma(\mathbb{R})$ dans ce cas).

On peut expliquer ce phénomène ainsi : la dérivabilité des fonctions x et y est en rapport avec ce que « ressent » quelqu'un dont la trajectoire dans le plan est définie par l'application γ . Mais cette personne peut faire un angle sans ressentir d'à-coup, il lui suffit pour cela de s'arrêter momentanément au point anguleux, de changer de direction, puis de repartir. Ce cas de figure est exclu

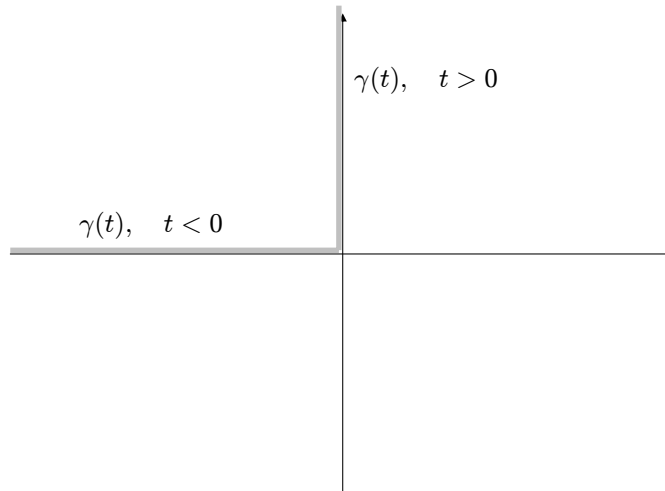


FIG. 1.1 – Angle

pour une courbe régulière, car alors γ' ne s'annule pas, et donc la trajectoire ne fait pas de pause. La dérivabilité de γ garantit dans ce cas que $\gamma(I)$ est « lisse » au sens courant.

1.2 Exemples

1.2.1 Droite

Définition 2. Une partie $D \subset \mathbb{R}^n$ est une *droite affine* s'il existe $P \in \mathbb{R}^n$ et $U \in \mathbb{R}^n$ tels que $U \neq 0$ et

$$D = \{P + tU \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

On dit aussi que D est la droite passant par P et de vecteur directeur U (Voir Figure 1.2).

Une autre façon d'exprimer (1.1) est de dire que D est le support de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = P + tU$. A titre d'exercice on montrera que celle-ci est C^∞ , régulière et simple. On remarquera que D est aussi le support de la courbe $\gamma_1(t) = P + t^3U$ définie sur \mathbb{R} . Quel est le support

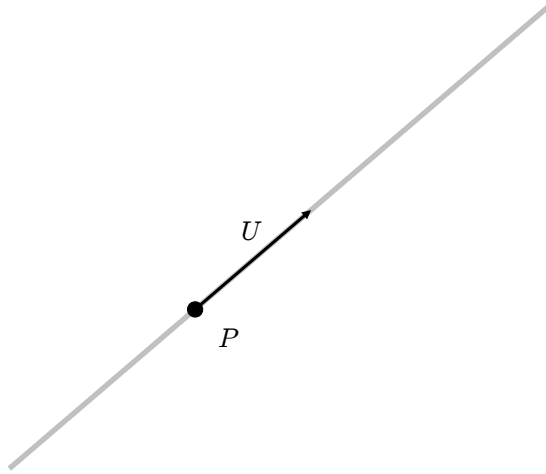


FIG. 1.2 – Droite

de la courbe paramétrée $\gamma_2(t) = P + t^2U$ définie sur \mathbb{R} ? Et quelle trajectoire décrit le point $\gamma_2(t)$ lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$?

Une autre façon d'exprimer (1.1) est de dire que Q appartient à D si et seulement si $Q - P$ est colinéaire à U . Dans le cas où $n = 2$, ceci permet de définir une droite par son équation : notons $P = (x_0, y_0)$, $U = (a, b)$ et $Q = (x, y)$. On a

$$Q \in D \iff \det(Q - P, U) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui nous donne l'équation $bx - ay = c$, avec $c = bx_0 - ay_0$.

1.2.2 Coniques

Les coniques sont les courbes obtenues par l'intersection d'un plan de \mathbb{R}^3 et du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$, d'où leur nom. Elles forment une famille de courbes dans le plan que nous n'allons pas étudier systématiquement (voir par exemple [5] ou [6]), mais dont nous donnons quelques exemples.

Ellipse

Définition 3. Une partie $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ est une *ellipse* s'il existe deux points F_1 et F_2 (appelés foyers de \mathcal{C}) et $a > 0$ tels que

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a\}. \quad (1.2)$$

Dans le cas où les foyers sont les points de coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, avec $0 < c < a$, et $P = (x, y)$, on peut montrer (le faire) que $\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a$ est équivalent à

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où $b^2 = a^2 - c^2$. On a représenté une telle ellipse sur la Figure 1.3. Les réels a et b s'appellent les *demi-axes* de l'ellipse.

Toujours dans ce cas, l'égalité précédente montre que si $(x, y) \in \mathcal{C}$, alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x/a = \cos \theta$ et $y/b = \sin \theta$. Il en résulte que \mathcal{C} est la trace de la courbe paramétrée $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$, qui est (le vérifier) C^∞ , régulière, fermée et simple.

Exercice 1. Montrer que si deux réels x et y vérifient $x^2 + y^2 = 1$ alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos \theta = x$ et $\sin \theta = y$.

Cercle

Un cas particulier du précédent est celui du cercle. Il correspond au cas où les foyers de l'ellipse sont confondus en un point : le centre. Si l'on note $P_0 = (x_0, y_0)$ ce centre (1.2) devient $P \in \mathcal{C} \iff \|P - P_0\| = a$, ce qui donne comme équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

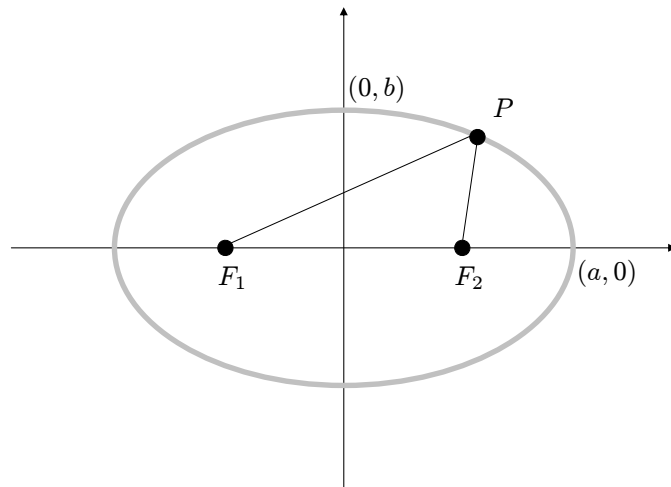


FIG. 1.3 – Ellipse

Exercice 2. Donner une courbe paramétrée C^∞ , régulière fermée et simple dont la trace est le cercle de centre P_0 et de rayon a .

Exercice 3. (Pas évident) Montrer que l'ensemble des (x, y) satisfaisant l'équation

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix} = 0$$

est un cercle passant par les points $P_i = (x_i, y_i)$ pour $i = 1, 2, 3$, si ceux-ci ne sont pas alignés.

Hyperbole

Définition 4. Une partie $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ est une *hyperbole* s'il existe deux points F_1 et F_2 (appelés foyers de \mathcal{C}) et $a > 0$ tels que

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |\|P - F_1\| - \|P - F_2\|| = 2a\}. \quad (1.3)$$

Si $F_1 = (-c, 0)$ et $F_2 = (c, 0)$, avec $0 < a < c$, on peut montrer (le faire) que (1.3) équivaut à

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right| = 1 \right\}$$

où $b^2 = c^2 - a^2$. On a représenté une telle hyperbole sur la Figure 1.4. Celle-ci est composée de deux *branches* : la branche de droite d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.4)$$

et la branche de gauche d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Exercice 4. Soient u et v des réels tels que $u^2 - v^2 = 1$. Montrez qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $u = \operatorname{ch} t$ et $v = \operatorname{sh} t$.

Cet exercice montre que si \mathcal{C}_+ est la branche d'hyperbole d'équation (1.4), et si $(x, y) \in \mathcal{C}_+$, alors il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $x/a = \operatorname{ch} t$ et $y/b = \operatorname{sh} t$. Il en résulte que \mathcal{C}_+ est la trace de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$, qui est (le vérifier) C^∞ , régulière et simple. Ceci permet de mieux comprendre les termes de « cosinus hyperbolique » et « sinus hyperbolique ».

1.2.3 Hélice

Les hélices sont une famille de courbes gauches dont il est trop tôt pour donner la définition exacte. La plus simple d'entre elles est la trajectoire que

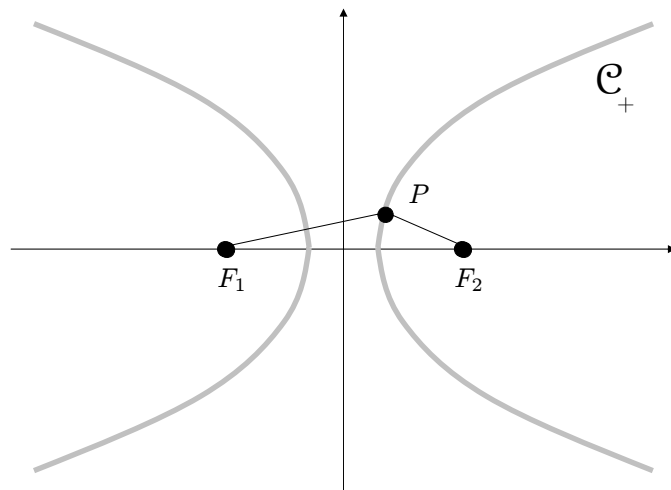


FIG. 1.4 – Hyperbole

décrivait l'extrémité E d'une des pales de l'hélice d'un avion allant en ligne droite et animé d'une vitesse constante. Supposons que le vecteur vitesse de l'avion soit $(0, 0, b)$, c'est-à-dire vertical. Alors l'hélice tourne dans le plan horizontal xOy , et en supposant que le rayon de l'hélice est a , que son centre est situé sur l'axe des z , la trajectoire de E se décrit par la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), bt), \quad (1.5)$$

où ω est la vitesse angulaire de l'hélice. Cette courbe est C^∞ , simple et régulière si b est non nul (le vérifier).

1.3 Changements de repère

1.3.1 Isométries de \mathbb{R}^n

Définition 5. On appelle *isométrie affine* de \mathbb{R}^n (nous dirons en général simplement « isométrie de \mathbb{R}^n ») une application $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la forme $u(X) = L(X) + X_0$, où L est un endomorphisme orthogonal (voir [3]), appelé *partie linéaire* de u , et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux est noté $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

Si de plus L est de déterminant $+1$, c.à.d si $L \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^n)$, on dit que u est un *déplacement*.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $\det L = -1$, on dit que u est un *antidéplacement*. Ceci équivaut à $L \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{SO}(\mathbb{R}^n)$,

Remarque 4. Plus généralement, si u est de la forme $u(X) = X_0 + L(X)$, où L est linéaire mais non nécessairement orthogonale, on dit que u est une *application affine*, et on appelle L sa *partie linéaire*.

On peut montrer que les isométries de \mathbb{R}^n sont caractérisées par la propriété de préserver la distance. Autrement dit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement si pour tous $P, Q \in \mathbb{R}^n$ on a $\|u(P) - u(Q)\| = \|P - Q\|$. Le sens « seulement si » est facile à démontrer (le faire). Le sens « si » est plus difficile. Il consiste, étant donnée une isométrie u à poser $X_0 = u(0)$ et $L(X) = u(X) - X_0$, puis à montrer que L est linéaire (c'est le point délicat), et vérifie $\|L(X)\| = \|X\|$ pour tout X . Alors ([3], Proposition 2.3.8) nous dit que L est orthogonal, ce qui termine la démonstration.

La description des groupes $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ et de leurs sous-groupes $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ est faite dans [3].

1.3.2 Changement de repère

Définition 6. On appellera *repère* de \mathbb{R}^n la donnée d'une origine $O \in \mathbb{R}^n$ et d'une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ de \mathbb{R}^n . On notera (O, f_1, \dots, f_n) ou (O, \mathcal{B}) un tel repère. Le repère sera dit *orthonormé* si la base \mathcal{B} est orthonormale.

Le *repère canonique* de \mathbb{R}^n est celui dont l'origine est 0 et la base est la base canonique.

Les *coordonnées* de $P \in \mathbb{R}^n$ dans le repère (O, f_1, \dots, f_n) sont les coordonnées du vecteur $P - O$ dans la base (f_1, \dots, f_n) .

Notation : Si $A, B \in \mathbb{R}^n$, on pourra écrire \overrightarrow{AB} au lieu de $B - A$.

On vérifiera (le faire) que si $P = (x_1, \dots, x_n)$, alors les x_i sont précisément les coordonnées de P dans le repère canonique. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut donc voir ce n -uplet simplement comme un élément de \mathbb{R}^n mais, plus utilement, il représente les coordonnées d'un point P de \mathbb{R}^n dans le repère canonique. Quel est l'effet d'un changement de repère sur les coordonnées d'un point ? Pour fixer les idées supposons que $n = 2$, et notons $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère canonique. Alors $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique, donc une base orthonormale de \mathbb{R}^2 .

Soit un autre repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$, où $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ et soit P le point dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont (x, y) . Cherchons les coordonnées (x', y') de P dans le repère \mathcal{R}' . On a

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j} = O' + x'\vec{i}' + y'\vec{j}',$$

et donc $x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = O - O' + x\vec{i} + y\vec{j}$, c'est-à-dire que (x', y') sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{O'O} + x\vec{i} + y\vec{j}$ dans la base \mathcal{B}' . On a donc

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix},$$

où (O_1, O_2) sont les coordonnées de $\overrightarrow{O'O}$ dans \mathcal{B}' , c'est-à-dire les coordonnées de O dans \mathcal{R}' , et où $(i_1, i_2), (j_1, j_2)$ sont respectivement les coordonnées de \vec{i} et \vec{j} dans la base \mathcal{B}' . On peut écrire cette égalité sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice qui apparaît dans cette relation n'est autre que la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B} . Tout ceci reste valable avec les modifications évidentes dans un espace à n dimensions.

A présent citons un résultat d'algèbre linéaire qui complète la proposition 2.3.10 de [3].

Proposition 1. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormales d'un espace euclidien E de dimension n . Alors la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est orthogonale.

Preuve. La matrice de passage M a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . Elle est donc aussi la matrice dans la base \mathcal{B} de l'endomorphisme $u \in \text{End}(E)$ qui au k -ième vecteur de \mathcal{B} associe le k -ième vecteur de \mathcal{B}' , pour tout $1 \leq k \leq n$. Cet endomorphisme est orthogonal par la Proposition 2.3.8 de [3], car il transforme la base orthonormale \mathcal{B} en la base orthonormale \mathcal{B}' . La matrice M est donc orthogonale en vertu de la Proposition 2.3.10 de [3]. \square

Il résulte de cette proposition et de la discussion qui la précède

Proposition 2. Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux repères orthonormés de l'espace \mathbb{R}^n . Alors il existe un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et un endomorphisme $L \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tels que si $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ sont les coordonnées d'un même point P dans les repères \mathcal{R} et \mathcal{R}' , alors

$$X' = L(X) + X_0.$$

Autrement dit il existe une *isométrie* de \mathbb{R}^n qui fait passer des coordonnées dans le repère \mathcal{R} aux coordonnées dans le repère \mathcal{R}' .

Remarque 5. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et u une isométrie de \mathbb{R}^n . Posons $\tilde{\gamma} = u \circ \gamma$. On peut voir $\tilde{\gamma}$ comme la courbe déduite de γ par l'isométrie u ; mais la discussion qui précède nous dit qu'on peut également voir $\tilde{\gamma}$ comme la *même* courbe que γ , mais dont les coordonnées auraient été exprimées dans un repère orthonormé différent.

1.4 Vecteurs tangents, longueur

Définition 7. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée dérivable et $t \in I$. Le *vecteur vitesse* de γ en t est $\gamma'(t)$. La *vitesse* est $\|\gamma'(t)\|$.

Si $\gamma'(t) \neq 0$, un vecteur est dit *tangente* à γ en t s'il est colinéaire à $\gamma'(t)$. La *tangente* à γ en t est la droite affine passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t)$ (voir (1.1)). Si $n = 2$, la perpendiculaire à la tangente passant par $\gamma(t)$ est appelée *normale* à γ en t .

Remarque 6. Si P est un point simple il existe un *unique* t tel que $\gamma(t) = P$, et on peut alors définir la *tangente* à γ en P comme étant la droite passant par P et de vecteur directeur $\gamma'(t)$, et définir aussi la *normale* à γ en P . Par contre, si P est un point multiple, il y a plusieurs t tels que $\gamma(t) = P$, et donc potentiellement plusieurs tangentes.

Si γ est une courbe plane dérivable en t et si l'on note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, l'équation de la tangente à γ en t , lorsque t est régulier, se déduit du paragraphe 1.2.1. Elle s'écrit (Vérifier)

$$\det \begin{pmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{pmatrix} = 0.$$

L'équation de la normale à γ en t n'est pas plus difficile à déterminer. Notons \mathcal{N}_t cette normale et $P = \gamma(t)$. Alors $Q \in \mathcal{N}_t$ équivaut à $(Q - P) \perp \gamma'(t)$, c'est-à-dire $(Q - P) \cdot \gamma'(t) = 0$. En notant $Q = (x, y)$, on obtient

$$(x, y) \in \mathcal{N}_t \iff (x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0,$$

ce qui est l'équation de la droite \mathcal{N}_t .

Exercice 5. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $(1, 1)$ est tangent à γ en t .

Exercice 6. Montrer que la vitesse est constante si et seulement si $\gamma''(t)$ (appelé aussi *vecteur accélération*) est orthogonal pour tout t au vecteur vitesse.

Définition 8. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 . La *longueur* de γ est

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt. \quad (1.6)$$

Si $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$ alors on définit la longueur $\ell_{a,b}(\gamma)$ de l'arc $[\gamma(a), \gamma(b)]$ de γ comme étant la longueur de la restriction de γ à $[a, b]$:

$$\ell_{a,b}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Remarque 7. Puisque γ est supposée C^1 , la fonction γ' est continue et donc $t \rightarrow \|\gamma'(t)\|$ est continue donc intégrable sur $[a, b]$.

Remarque 8. Si I n'est pas fermé borné, alors (1.6) a toujours un sens comme intégrale (éventuellement impropre) d'une fonction positive. Dans ce cas la longueur de γ peut être finie ou infinie. Par exemple $\gamma(t) = (t, 0)$, définie sur \mathbb{R} , est de longueur infinie (vérifier) et

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$$

toujours définie sur \mathbb{R} , est de longueur 2π (le vérifier).

La longueur d'un cercle de rayon R (paramétré par exemple par $\gamma(t) = C + R(\cos t, \sin t)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$) est $2\pi R$ (vérifier), mais déjà dans le cas d'une ellipse, la longueur est une intégrale dont la valeur ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles.

La longueur est invariante par isométries :

Proposition 3. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 , et u une isométrie de \mathbb{R}^n . On a

$$\ell(\gamma) = \ell(u \circ \gamma).$$

Preuve. Il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tels que $u(X) = X_0 + L(X)$. Alors pour tout $t \in [a, b]$

$$(u \circ \gamma)'(t) = du(\gamma(t))(\gamma'(t)) = L(\gamma'(t)),$$

car la différentielle d'une application affine est constante et égale à sa partie linéaire (voir [4], Chapitre 2). D'autre part, $\|L(X)\| = \|X\|$ pour tout X car $L \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, donc pour tout $t \in [a, b]$ on a $\|(u \circ \gamma)'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$. Il résulte alors de (1.6) que $\ell(\gamma) = \ell(u \circ \gamma)$. \square

Exercice 7. On appelle *dilatation* ou *homothétie* de rapport λ une application affine dont la partie linéaire est λId . Montrer que si u est une telle application, alors $\ell(u \circ \gamma) = |\lambda| \ell(\gamma)$.

Pour finir, tentons de justifier le fait d'appeler longueur la quantité $\ell(\gamma)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons pour tout $0 \leq k \leq n$

$$t_k = a + \frac{k}{n}(b - a).$$

On obtient ainsi une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, avec $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. La longueur de la ligne polygonale qui relie successivement les points $\gamma(t_k)$ est

$$\ell_n = \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \dots + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\|.$$

Examinons chaque terme de la somme, en supposant que γ est C^2 pour simplifier. La formule de Taylor à l'ordre 2 appliquée à γ en t_k (voir [4], remarque et exemple précédant 4.3.2) nous donne, en posant $C = \sup_{[a,b]} \|\gamma''\|$,

$$\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k) - (t_{k+1} - t_k)\gamma'(t_k)\| \leq \frac{C}{2}|t_{k+1} - t_k|^2.$$

On en déduit, en se souvenant que $t_{k+1} - t_k = (b - a)/n$, que

$$\ell_n = \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma'(t_k)\| + \delta_n,$$

où $|\delta_n| \leq C(b - a)^2/2n$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$.

En conclusion, lorsque $n \rightarrow +\infty$, la limite de ℓ_n est égale à la limite de la somme, et cette limite est précisément l'intégrale de $\|\gamma'\|$ sur l'intervalle $[a, b]$. Autrement dit, $\ell(\gamma)$ est la limite des longueurs de lignes polygonales qui approchent γ .

1.5 Reparamétrisation, abscisse curviligne

Rappelons quelques notions définies dans le cours de calcul différentiel.

Définition 9. Un C^k -difféomorphisme entre deux ouverts U et V de \mathbb{R}^p est une application $\varphi : U \rightarrow V$ bijective, C^k , et dont la bijection réciproque est C^k .

Dans le cas où $p = 1$, il sera utile d'étendre cette définition au cas où U et V sont des intervalles généraux, pas nécessairement ouverts. La même définition a dans ce cas un sens si on convient qu'aux bornes fermées de l'intervalle on remplace selon le cas la dérivée par une dérivée à droite ou une dérivée à gauche.

On a comme conséquence du Théorème d'inversion globale (voir [4], Corollaire 6.4.4)

Proposition 4. Soit I un intervalle ouvert et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^k dont la dérivée ne s'annule pas. Alors φ est un C^k difféomorphisme de I sur $\varphi(I)$.

Remarque 9. Là encore, on peut supprimer l'hypothèse que I est ouvert, en remplaçant là où c'est nécessaire la dérivée par une dérivée à droite ou à gauche.

Exercice 8. Montrer que $u \rightarrow \arctan(u/2)$ est un C^∞ -difféomorphisme de $] -\pi, \pi[$ sur \mathbb{R} .

Définition 10. Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes C^k . On dit que γ et $\tilde{\gamma}$ sont *équivalentes* s'il existe un C^k difféomorphisme φ de I sur J tel que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, et on note alors $\gamma \sim \tilde{\gamma}$.

Si de plus φ est croissant on dit que les courbes ont *même orientation* et si φ est décroissant qu'elles ont des *orientations opposées*. Dans le premier cas on note $\gamma \sim_+ \tilde{\gamma}$ et dans le second $\gamma \sim_- \tilde{\gamma}$.

Si deux courbes sont équivalentes, on dit aussi que l'une est une *reparamétrisation* de l'autre.

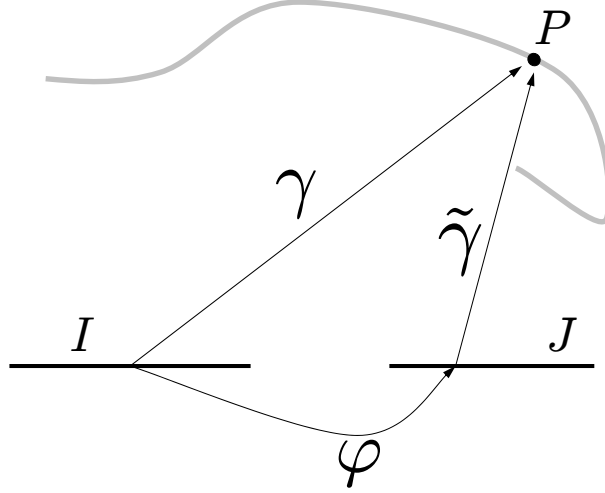
Remarque 10. Les relations \sim et \sim_+ sont des relations d'équivalence, mais pas \sim_- (pourquoi?).

Définition 11. La remarque précédente permet de définir une *courbe géométrique* comme une classe d'équivalence de courbes paramétrées pour la relation \sim . Une *courbe géométrique orientée* sera une classe d'équivalence pour la relation \sim_+ .

Remarque 11. Deux courbes équivalentes ont la même trace (le vérifier).

Exercice 9. Les notions de courbe *simple*, *régulière* ou *fermée* sont compatibles avec \sim , c'est-à-dire que si $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ et si une des deux courbes est *simple*, *régulière* ou *fermée*; alors l'autre courbe vérifie la même propriété.

Supposons que $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, avec $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$. Alors si $\gamma(t) = P$ et $s = \varphi(t)$ on a $\tilde{\gamma}(s) = P$. On a résumé ceci sur le schéma suivant.



On a

Proposition 5. Si $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, alors $\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$.

Preuve. Notons $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, on a $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\varphi(t))\varphi'(t)$ et donc

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\tilde{\gamma}'(\varphi(t))\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \|\tilde{\gamma}'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt.$$

Si φ est croissant on a $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$, et de plus $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$. Le changement de variable $s = \varphi(t)$ donne donc,

$$\ell(\gamma) = \int_c^d \|\tilde{\gamma}'(s)\| ds = \ell(\tilde{\gamma}).$$

Dans le cas où φ est décroissant, le changement de variable donne lieu à deux changements de signe qui se compensent car alors $|\varphi'(t)| dt = -\varphi'(t) dt = -ds$, et les bornes d'intégration sont renversées (Vérifier). \square

Remarque 12. Ce résultat reste vrai si γ et $\tilde{\gamma}$ sont définies sur des intervalles I et J non nécessairement fermés bornés : la proposition ci-dessus donne pour tous $a, b \in I$, $a < b$, l'égalité $\ell_{a,b}(\gamma) = \ell_{\varphi(a),\varphi(b)}(\tilde{\gamma})$. En faisant tendre a et b vers les bornes de l'intervalle I on obtient l'égalité souhaitée.

Exercice 10. Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux courbes équivalentes. Montrer que si P est un point régulier simple de γ , alors P est un point régulier simple de $\tilde{\gamma}$ et que les tangentes de γ et $\tilde{\gamma}$ en P coïncident.

Parmi toutes les reparamétrisations possibles d'une courbe régulière, on en distingue certaines.

Définition 12. On dit que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est paramétrée à *vitesse constante* si $\|\gamma'\|$ est constante. Si la vitesse est égale à 1 on dit que γ est paramétrée par l'*abscisse curviligne*, ou que γ est *normale*.

Remarque 13. Pour une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne, $\ell_{a,b}(\gamma) = b - a$. (Véifier).

On peut toujours paramétrer une courbe régulière par l'abscisse curviligne :

Proposition 6. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^k régulière, et $t_0 \in I$, et $P = \gamma(t_0)$. Alors :

- 1) Il existe une courbe normale $\tilde{\gamma}_+$ telle que $\tilde{\gamma}_+ \sim_+ \gamma$ et $\tilde{\gamma}_+(0) = P$.
- 2) Il existe une courbe normale $\tilde{\gamma}_-$ telle que $\tilde{\gamma}_- \sim_- \gamma$ et $\tilde{\gamma}_-(0) = P$.

Preuve. Nous montrons la première assertion (Exercice : démontrer la seconde). Posons pour tout $t \in I$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Alors s est de classe C^k sur I (le démontrer) et pour tout t on a $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$, par conséquent s est un C^k difféomorphisme de I sur J , où l'on a posé $J = s(I)$. A présent, posons $\tilde{\gamma}_+ = \gamma \circ s^{-1}$. Alors $\gamma = \tilde{\gamma}_+ \circ s$, et $\tilde{\gamma}_+$ est C^k . Donc $\gamma \sim_+ \tilde{\gamma}_+$. De plus par définition $\tilde{\gamma}_+(s(t_0)) = \gamma(t_0)$ donc $\tilde{\gamma}_+(0) = P$. Enfin $\|\gamma'(t)\| = \|\tilde{\gamma}'_+(s(t))s'(t)\|$, ce qui implique $\|\tilde{\gamma}'_+(s(t))\| = 1$ puisque $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. La courbe $\tilde{\gamma}_+$ est donc normale. \square

Remarque 14. En fait, $\tilde{\gamma}_+$ et $\tilde{\gamma}_-$ sont uniques si P est un point simple de la courbe, c.à.d. si t_0 est l'unique solution de $\gamma(t) = P$.

Proposition 7. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe C^1 telle que $\gamma(a) = P$ et $\gamma(b) = Q$, avec $P \neq Q$. Alors $\ell(\gamma) \geq \|P - Q\|$ et il n'y a égalité que si

$$\gamma(t) = P + x(t) \frac{Q - P}{\|Q - P\|},$$

où $t \rightarrow x(t)$ est une fonction croissante. Autrement dit le plus court chemin de P à Q est la ligne droite.

Preuve. Choisissons un repère de \mathbb{R}^n orthonormé d'origine P et tel que le premier vecteur de la base soit $e_1 = \frac{Q-P}{\|Q-P\|}$. Notons $\tilde{\gamma}$ la courbe telle que $\tilde{\gamma}(t)$ soit le vecteur des coordonnées de $\gamma(t)$ dans ce nouveau repère. Alors $\tilde{\gamma}$ se déduit de γ par une isométrie, ces deux courbes ont donc la même longueur. On a alors $\tilde{\gamma}(a) = (0, \dots, 0)$ et $\tilde{\gamma}(b) = (\|Q - P\|, 0, \dots, 0)$.

Pour fixer les idées supposons $n = 2$ et notons $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$. On a

$$\begin{aligned} \ell(\tilde{\gamma}) &= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \geq \\ &\geq \int_a^b |x'(t)| dt \geq \int_a^b x'(t) dt = x(b) - x(a) = \|Q - P\|, \end{aligned} \quad (1.7)$$

ce qui démontre que $\ell(\gamma) \geq \|P - Q\|$.

Si il y a égalité dans cette inégalité cela signifie, par examen de (1.7), que pour tout $t \in [a, b]$ on a $y'(t) = 0$ et donc $y(t) = y(a) = 0$, et que de plus $x'(t)$ est de signe constant positif. On a donc $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), 0)$, où x est croissante, ce qui signifie en revenant au repère canonique que $\gamma(t) = P + x(t)e_1$. \square

1.6 Géométrie locale des courbes planes

Une courbe plane est déterminée par deux fonctions $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow y(t)$, mais il existe une autre description plus intrinsèque, par deux fonctions également. Une de ces fonctions contient l'information cinématique, c'est la vitesse $t \rightarrow v(t)$. L'autre fonction contient l'information géométrique, c'est la *courbure*.

Notation 1. Si $U = (x, y)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2 , nous noterons U^\perp le vecteur $(-y, x)$. Si U est un vecteur unitaire (c.à.d de norme 1), alors (U, U^\perp) est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 (Vérifier). De plus $U \rightarrow U^\perp$ est la rotation d'angle $\pi/2$ (Vérifier).

Définition 13. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée dérivable et $t \in I$. Si $\gamma'(t) \neq 0$, on définit

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad N(t) = T(t)^\perp. \quad (1.8)$$

Le repère $\mathcal{R}(t) = (\gamma(t), T(t), N(t))$ est appelé *repère de Frénet* de γ en t . Le vecteur $T(t)$ est appelé vecteur tangent du repère, et le vecteur $N(t)$ vecteur normal.

Remarque 15. Le vecteur $T(t)$ étant par définition unitaire, $(T(t), N(t))$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 .

Remarque 16. Si P est un point simple et régulier de γ , alors il existe un unique t tel que $P = \gamma(t)$ et on peut alors définir le repère de Frénet de γ en P comme étant $\mathcal{R}(t)$.

Proposition 8. (et définition) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^2 régulière. Alors

$$T' = v\kappa N, \quad N' = -v\kappa T, \quad (1.9)$$

où $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $v = \|\gamma'\|$ est la vitesse. Les équations ci-dessus sont les *formules de Frénet* et $\kappa(t)$ est la *courbure* de γ en t . La quantité $1/|\kappa|$ est le *rayon de courbure*.

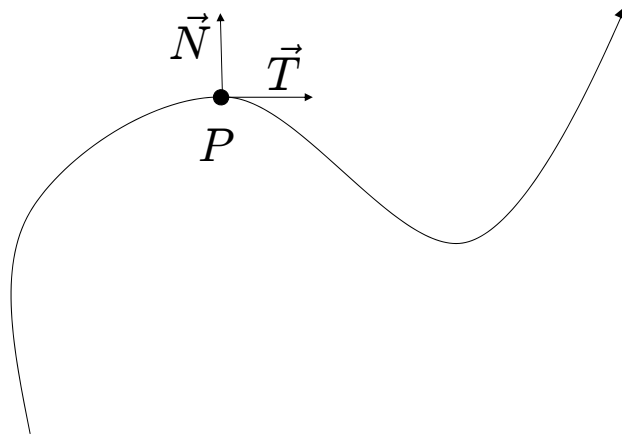


FIG. 1.5 – Repère de Frenet

Preuve. On écrit les vecteurs T' et N' dans la base (T, N) :

$$T' = aT + bN, \quad N' = cT + dN. \quad (1.10)$$

En dérivant les relations $T \cdot T = 1$, $T \cdot N = 0$ et $N \cdot N = 1$, qui expriment le fait que (T, N) est un repère orthonormé, on obtient

$$T' \cdot T = 0, \quad T' \cdot N + N' \cdot T = 0, \quad N' \cdot N = 0,$$

c'est-à-dire $a = 0$, $b = -c$ et $d = 0$. En posant $\kappa = b/v = (T' \cdot N)/v$, (1.10) devient (1.9). De plus la fonction κ est continue (le vérifier). \square

Remarque 17. Si γ est paramétrée par l'abscisse curviligne, $v = 1$ et (1.9) devient $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T$.

Remarque 18. Comme d'habitude, si $P = \gamma(t)$ est un point simple de γ , on peut dire que $\kappa(t)$ est la courbure de γ en P .

Exercice 11. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière, et (T, N) les vecteurs du repère de Frénet. On note $v = \|\gamma'\|$ la vitesse, $\vec{a} = \gamma''$ l'accélération et κ la courbure. Montrer que

$$\vec{a} \cdot T = v', \quad \vec{a} \cdot N = v^2 \kappa. \quad (1.11)$$

On notera en particulier qu'en notant $r = 1/|\kappa|$ le rayon de courbure, on obtient la relation, classique en mécanique, $|\vec{a} \cdot N| = v^2/r$. La quantité v' s'appelle en mécanique *accélération tangentielle* et v^2/r l'*accélération centrifuge*.

Exercice 12. La courbure du cercle paramétré $\gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t))$ est une constante et égale à $1/R$. La courbure de la droite paramétrée $\gamma(t) = P + tU$ est constante égale à 0.

Exercice 13. Si on note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, alors la courbure de γ est

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (1.12)$$

La courbure, et le repère de Frénet sont bien des quantités géométriques :

Proposition 9. Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux courbes planes C^2 régulières telles que $\gamma \sim \tilde{\gamma}$. Soit P un point simple de γ (et donc de $\tilde{\gamma}$). Si $\gamma \sim_+ \tilde{\gamma}$, alors les courbures de γ et $\tilde{\gamma}$ en P sont égales, et si $\gamma \sim_- \tilde{\gamma}$ elles sont opposées. Il en va de même pour les vecteurs du repère de Frénet.

Si u est un déplacement de \mathbb{R}^2 (resp. un antidéplacement), la courbure de $u \circ \gamma$ en t est égale (resp. opposée) à la courbure de γ en t .

Preuve. On a $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, où φ est un difféomorphisme, donc $\gamma' = \varphi' \tilde{\gamma}' \circ \varphi$. Notons (T, N) les vecteurs du repère de Frénet de γ , v sa vitesse et κ sa courbure ; et notons (\tilde{T}, \tilde{N}) , \tilde{v} et $\tilde{\kappa}$ les quantités correspondantes de $\tilde{\gamma}$. En posant $s = \varphi(t)$, on a

$$v(t) = \|\varphi'(t) \tilde{\gamma}'(s)\| = |\varphi'(t)| \|\tilde{\gamma}'(s)\| = |\varphi'(t)| \tilde{v}(s).$$

Supposons φ croissant. On a alors $\varphi'(t) = v(t)/\tilde{v}(s)$. Donc

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{v(t)} = \frac{\varphi'(t)\tilde{\gamma}'(s)}{v(t)} = \frac{\tilde{\gamma}'(s)}{\tilde{v}(s)} = \tilde{T}(s),$$

ce qui implique également $N(t) = \tilde{N}(s)$. Or, si $P = \gamma(t)$ on a $P = \tilde{\gamma}(s)$ et donc les repères de Frénet de γ et $\tilde{\gamma}$ en P sont égaux.

En dérivant $T(t) = \tilde{T}(\varphi(t))$ on obtient $T'(t) = \tilde{T}'(s)\varphi'(t)$ et donc $\tilde{v}(s)T'(t) = v(t)\tilde{T}'(s)$. Or $T'(t) = v(t)\kappa(t)N(t) = v(t)\kappa(t)\tilde{N}(s)$, donc

$$\tilde{T}'(s) = \tilde{v}(s)\kappa(t)\tilde{N}(s).$$

Il en résulte que $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(t)$.

Le cas où $\varphi' < 0$ et la seconde assertion sont laissés en exercice. \square

La courbure a une interprétation intuitive : c'est la vitesse à laquelle tourne le vecteur tangent.

Définition 14. Soit $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue définie sur un intervalle, telle que $\|X(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$. Une fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue, et telle que $\forall t \in I$ on ait $X(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ s'appelle un *relèvement* de X .

Remarque 19. Si θ_1 et θ_2 sont deux relèvements de X , alors $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ est un multiple de 2π pour tout t (pourquoi?). Donc $(\theta_1 - \theta_2)/2\pi$ est une fonction continue définie sur un intervalle et qui ne prend que des valeurs entières, elle est par conséquent constante (pourquoi?). Appelons k cette constante, on a $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.

Proposition 10. Soit $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application C^1 définie sur un intervalle, telle que $\|X(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$. Alors il existe un relèvement $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de X , qui est C^1 . De plus $\theta' = X' \cdot X^\perp$.

Remarque 20. Si X est seulement continue, il existe un relèvement continu.

Exercice 14. S'il existe un relèvement C^1 , alors tous les relèvements sont C^1 .

Exercice 15. (Utile dans la démonstration qui suit) Soient X et Y deux vecteurs unitaires de \mathbb{R}^n (ou plus généralement d'un espace préhilbertien) alors $X = Y$ si et seulement si $X \cdot Y = 1$.

Preuve de la proposition. Soit $t_0 \in I$ et posons

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t X'(t) \cdot X^\perp(t) dt,$$

où θ_0 est un réel tel que $X(t_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$. Il est clair que $\theta' = X' \cdot X^\perp$. Posons $U(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ et montrons que $X(t) = U(t)$ pour tout $t \in I$. En vertu de l'exercice précédent, ceci équivaut à $X(t) \cdot U(t) = 1$ pour tout $t \in I$, et comme ceci est vérifié en t_0 , il suffit de démontrer que $(X \cdot U)' = 0$ sur I .

On a $U' = \theta'U^\perp = (X' \cdot X^\perp)U^\perp$, et puisque (X, X^\perp) est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 , on a

$$X' = (X' \cdot X)X + (X' \cdot X^\perp)X^\perp = (X' \cdot X^\perp)X^\perp,$$

car $X' \cdot X = 0$ (pourquoi?). Par conséquent

$$(X \cdot U)' = X' \cdot U + X \cdot U' = (X' \cdot X^\perp)(X^\perp \cdot U) + (X' \cdot X^\perp)(U^\perp \cdot X).$$

On en déduit $(X \cdot U)' = 0$ car $X^\perp \cdot U = X^{\perp\perp} \cdot U^\perp = -X \cdot U^\perp$. On a utilisé ici le fait que $X \cdot Y = X^\perp \cdot Y^\perp$ et que $X^{\perp\perp} = -X$, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$ (le démontrer). \square

Corollaire 1. Soit γ une courbe plane C^2 régulière, il existe un relèvement θ du vecteur tangent du repère de Frénet et $\theta' = v\kappa$, où v est la vitesse de γ et κ est la courbure.

Preuve. L'application $t \rightarrow T(t)$ est C^1 donc la proposition précédente implique l'existence d'un relèvement C^1 , ce relèvement vérifie

$$\theta' = T' \cdot T^\perp = T' \cdot N = v\kappa,$$

par les formules de Frénet. \square

Remarque 21. Soit une auto circulant sur une route Γ , trace d'une courbe paramétrée γ (voir Figure 1.6). La longueur $d\ell$ de l'auto est supposée petite par rapport à la taille des virages. L'arrière A de la voiture se trouve au point $\gamma(t)$ et l'avant B au point $\gamma(t + dt)$. On suppose que $dt > 0$, c'est-à-dire que l'auto va vers les $\gamma(t)$ croissants.

Les roues de l'auto (en supposant que celle-ci ne dérape pas) sont dirigées *tangentement* à la courbe. Les roues arrières sont dirigées en direction de $T(t)$ et les roues avant en direction de $T(t + dt)$. Si θ est un relèvement de T , l'angle que font les roues avant et arrières est

$$d\theta = \theta(t + dt) - \theta(t) \approx \kappa(t)v(t) dt.$$

Or $v(t) dt \approx d\ell$ et on a donc

$$\kappa(t) = \frac{d\theta}{d\ell}.$$

Autrement dit, la courbure est indépendante de la vitesse du véhicule (ce qui n'est guère surprenant!) Elle est proportionnelle à l'angle dont sont tournées les roues, et donc *proportionnelle à l'angle dont est tourné le volant*. La constante de proportionnalité est positive et ne dépend que de l'auto utilisée. On remarquera qu'une courbure positive signifie que $d\theta > 0$, c'est-à-dire qu'on tourne à *gauche* et que $d\theta < 0$ signifie qu'on tourne à *droite*. Il est clair que si on parcourt la courbe en sens inverse, la courbure change de signe, mais on le savait déjà : si $\gamma \sim -\tilde{\gamma}$ alors γ et $\tilde{\gamma}$ ont des courbures opposées en tout point.

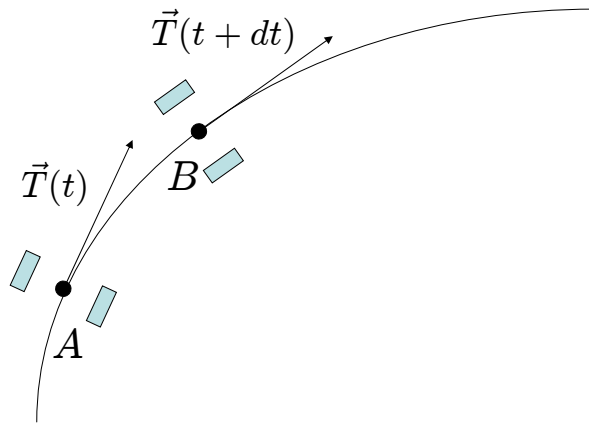


FIG. 1.6 – Automobile sur une route

Finalement, la courbure et la vitesse déterminent γ à déplacement près. Pour poursuivre la métaphore automobile, ceci correspond au fait bien connu que le frein/accélérateur (commande de vitesse) et le volant (commande de courbure) déterminent de façon unique la trajectoire d'une automobile, et autorisent toutes les trajectoires.

Théorème 1. *Soient $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $v : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1 , alors il existe une courbe plane $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ régulière et C^2 dont κ est la courbure et v est la vitesse. De plus l'ensemble des courbes ayant pour vitesse v et pour courbure κ est*

$$\{u \circ \gamma \mid u \text{ est un déplacement de } \mathbb{R}^2\}.$$

Démonstration. Pour l'existence, on définit θ comme une primitive de κv , puis on définit $t \rightarrow x(t)$ comme une primitive de $t \rightarrow v(t) \cos \theta(t)$ et $t \rightarrow y(t)$ comme une primitive de $t \rightarrow v(t) \sin \theta(t)$. Alors la courbe $t \rightarrow (x(t), y(t))$ a bien pour vitesse v et pour courbure κ (le démontrer).

Pour la seconde assertion, notons que pour tout déplacement u , la courbe $u \circ \gamma$ a les propriétés requises. Réciproquement, si $\tilde{\gamma}$ a les mêmes courbure et vitesse que γ , et si l'on note θ et $\tilde{\theta}$ des relèvements de leurs vecteurs tangents, alors $(\theta - \tilde{\theta})' = 0$ donc il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta = \tilde{\theta} + \theta_0$. Par conséquent $T = R \circ \tilde{T}$, où R est la rotation d'angle θ_0 . Il en résulte que $vT = R \circ (v\tilde{T})$ (pourquoi?) et donc, puisque $\gamma' = vT$ et $\tilde{\gamma}' = v\tilde{T}$, en primitivant, on obtient $\gamma = X_0 + R \circ \tilde{\gamma}$, où X_0 est la constante d'intégration, donc $\tilde{\gamma}$ est bien de la forme requise. \square

Exemple 1. Si l'on choisit la vitesse constante égale à 1 et $\kappa(t) = t$, on obtient une courbe appelée *clothoïde* ou *spirale d'Euler* (à quoi ressemble-t-elle?). Si une route suivait une telle courbe, le conducteur d'une voiture la parcourant à vitesse constante devrait tourner son volant vers la gauche à vitesse constante.

1.7 Géométrie des courbes gauches

Une courbe gauche est déterminée par trois fonctions $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$, et $t \rightarrow z(t)$. Si, comme dans le cas des courbes planes, on cherche à séparer l'information cinématique de l'information géométrique il y aura cette fois, en plus de la fonction vitesse $t \rightarrow v(t)$, deux fonctions contenant l'information géométrique : la *courbure* et la *torsion*.

1.7.1 Produit vectoriel

Rappelons tout d'abord la définition "euclidienne" du produit vectoriel. Pour $X, Y \in \mathbb{R}^3$, considérons l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ Z & \longmapsto \det(X, Y, Z). \end{cases}$$

C'est clairement une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 . En conséquence, il existe un unique vecteur de \mathbb{R}^3 (que l'on notera $X \wedge Y$ ou parfois $X \times Y$) tel que l'on ait

$$\forall Z \in \mathbb{R}^3, \det(X, Y, Z) = (X \wedge Y) \cdot Z.$$

Ce vecteur $X \wedge Y$ est appelé *produit vectoriel* de X et de Y .

De la définition du produit vectoriel, découlent facilement les propriétés "euclidiennes" (c'est-à-dire concernant les rapports entre produit vectoriel et produit scalaire) suivantes.

1. Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^3$ le vecteur $X \wedge Y$ est orthogonal à X et Y .
2. $\|X\|^2\|Y\|^2 = (X \cdot Y)^2 + \|X \wedge Y\|^2$.
3. $(X \wedge Y) \cdot Z = \det(X, Y, Z)$. On appelle *produit mixte* de X, Y, Z cette quantité.

Exercice 16. Montrez que

$$X \wedge (Y \wedge Z) = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z.$$

Exercice 17. En appliquant (3) à $r(X)$, $r(Y)$ et $r(Z)$, où $r \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, montrez que $r(X) \wedge r(Y) = r(X \wedge Y) \det(r)$. (Indications : (i) $r(X) \cdot r(Y) = X \cdot Y$. (ii) Si pour tout $Z \in \mathbb{R}^3$ on a $X \cdot Z = Y \cdot Z$, alors $X = Y$.)

On utilisera souvent la propriété suivante :

Proposition 11. Si $X, Y \in \mathbb{R}^3$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, alors $(X, Y, X \wedge Y)$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 .

Exercice 18. Démontrez cette proposition à l'aide des propriétés 1, 2, 3 ci-dessus.

De la définition du produit vectoriel, il découle facilement que si $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ alors la première coordonnée de $X \wedge Y$ est $x_2y_3 - x_3y_2$ et dont les autres coordonnées sont obtenues par permutation circulaire des indices : $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$. On a donc

$$X \wedge Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \quad (1.13)$$

Cette expression est en fait indépendante de la base orthonormée directe dans laquelle sont exprimées les coordonnées de X et Y . Si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 , toute autre base orthonormée directe est de la forme $\mathcal{B} = (s(e_1), s(e_2), s(e_3))$, où $s \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$. Alors, en notant $r = s^{-1}$, les coordonnées de X dans la base \mathcal{B} sont les coordonnées de $r(X)$ dans la base canonique, et de même pour Y et $X \wedge Y$. Dire que le produit vectoriel est indépendant de la base orthonormée directe choisie signifie donc que pour tout $r \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ on a

$$r(X) \wedge r(Y) = r(X \wedge Y).$$

Remarque 22. Si $r \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire si r est un endomorphisme orthogonal de déterminant -1 , alors on a au lieu de l'égalité précédente $r(X) \wedge r(Y) = -r(X \wedge Y)$. La preuve de ce fait est proposée ci-dessous en exercice.

Donnons quelques autres propriétés du produit vectoriel :

1. Le produit vectoriel $(X, Y) \rightarrow X \wedge Y$ est linéaire par rapport à X et Y (il est *bilinéaire*.)
2. Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^3$ on a $X \wedge Y = -Y \wedge X$.

Exercice 19. Montrez l'identité de Jacobi

$$X \wedge (Y \wedge Z) + Y \wedge (Z \wedge X) + Z \wedge (X \wedge Y) = 0.$$

Exercice 20. En utilisant la bilinéarité du produit vectoriel, montrez que si X et Y sont des applications dérivables sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R}^3 , alors il en est de même de $X \wedge Y$ et de plus $(X \wedge Y)' = X' \wedge Y + X \wedge Y'$. Il est interdit de se servir de (1.13).

1.7.2 Repère de Frenet, courbure et torsion

Commençons par introduire la notion de courbure pour une courbe gauche.

Définition 15. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée C^2 et régulière. La courbure de γ en $t \in I$ est définie par

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}, \quad (1.14)$$

où $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ est la vitesse.

- Remarque 23.*
1. Si $P = \gamma(t)$ est un point simple de la courbe, on dit que $\kappa(t)$ est la courbure de γ en P .
 2. La différence essentielle entre les courbes planes et courbes gauches est que pour ces dernières la courbure est définie comme une quantité *positive*. On peut motiver ceci par le fait que tourner « à gauche » ou « à droite » n'a aucun sens pour une courbe dans l'espace, car on peut parcourir celle-ci la tête en haut ou en bas !
 3. Comme dans le cas des courbes planes, on doit dans (1.14) diviser par la vitesse, pour que la quantité obtenue soit invariante par changement de paramétrisation.

Exercice 21. Montrez que la courbure est invariante par changement de paramétrisation, c.à.d que si $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ et si $P = \gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$ est un point simple, alors les courbures de γ et $\tilde{\gamma}$ en P sont égales. Montrez que si u est une isométrie de \mathbb{R}^3 , alors γ et $u \circ \gamma$ ont même courbure.

Pour définir la seconde quantité géométrique d'une courbe gauche, à savoir la torsion, on doit introduire la notion de birégularité.

Définition 16. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée C^2 et $t \in I$. On dit que γ est *birégulière* en t si les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants. Si γ est birégulière en tout $t \in I$, on dit que γ est birégulière.

Remarque 24. Si γ est birégulière, alors les vecteurs γ' et γ'' ne s'annulent pas (pourquoi?). En particulier la courbe γ est régulière.

Par ailleurs, en dérivant l'égalité $\gamma' = T\|\gamma'\|$ on obtient $\gamma'' = T'v + Tv'$, où l'on a noté v la vitesse. Or T est colinéaire à γ' alors que, par birégularité, γ'' ne l'est pas. Par conséquent, pour une courbe birégulière en t , on a $T'(t) \neq 0$. Notons que $T'(t)$ est orthogonal à $T(t)$ (dériver $T \cdot T = 1$ pour le voir) Cela légitime la définition suivante.

Définition 17. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe gauche C^2 birégulière en $t \in I$. On définit

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}, \quad B(t) = T(t) \wedge N(t). \quad (1.15)$$

Le vecteur $T(t)$ est appelé *vecteur tangent* de γ en t , le vecteur $N(t)$ est appelé *vecteur normal* et $B(t)$ est appelé *vecteur binormal*. Le repère $\mathcal{R}(t) = (\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ est appelé *repère de Frénet* de γ en t (voir figure 1.7).

Remarque 25. Le plan affine passant par $\gamma(t)$ et dirigé par les vecteurs $T(t)$ et $N(t)$ se nomme *plan osculateur*. Son équation, en notant $P = (x, y, z)$ s'écrit $(P - \gamma(t)) \cdot B(t) = 0$.

Le plan passant par $\gamma(t)$ et dirigé par les vecteurs $N(t)$ et $B(t)$ est le *plan normal*. Son équation, s'écrit $(P - \gamma(t)) \cdot T(t) = 0$. Enfin, le plan passant par $\gamma(t)$ et dirigé par $T(t)$ et $B(t)$ est le *plan rectifiant*. Quelle est son équation?

Remarque 26. Le repère de Frénet ainsi défini est orthonormé direct. En effet $T(t)$ est unitaire par définition, ainsi que $N(t)$. De plus, $T'(t)$ est orthogonal à $T(t)$ (dériver la relation $T \cdot T = 1$). En vertu de la Proposition 11, on obtient donc que $(T(t), N(t), B(t))$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 .

Enfin, si $P = \gamma(t)$ est un point simple, le repère $\mathcal{R}(t)$ est appelé repère de Frénet de γ en P .

Exercice 22. Montrez que si γ est birégulière et de classe C^k , avec $k \geq 2$, alors T est C^{k-1} , N et B sont C^{k-2} .

On extrait, comme dans le cas des courbes planes, les quantités géométriques que sont la courbure et la torsion en dérivant les vecteurs du repère de Frénet par rapport à l'abscisse curviligne, et en exprimant ces dérivées dans le repère de Frénet lui même. Pour cela la courbe doit être trois fois dérivable.

Proposition 12. (et définition) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe C^3 et birégulière. En notant $v = \|\gamma'\|$ la vitesse et (T, N, B) les vecteurs du repère de Frénet de γ (qui sont des fonctions de t), on a

$$T' = v\kappa N, \quad N' = -v\kappa T + v\tau B, \quad B' = -v\tau N, \quad (1.16)$$

où $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est la *courbure* de γ définie plus haut, et où $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue appelée *torsion* de γ .

Remarque 27. Contrairement à la courbure, la torsion n'est pas nécessairement positive.

Exercice 23. Calculez la courbure et la torsion des hélices

$$\gamma_+(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad \gamma_-(t) = \gamma_+(-t),$$

où a et b sont deux réels strictement positifs. On vérifiera en passant que ces courbes sont birégulières si a et b sont différents de 0.

Preuve de la proposition : La première égalité de (1.16) n'est autre que la définition de κ et N . Pour la seconde égalité, notons qu'en dérivant les identités $T \cdot N = 0$ et $N \cdot N = 1$ on obtient $N' \cdot T = -v\kappa$ et $N' \cdot N = 0$, et donc $N' = -v\kappa T + v\tau B$ si l'on définit τ en posant

$$\tau = \frac{N' \cdot B}{v}.$$

Reste à montrer la troisième égalité. Elle s'obtient à partir des deux précédentes et des identités $B' \cdot T = 0$, $B' \cdot N = -N' \cdot B$ et $B' \cdot B = 0$, elles mêmes obtenues en dérivant $B \cdot T = B \cdot N = 0$ et $B \cdot B = 1$. \square

Remarque 28. En utilisant (1.16) on obtient

$$\kappa = \frac{\|T'\|}{v}, \quad |\tau| = \frac{\|B'\|}{v},$$

où v est la vitesse.

Remarque 29. Il est facile de montrer qu'une courbe gauche birégulière C^3 a une torsion nulle si et seulement si sa trace est contenue dans un plan. En effet si $\tau(t) = 0$ pour tout t , alors en vertu de (1.16) le vecteur binormal B est un vecteur constant, notons le (a, b, c) . Par ailleurs en dérivant $\gamma \cdot B$ on obtient

$$(\gamma \cdot B)' = \gamma' \cdot B + \gamma \cdot B' = 0,$$

et donc $\gamma \cdot B$ est une constante, notons la d . En notant $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la relation $\gamma \cdot B = d$ s'écrit donc

$$ax(t) + by(t) + cz(t) = d,$$

c'est-à-dire que la trace de γ est contenue dans le plan d'équation $ax+by+cz = d$.

Réciproquement, si la trace de γ est contenue dans un plan, il en est de même du vecteur tangent et du vecteur normal, et donc le vecteur binormal $B(t)$ est un vecteur normal unitaire au plan en question. Il est donc constant (pourquoi?) et la torsion de γ est nulle.

On donne sans démonstration les propriétés d'invariance des repères de Frénet, de la courbure et de la torsion :

Proposition 13. Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux courbes gauches C^3 et birégulières telles que $\gamma \sim \tilde{\gamma}$. Soit P un point simple de ces deux courbes.

1. Si $\gamma \sim_+ \tilde{\gamma}$, alors les repères de Frénet ainsi que les courbure et torsion de γ et $\tilde{\gamma}$ en P sont égaux.

2. Si $\gamma \sim_- \tilde{\gamma}$, et avec les notations évidentes, on a

$$\tilde{T} = -T, \quad \tilde{N} = N, \quad \tilde{B} = -B, \quad \tilde{\kappa} = \kappa, \quad \tilde{\tau} = \tau.$$

D'autre part, si u est un déplacement (resp. antidéplacement) de \mathbb{R}^3 , de partie linéaire L , alors γ et $u \circ \gamma$ ont mêmes courbure et torsion (resp. ont même courbure et torsions opposées).

Remarque 30. On notera que la courbure d'une courbe gauche a toutes les invariances : c'est parce qu'elle est positive par définition.

Proposition 14. Si γ est une courbe gauche C^3 et birégulière, sa courbure et sa torsion sont données par

$$\kappa = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} \quad (1.17)$$

Exercice 24. Démontrer les règles de transformation de κ et τ données dans la Proposition 13 en utilisant (1.17).

Preuve de la proposition. Notons $v = \|\gamma'\|$ la vitesse. On a, en utilisant (1.15),

$$\gamma' = vT, \quad \gamma'' = v'T + v^2\kappa N,$$

et donc $\gamma' \wedge \gamma'' = v^3\kappa B$, ce qui implique la première égalité de (1.17). En dérivant une fois de plus, on obtient

$$\gamma''' = aT + bN + v^3\kappa\tau B,$$

où a et b sont deux fonctions à valeurs réelles que nous n'avons pas besoin d'explicitier. On en déduit (Vérifiez) que

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = v^6\kappa^2\tau \det(T, N, B) = \tau\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2,$$

ce qui démontre la seconde égalité de (1.17). \square

Remarque 31. La troisième identité de (1.15) permet de faire sentir ce qu'est la torsion. Si τ était nulle, le mouvement du point $\gamma(t)$ se déroulerait dans un plan fixe (le plan osculateur), auquel le vecteur constant B serait orthogonal. La différence lorsque $\tau \neq 0$ est que B n'est plus constant, et que le plan osculateur change.

Celui ci est animé d'une rotation dont l'axe est la tangente, avec une vitesse de rotation égale à τ si la courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne. On a représenté ceci sur la figure 1.7.

Enfin, vitesse, courbure et torsion déterminent γ à déplacement près.

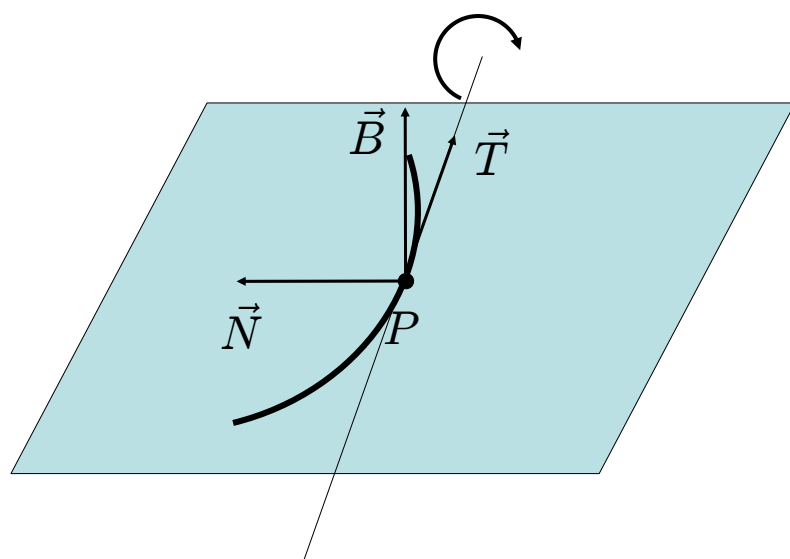


FIG. 1.7 – Repère de Frénet et plan osculateur.

Théorème 2. Soient $v : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^2 , $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1 , et $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors il existe une courbe gauche $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birégulière et C^3 dont v est la vitesse, κ la courbure et τ la torsion. De plus l'ensemble des courbes ayant cette propriété est

$$\{u \circ \gamma \mid u \text{ est un déplacement de } \mathbb{R}^3\}.$$

Démonstration. Montrons d'abord l'existence. Sans nuire à la généralité (pourquoi?) nous supposons que $I = [0, a]$.

On considère (1.16) comme un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre dont les 9 inconnues sont les coordonnées des vecteurs T , N et B . Notons X le vecteur de \mathbb{R}^9 formé par ces coordonnées. Le système différentiel satisfait par X est de la forme $X'(t) = A(t)X(t)$, où $A(t)$ est une matrice 9×9 dont les coefficients sont continus. On a vu en cours d'algèbre (voir [3]), ainsi qu'en cours d'équations différentielles, qu'un tel système admet une solution unique de classe C^1 , quelle que soit la donnée initiale X_0 .

Notons $\mathcal{R}(0) = (P_0, T_0, N_0, B_0)$ un repère orthonormé direct arbitraire et $\mathcal{B}(t) = (T(t), N(t), B(t))$, l'unique solution du système différentiel ci-dessus avec donnée initiale (T_0, N_0, B_0) . Soit $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $T(t)$, $N(t)$ et $B(t)$ (notons que par hypothèse, $M(0) \in \mathcal{SO}(3)$). Alors (1.16) s'écrit

$$M' = MQ \quad \text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -v\kappa & 0 \\ v\kappa & 0 & -v\tau \\ 0 & v\tau & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

La première remarque est que $\mathcal{B}(t)$ est orthonormée directe pour tout t . En effet, ceci équivaut à $M(t) \in \mathcal{SO}(3)$ pour tout t , ou encore $MM^T = I$ et $\det M = 1$. Comme Q est antisymétrique, on obtient $(M^T)' = Q^T M^T = -QM^T$, et donc

$$(MM^T)' = M'M^T + M(M^T)' = MQM^T - MQM^T = 0.$$

Puisque $M(0)M(0)^T = I$, on en déduit que $M(t)M(t)^T = I$ pour tout t . Ceci implique que pour tout t on a $\det M(t) \in \{-1, 1\}$. Comme $t \rightarrow \det M(t)$ est continue (pourquoi?), on en déduit que $\det M(t)$ est constant, et cette constante est $+1$ puisque $\det M(0) = 1$. On a montré que $\mathcal{B}(t)$ est orthonormée directe pour tout t .

Ensuite, on définit γ comme la primitive de $t \rightarrow v(t)T(t)$ valant P_0 en 0. Il reste à montrer que les fonctions v , κ et τ sont bien la vitesse, la courbure et la torsion de γ . Pour cela il suffit de revenir à la démonstration de (1.17). En effet, tout d'abord, par construction, v est bien la vitesse de γ . Ensuite, en dérivant la relation $\gamma' = vT$, on obtient $\gamma'' = v'T + vT'$, d'où l'on tire, d'après (1.18), que γ'' est continue, et que

$$\det(\gamma', \gamma'') = v^3 \kappa.$$

Comme v et κ ne s'annulent pas par hypothèse, on en déduit que la courbe γ est birégulière. De plus (1.17) assure que la courbure de γ est égale à κ . En dérivant

la relation $\gamma'' = v'T + vT'$ à l'aide de (1.18), il n'est pas difficile de voir que γ''' est elle-même continue, et que la torsion de γ vaut τ . Les détails sont laissés au lecteur.

Pour montrer l'unicité à déplacement près, prenons deux solutions γ_1 et γ_2 . Les matrices $M_1(0)$ et $M_2(0)$ appartiennent à $\mathcal{SO}(3)$ donc il existe $R \in \mathcal{SO}(3)$ telle que $M_2(0) = RM_1(0)$. Or $(RM_1)' = R(M_1)' = RM_1Q$, et satisfait la même équation différentielle que M_2 , avec même donnée initiale. Il en résulte que $M_2(t) = RM_1(t)$ pour tout t . En particulier on a la relation $T_2 = RT_1$ entre les vecteurs tangents de γ_1 et γ_2 . En intégrant cette relation après avoir multiplié par v , on obtient que

$$\gamma_2(t) - \gamma_2(0) = R(\gamma_1(t) - \gamma_1(0))$$

pour tout t , et donc $\gamma_2 = R\gamma_1 + X$, où $X = \gamma_2(0) - R\gamma_1(0)$ est un vecteur constant. La courbe γ_2 se déduit donc de γ_1 par un déplacement.

Finalement, toutes les courbes déduites d'une solution par un déplacement sont des solutions en vertu de la Proposition 13. \square

Chapitre 2

Compléments sur les courbes planes

2.1 Intégration sur une courbe

On peut intégrer deux types d'objets sur une courbe : les fonctions et les formes différentielles de degré 1. Pour simplifier nous n'intégrerons que des objets continus.

Intégrale d'une fonction

Définition 18. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 et Γ son support. Si f est une fonction continue sur Γ , alors $t \rightarrow f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|$ est continue (vérifier) donc intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et l'intégrale curviligne de f sur γ est définie par

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt. \quad (2.1)$$

Exercice 25. Soient $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ et $\gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ des courbes définies sur $[0, 2\pi]$, montrer que

$$\int_{\gamma_2} f = 2 \int_{\gamma_1} f,$$

lorsque ces intégrales sont définies.

La notion d'intégrabilité ci-dessus est invariante par changement de paramétrisation.

Proposition 15. Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux courbes équivalentes, de trace commune Γ , et f une fonction continue sur Γ . Alors

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f.$$

La démonstration est identique à celle de la proposition 5.

1-formes différentielles

Rappelons la définition de [4], Chapitre 7.

Définition 19. Une 1-forme différentielle définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application de U à valeurs dans $\Lambda_1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 32. $\Lambda_1(\mathbb{R}^n)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , c'est-à-dire les *formes linéaires* sur \mathbb{R}^n . Si l'on note (dx_1, \dots, dx_n) la base duale de la base canonique de \mathbb{R}^n , tout élément de $\alpha \in \Lambda_1(\mathbb{R}^n)$ peut s'écrire $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n$. Rappelons que dx_i est également la différentielle de l'application $x \rightarrow x_i$ qui au vecteur x associe sa i ème coordonnée.

Maintenant, si $\alpha : U \rightarrow \Lambda_1(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire la décomposition ci-dessus pour $\alpha(x)$, pour tout $x \in U$, et l'on aura

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) dx_1 + \dots + \alpha_n(x) dx_n. \quad (2.2)$$

Exemple 2. L'exemple par excellence est celui de la différentielle d'une fonction. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, sa différentielle df est une 1-forme et

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Dans ce cours, la notion de *transposée* d'une forme différentielle par une application (voir [4], Chapitre 7) sera d'usage constant. Considérons la 1-forme α donnée par (2.2), définie sur U , et une courbe paramétrée $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable sur l'intervalle I et dont le support est inclus dans U . Si l'on note $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ pour tout $t \in I$, on peut remplacer dans (2.2), les *variables* x_i par les *fonctions* $x_i(t)$. On obtient alors une 1-forme sur I , définie pour tout $t \in I$ par

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x(t)) dx_i(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x(t)) x_i'(t) dt. \quad (2.3)$$

La 1-forme sur I définie ci-dessus est précisément la *transposée* de α par l'application $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et elle est notée $x^* \alpha$.

Exercice 26. Soit la fonction de deux variables $f(x, y) = x^2 - y^2$, définie sur \mathbb{R}^2 et la courbe $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Montrer que

$$\gamma^* df = -2 \sin(2t) dt.$$

Exercice 27. Soit la 1-forme $d\theta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et γ une courbe C^2 régulière de vecteur tangent unitaire T . Montrer que $v \kappa dt = T^* d\theta$, où v est la vitesse et κ la courbure.

Le résultat suivant justifie largement la notion de transposée :

Proposition 16. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, et $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe dérivable dont le support est inclus dans U , alors

$$x^* df = d(f \circ x). \quad (2.4)$$

Nous laissons la preuve de ce fait élémentaire en exercice, il s'agit de calculer la différentielle d'une fonction composée.

Remarque 33. L'égalité (2.4) est en réalité un cas particulier d'un fait très général. Si ω est une forme de degré arbitraire sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et si φ est une application différentiable définie sur un ouvert de \mathbb{R}^p à valeurs dans U , alors $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$. Autrement dit la différentielle extérieure commute avec la transposition. (voir par exemple [13] ou [2]). Dans le cas où ω est une fonction f , c'est-à-dire une forme de degré 0, on a $\varphi^*f = f \circ \varphi$ (voir [4]), et l'on retrouve (2.4).

On peut également composer les transpositions :

Proposition 17. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et α une 1-forme différentielle sur U . Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe dérivable dont le support est inclus dans U , et soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont l'image est incluse dans I . Alors

$$\varphi^*(x^*\alpha) = (x \circ \varphi)^*\alpha. \quad (2.5)$$

Démonstration. La forme α étant définie par (2.2), la forme $\beta = x^*\alpha$ est donnée par (2.3) et $\varphi^*(x^*\alpha)$ s'obtient à partir de (2.3) en y remplaçant la variable t par la fonction φ . on obtient donc

$$\varphi^*(x^*\alpha)(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x(\varphi(s)))x_i'(\varphi(s))\varphi'(s) ds = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x \circ \varphi(s))(x_i \circ \varphi)'(s) ds.$$

La dernière somme est précisément $(x \circ \varphi)^*\alpha$. \square

Remarque 34. Ici encore (2.5) se généralise, en particulier à des formes différentielles de degrés arbitraires, mais pour démontrer la forme la plus générale notre démonstration calculatoire doit être remplacée par une preuve plus conceptuelle, se basant sur la définition précise de la transposée.

Intégrale d'une 1-forme

Commençons par définir l'intégrale d'une 1-forme continue sur un intervalle de \mathbb{R} . Dans ce cas, l'expression (2.2) se simplifie en $\alpha(x) = f(x) dx$. Les amateurs noteront que dans ce cas dx est la différentielle de l'application identité, c'est-à-dire l'application identité elle-même. Selon la lettre utilisée pour désigner la variable, nous utiliserons également la notation dt ou ds au lieu de dx .

Définition 20. Soit $\alpha(x) = f(x) dx$ une 1-forme continue définie sur $[a, b]$. On définit

$$\int_a^b \alpha = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.6)$$

Dans le cas où $a > b$, on convient de poser, comme pour l'intégrale de Riemann,

$$\int_a^b \alpha = - \int_b^a \alpha.$$

Remarque 35. Autrement dit, l'intégrale de a à b de la forme $f(x) dx$ est définie comme l'intégrale (de Riemann) de a à b de la fonction f . La définition consiste donc à donner un deuxième nom à la quantité $\int_a^b f(x) dx$. Jusqu'ici nous l'appelions intégrale de a à b de la fonction $x \rightarrow f(x)$, à présent nous pouvons l'appeler aussi intégrale de a à b de la forme différentielle $f(x) dx$. Quel intérêt ? Pour répondre à cette question il faut se rappeler que $f(x) dx$ n'est qu'une des manières d'écrire la forme différentielle α . Par exemple la forme $2x dx$ est aussi la différentielle de x^2 , on peut donc l'écrire $d(x^2)$, et la définition ci-dessus donne donc un sens à l'expression

$$\int_0^1 d(x^2),$$

que nous n'utilisons pas jusqu'ici.

Remarque 36. Si F est une primitive de la fonction $x \rightarrow f(x)$, la valeur de l'intégrale (2.6) est $F(b) - F(a)$. Or F est une primitive de $x \rightarrow f(x)$ si et seulement si $f(x) dx = dF$. On a donc le résultat suivant, pour toute fonction C^1 :

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a). \quad (2.7)$$

Voici la formule de changement de variable, dans le langage des formes.

Proposition 18. Soit φ une fonction C^1 définie sur $[a, b]$ et soit α une 1-forme différentielle définie sur $\varphi([a, b])$ et continue. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \alpha = \int_a^b \varphi^* \alpha. \quad (2.8)$$

Preuve. Notons $\alpha = f(x) dx$. Soit F une primitive de la fonction $x \rightarrow f(x)$. Alors $\alpha = dF$, et donc $\varphi^* \alpha = \varphi^* dF = d(F \circ \varphi)$, par la Proposition 16. Il résulte donc de (2.7) que

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \alpha = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b d(F \circ \varphi) = \int_a^b \varphi^* \alpha.$$

□

Remarquons que $\varphi^* \alpha$ est définie par

$$\varphi^* \alpha(t) = f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

donc la proposition ci-dessus est bien la formule de changement de variable.

Définition 21. Soit α une 1-forme différentielle continue sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 dont la trace est incluse dans U . L'intégrale curviligne de la forme α sur γ est définie par

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \gamma^* \alpha. \quad (2.9)$$

Remarque 37. Le fait que γ soit C^1 et α soit continue garantit que $\gamma^*\alpha$ est continue sur $[a, b]$ (le vérifier), et donc que le membre de droite de (2.9) est bien défini.

Exercice 28. La 1-forme

$$\alpha(x, y) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Montrez que

$$\int_{\gamma} \alpha = 2\pi.$$

Remarque 38. Plus généralement, avec les notations de la définition 21 et si $\alpha = dF$, où F est une fonction C^1 sur U ; la Proposition 16 nous dit que $\gamma^*\alpha = d(F \circ \gamma)$. En vertu de (2.7), on a donc

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

(Pourquoi ceci est-il « presque » une généralisation de l'exercice précédent?)

Examinons l'effet d'un changement de paramétrisation sur l'intégrale d'une forme.

Proposition 19. Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux courbes équivalentes C^1 , de trace commune Γ , et soit α une 1-forme différentielle continue sur un ouvert U contenant Γ .

Si γ et $\tilde{\gamma}$ ont même orientation on a

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\tilde{\gamma}} \alpha,$$

tandis que si γ et $\tilde{\gamma}$ sont d'orientations opposées on a

$$\int_{\gamma} \alpha = - \int_{\tilde{\gamma}} \alpha.$$

Preuve. Notons $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, où φ est un C^1 -difféomorphisme de $[a, b]$ sur $[c, d]$, on a

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \gamma^* \alpha = \int_a^b (\tilde{\gamma} \circ \varphi)^* \alpha.$$

Par la Proposition 17 on a $(\tilde{\gamma} \circ \varphi)^* \alpha = \varphi^*(\tilde{\gamma}^* \alpha)$ et donc (2.8) nous donne

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \varphi^*(\tilde{\gamma}^* \alpha) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \tilde{\gamma}^* \alpha.$$

Si φ est croissant on a $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$, donc

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_c^d \tilde{\gamma}^* \alpha = \int_{\tilde{\gamma}} \alpha.$$

Dans le cas où φ est décroissant les bornes sont inversées, ce qui explique le changement de signe. \square

Intégration d'une 1-forme sur le bord d'un compact

Rappelons tout d'abord que le bord ∂U d'un sous-ensemble U de \mathbb{R}^2 est, par définition, égal à $\overline{U} \setminus \overset{\circ}{U}$. Si U « n'est pas trop compliqué », on s'attend à ce que ∂U soit un objet « de dimension 1 » donc, moralement, une réunion de courbes du plan. Le but de la définition qui suit est de clarifier cette vision intuitive.

Définition 22. On dit que K est un *bon compact* de \mathbb{R}^2 si K est compact et si

$$\partial K = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k,$$

où la réunion est disjointe et pour tout $1 \leq i \leq k$, l'ensemble Γ_i est la trace d'une courbe C^1 fermée régulière.

Les Γ_i s'appellent *composantes* de ∂K (voir la Figure 2.1).

Remarque 39. Le terme de « bon compact » n'est pas du tout standard, c'est simplement une commodité pour nous. Une terminologie plus correcte serait : sous variété-compacte à bord de dimension 2 de \mathbb{R}^2 . Une autre terminologie serait de dire que l'intérieur de K est un ouvert borné et C^1 de \mathbb{R}^2 .

Exercice 29. La boule fermée $\bar{B}(x, r)$ est un bon compact de \mathbb{R}^2 . Si B_1, \dots, B_n sont des boules ouvertes dont les adhérences sont disjointes et incluses dans une boule B_0 , alors

$$K = \bar{B}_0 \setminus \cup_{i=1}^n B_i$$

est un bon compact et $\partial K = \cup_{i=0}^n \partial B_i$.

On sait déjà comment intégrer une 1-forme sur chacune des composantes du bord d'un bon compact K puisque ce sont des courbes C^1 du plan. Il est donc naturel de définir l'intégrale d'une 1-forme comme étant la somme des valeurs obtenues sur chacune des composantes. A priori, cette définition est licite (i.e. indépendante de la paramétrisation choisie) à un détail important près qui est *l'orientation* sur chacune des composantes. Par conséquent, pour définir sans ambiguïté l'intégrale d'une 1-forme sur ∂K , nous devons au préalable définir une *orientation canonique* des courbes qui paramétrisent ∂K .

Définition 23. (et Proposition) Soit K un bon compact de \mathbb{R}^2 et Γ une composante de ∂K . Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^1 régulière simple et fermée qui paramétrise Γ . Notons N le vecteur normal du repère de Frénet de γ . Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'une des deux affirmations suivantes soit vraie.

1) Pour tout $t \in I$ et tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ on a $\gamma(t) + sN(t) \in K \iff s \geq 0$. On dit alors que γ et ∂K ont même orientation.

2) Pour tout $t \in I$ et tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ on a $\gamma(t) + sN(t) \in K \iff s \leq 0$. On dit alors que γ et ∂K sont d'orientations opposées.

En termes plus simples, dire que γ et ∂K ont même orientation signifie que le vecteur N « pointe vers K » (voir Figure 2.1). On ne démontre pas cette proposition.

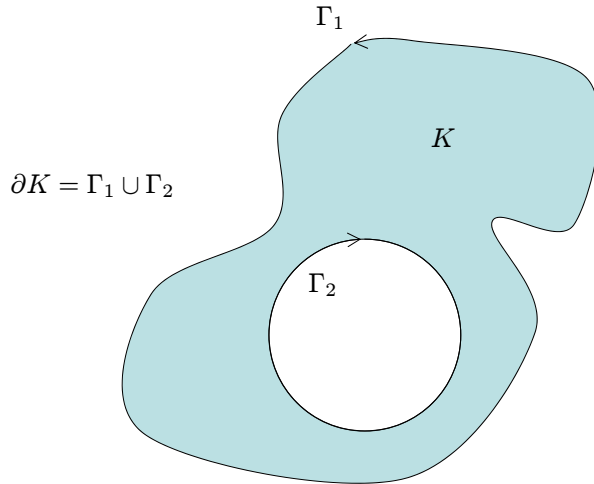


FIG. 2.1 – Un bon compact et l'orientation de son bord.

Remarque 40. Supposons que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux paramétrisations de Γ , que $t \in I$ et $u = \varphi(t)$, où φ est un difféomorphisme de I sur J .

Si $\gamma \sim_+ \tilde{\gamma}$, c'est-à-dire si φ est croissant, on sait que $N(t) = \tilde{N}(u)$, et donc $\gamma(t) + sN(t) = \tilde{\gamma}(u) + s\tilde{N}(u)$. En revanche, si $\gamma \sim_- \tilde{\gamma}$, alors $N(t) = -\tilde{N}(u)$ et donc $\gamma(t) + sN(t) = \tilde{\gamma}(u) - s\tilde{N}(u)$.

Il en résulte que, dans le premier cas, l'orientation de γ et $\tilde{\gamma}$ par rapport à ∂K coïncident, alors que dans le second cas elles sont différentes.

Exercice 30. Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\}$. Déterminez les composantes de ∂K et donnez-en une paramétrisation d'orientation compatible avec celle de ∂K .

On peut maintenant intégrer une 1-forme sur ∂K .

Définition 24. Soit K un bon compact, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ les composantes de ∂K , et α une 1-forme différentielle continue définie au voisinage de ∂K . Alors on définit l'intégrale de α sur ∂K par

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \dots + \int_{\gamma_n} \alpha,$$

où γ_i est une paramétrisation de Γ_i dont l'orientation est compatible avec celle de ∂K .

Remarque 41. Puisque $\gamma \sim_+ \tilde{\gamma}$ implique que les intégrales d'une 1-forme sur γ et $\tilde{\gamma}$ sont égales, la définition ci-dessus ne dépend pas des paramétrisations γ_i choisies, mais uniquement de K .

Exercice 31. Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\}$. Calculez l'intégrale sur ∂K de la 1-forme $x dy - y dx$.

Pour énoncer la formule de changement de variable relative aux intégrales des 1-formes sur le bord d'un bon compact, nous devons définir un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Si $\varphi : V \rightarrow U$ est un difféomorphisme entre deux ouverts connexes de \mathbb{R}^n (voir [4], Chapitre 3), la matrice jacobienne de φ est une matrice carrée $n \times n$ dont le déterminant ne s'annule pas, et donc est de signe constant sur V .

Définition 25. Si le déterminant de la matrice jacobienne de φ est partout strictement positif, on dit que φ préserve l'orientation.

Proposition 20. Soit K un bon compact de \mathbb{R}^2 , V un ouvert contenant ∂K , et $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ un C^1 -difféomorphisme de V sur $U = \varphi(V)$ qui préserve l'orientation. Alors $\varphi(K)$ est aussi un bon compact, et pour toute 1-forme β continue sur U on a

$$\int_{\partial\varphi(K)} \beta = \int_{\partial K} \varphi^* \beta. \quad (2.10)$$

Démonstration. Soit Γ une composante de ∂K . Alors $\varphi(\Gamma) \subset \partial\varphi(K)$ car φ est un difféomorphisme et un raisonnement simple montre que $\partial\varphi(K)$ est la réunion disjointe des $\varphi(\Gamma)$, lorsque Γ parcourt l'ensemble des composantes de ∂K .

A présent soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de Γ d'orientation canonique, alors $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ est une paramétrisation de $\varphi(\Gamma)$ d'orientation canonique également car φ préserve l'orientation et par définition

$$\int_{\tilde{\gamma}} \beta = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)^* \beta = \int_a^b \gamma^* (\varphi^* \beta) = \int_{\gamma} \varphi^* \beta.$$

En sommant pour toutes les composantes de ∂K on obtient (2.10). \square

2.2 Intégration sur un compact

Dans cette partie, nous souhaitons définir l'intégrale d'une 2-forme sur un compact de \mathbb{R}^2 . Pour ce faire, commençons par des rappels du cours de calcul différentiel.

Définition 26. Une forme différentielle de degré 2 sur $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application $\alpha : U \rightarrow \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$, où $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ désigne les formes bilinéaires antisymétriques sur \mathbb{R}^n .

Remarque 42. On a vu en cours de calcul différentiel qu'une 2-forme sur $U \subset \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

où $\alpha_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dans cette écriture $dx_i \wedge dx_j$ désigne le produit extérieur des formes dx_i et dx_j (voir [4]). Il n'est pas réellement utile pour nous de connaître la nature mathématique exacte de cet objet, seulement de savoir que $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ et que $dx_i \wedge dx_i = 0$. Une autre chose à noter c'est que dx_i désigne l'application i -ème coordonnée. Il nous arrivera de donner un autre nom à ces coordonnées, par exemple (x, y) ou (u, v) dans \mathbb{R}^2 . On écrira alors dx ou du au lieu de dx_i , mais il s'agira du même objet.

Le cas où $n = 2$ est particulièrement simple. En notant dx et dy au lieu de dx_1 et dx_2 , toute 2-forme sur $U \subset \mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\alpha = f dx \wedge dy \quad \text{où } f : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Exemple 3. Si $\beta = \beta_1 dx_1 + \dots + \beta_n dx_n$ est une 1-forme sur U différentiable, alors on définit la *différentielle extérieure*

$$d\beta = \sum_j d\beta_j \wedge dx_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j,$$

en tenant compte des identités $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ et $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Par exemple, sur \mathbb{R}^2 , si $\beta = x dy - y dx$, on a $d\beta = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2 dx \wedge dy$.

Comme pour les 1-formes, on peut définir la transposée d'une 2-forme. Plutôt que d'en donner la définition conceptuelle (voir [4]), on en donne ici la définition « calculatoire ».

Définition 27. Soit $\varphi : V \rightarrow U$ une application différentiable de $V \subset \mathbb{R}^p$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et soit

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} \alpha_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i \wedge dx_j \quad (2.11)$$

une 2-forme sur U . Notons

$$\varphi(y_1, \dots, y_p) = (x_1, \dots, x_n),$$

où les x_i sont des fonctions des variables y_1, \dots, y_p .

La *transposée* de α par φ est la 2-forme différentielle sur V obtenue en remplaçant dans l'expression (2.11) chaque variable x_i par la fonction $x_i(y_1, \dots, y_p)$. On définit de la même façon la transposée par φ d'une 1-forme, ou d'une forme de degré quelconque.

Cette définition ne peut se comprendre que sur un exemple.

Exemple 4. Soit la 2-forme $\alpha(x, y) = x dx \wedge dy$ définie sur \mathbb{R}^2 et $\varphi(u, v, w) = (u + v, v^2 - w^2)$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi^* \alpha(u, v, w) &= (u + v) d(u + v) \wedge d(v^2 - w^2) \\ &= (u + v)(du + dv) \wedge (2v dv - 2w dw) \\ &= 2(u + v)(v du \wedge dv - w du \wedge dw - w dv \wedge dw). \end{aligned}$$

Remarque 43. Parmi les propriétés de la transposition vues en cours de calcul différentiel (voir [4]) on a

- Lorsque $p = n = 2$, on peut écrire $\alpha(x, y) = f(x, y) dx \wedge dy$, et si l'on note $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, alors, d'après l'exemple 3,

$$\varphi^* \alpha = f \circ \varphi J\varphi du \wedge dv, \quad (2.12)$$

où $J\varphi$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne de φ .

- Si α et β sont des formes différentielles de degré arbitraire,

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^* \alpha) \wedge (\varphi^* \beta). \quad (2.13)$$

Exercice 32. Soit $\alpha = dx \wedge dy$, et $\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y)$, où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Montrez que $\varphi^* \alpha = r dr \wedge d\theta$.

La transposition a de plus les propriétés déjà évoquées dans le cas des 1-formes.

Proposition 21. On a

1. Soit $\varphi : V \rightarrow U$ une application différentiable de $V \subset \mathbb{R}^p$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$, et soit α une 1-forme sur U . Alors $d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha)$.
2. Si $\psi : W \rightarrow V$ et $\varphi : V \rightarrow U$ sont différentiables et α est une forme différentielle sur U de degré 1 ou 2, alors $\psi^*(\varphi^* \alpha) = (\varphi \circ \psi)^* \alpha$.

Démonstration. Pour la première propriété on procède de la façon suivante : tout d'abord on remarque que toute 1-forme sur U est une somme de termes de la forme $\alpha_i = f(x_1, \dots, x_n) dx_i$. Il suffit donc de prouver la propriété pour α_i (pourquoi?). On a $d\alpha_i = df \wedge dx_i$. Donc en vertu de (2.13), on a $\varphi^*(d\alpha_i) = (\varphi^* df) \wedge (\varphi^* dx_i)$. Or d'après la Proposition 16, on a $\varphi^* df = d(f \circ \varphi)$ et $\varphi^* dx_i = d(x_i \circ \varphi)$. Donc, en notant $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, on a

$$\varphi^*(d\alpha_i) = d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_i.$$

D'autre part $\varphi^* \alpha_i = f \circ \varphi d\varphi_i$ donc

$$d(\varphi^* \alpha_i) = d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_i + f \circ \varphi \wedge d(d\varphi_i) = d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_i,$$

où l'on a utilisé le fait que $d(d\omega) = 0$ pour toute forme différentielle ω (voir [4], Th.7.2.10). On a bien démontré que $d(\varphi^* \alpha_i) = \varphi^*(d\alpha_i)$.

La seconde propriété, dans le cas des formes de degré 1 se démontre comme la Proposition 17. Pour les formes de degré 2, il suffit de démontrer la propriété pour une forme $\alpha = f dx_i \wedge dx_j$ (pourquoi?). Mais une telle forme peut s'écrire $\beta_1 \wedge \beta_2$, où $\beta_1 = f dx_i$ et $\beta_2 = dx_j$ sont des 1-formes. Donc, par (2.13), on obtient

$$\psi^*(\varphi^* \alpha) = \psi^*(\varphi^* \beta_1) \wedge \psi^*(\varphi^* \beta_2) = (\varphi \circ \psi)^* \beta_1 \wedge (\varphi \circ \psi)^* \beta_2,$$

où l'on a utilisé la propriété pour les 1-formes β_1 et β_2 . En appliquant à nouveau (2.13) on obtient alors

$$\psi^*(\varphi^* \alpha) = (\varphi \circ \psi)^*(\beta_1 \wedge \beta_2) = (\varphi \circ \psi)^* \alpha.$$

□

Intégrale d'une 2-forme

Définition 28. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact et $\alpha = f dx \wedge dy$ une 2-forme continue sur K . On définit l'intégrale de α sur K par

$$\int_K \alpha = \iint_K f(x, y) dx dy,$$

où l'intégrale figurant à droite est l'intégrale double de la fonction f sur K .

Remarque 44. Comme dans le cas des 1-formes, on peut remarquer que la définition consiste simplement à donner une seconde appellation à la quantité $\iint_K f$: c'était l'intégrale de la fonction f sur K , c'est maintenant l'intégrale de la forme $f dx \wedge dy$ sur K .

La justification de ceci vient du fait que les opérations spécifiques aux formes différentielles ont des effets intéressants sur leur intégrale. La transposition donnera la formule de changement de variable, et la différentielle extérieure, la formule de Stokes que l'on verra dans la partie suivante. Ces résultats sont bien plus difficiles à énoncer — et dans le cas du théorème de Stokes à prouver — sans les formes différentielles.

Proposition 22. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact, V un ouvert contenant K , et $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ un C^1 -difféomorphisme de V sur $U = \varphi(V)$ qui préserve l'orientation. Alors pour toute 2-forme différentielle α continue sur U on a

$$\int_{\varphi(K)} \alpha = \int_K \varphi^* \alpha. \quad (2.14)$$

Remarque 45. Contrairement au cas des intégrales simples, on a besoin ici de supposer que φ est un difféomorphisme. En revanche, l'hypothèse que φ préserve l'orientation est une commodité pour simplifier l'énoncé ci-dessus : si φ était un difféomorphisme qui ne préserve pas l'orientation, il faudrait mettre un signe moins devant le second membre.

Démonstration. En écrivant $\alpha = f dx \wedge dy$, on a $\varphi^* \alpha = f \circ \varphi J\varphi du \wedge dv$ d'après (2.12), où $J\varphi$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne de φ . Alors (2.14) s'écrit

$$\iint_{\varphi(K)} f dx dy = \iint_K f \circ \varphi J\varphi du dv.$$

C'est presque la formule de changement de variable pour les intégrales multiples, à l'exception près que dans cette dernière, $|J\varphi|$ apparaît à la place de $J\varphi$. Mais nous avons supposé $J\varphi > 0$ donc (2.14) est démontré. \square

Exemple 5. Soit $f(x, y)$ une fonction continue, alors on peut définir une fonction correspondante en coordonnées polaires en posant $\tilde{f}(r, \theta) = f(x, y)$, si $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Alors en notant $\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y)$ l'application de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, on a

$$\int_{\varphi(K)} f(x, y) dx \wedge dy = \int_K \tilde{f}(r, \theta) r dr \wedge d\theta,$$

pourvu que φ soit un difféomorphisme sur un ouvert contenant K . Ici on a utilisé le fait que $\tilde{f} = f \circ \varphi$, et que $\varphi^*(dx \wedge dy) = r dr \wedge d\theta$.

2.3 Formule de Stokes dans le plan

Le théorème bien connu pour les fonctions d'une variable réelle, à savoir que

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad (2.15)$$

pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$, se généralise en plusieurs variables sous la forme du Théorème de Stokes. Celui-ci affirme que si K est un « bon compact » de \mathbb{R}^n , et α une forme différentielle C^1 de degré $n - 1$ définie sur un voisinage de K , alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha. \quad (2.16)$$

L'égalité (2.15) est un cas particulier de la formule de Stokes correspondant à $K = [a, b]$, $\omega = f$, et $d\omega = f'(t) dt$.

Dans cette partie, nous souhaitons démontrer la formule de Stokes dans le cas $n = 2$.

Théorème 3 (de Stokes). *La formule (2.16) est valable si K est un bon compact de \mathbb{R}^2 et α une 1-forme C^1 définie sur un ouvert contenant K .*

Avant la démonstration de ce théorème, donnons un certain nombre d'énoncés qui en sont des corollaires, ou des formulations différentes.

Corollaire 2. Soit K un bon compact, et soit A son aire (définie comme l'intégrale double sur K de la fonction constante égale à 1). Alors

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx. \quad (2.17)$$

Preuve. Soit $\alpha = x dy - y dx$. On a vu que $d\alpha = 2dx \wedge dy$ et donc

$$\int_{\partial K} \alpha = 2 \int_K dx \wedge dy = 2 \iint_K dx dy.$$

□

Exemple 6. Posons $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq R\}$, avec $R > 0$. Il s'agit du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R . Son bord est le cercle que l'on peut paramétrer par $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ sur $[0, 2\pi]$. L'orientation de γ est compatible avec celle de ∂K et donc

$$\int_{\partial K} x dy - y dx = \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t dt = 2\pi R^2.$$

L'aire de K est donc πR^2 .

Une autre conséquence du théorème de Stokes est la *formule flux-divergence* : soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs C^1 . La *divergence* de X est la fonction

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y},$$

où $X = (X_1, X_2)$. Si K est un bon compact inclus dans U , le *flux* de X à travers ∂K est défini comme l'intégrale de $X \cdot \nu$ sur ∂K , où ν est le vecteur normal unitaire pointant vers l'*extérieur* de K .

Corollaire 3. On a

$$\int_{\partial K} X \cdot \nu = \iint_K \operatorname{div} X \, dx \, dy. \quad (2.18)$$

Preuve. En appliquant (2.16) à la forme différentielle $\alpha = X_1 \, dy - X_2 \, dx$ on obtient

$$\int_{\partial K} X_1 \, dy - X_2 \, dx = \int_K \operatorname{div} X \, dx \wedge dy. \quad (2.19)$$

Soit Γ une composante de ∂K paramétrée par une courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ définie sur $[a, b]$, elle-même paramétrée à par l'abscisse curviligne et d'orientation canonique. Alors le vecteur tangent du repère de Frénet de γ est $T = (x', y')$ et le vecteur normal pointant vers l'*intérieur* de K est $N = T^\perp = (-y', x')$, donc $\nu(\gamma(t)) = (y'(t), -x'(t))$. On a donc

$$\int_{\gamma} X_1 \, dy - X_2 \, dx = \int_a^b (y' X_1 \circ \gamma - x' X_2 \circ \gamma) = \int_a^b \nu \cdot X \circ \gamma = \int_{\gamma} X \cdot \nu.$$

Le membre de gauche de (2.19) est donc bien le flux de X à travers ∂K . \square

Notation 2. Pour alléger l'écriture, on convient désormais que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ désignent les dérivées partielles d'une fonction f par rapport aux variables x et y .

Exercice 33. En appliquant (2.18) à X^\perp , montrez que

$$\int_{\partial K} X \cdot \tau = \iint_K \operatorname{rot} X \, dx \, dy,$$

où τ désigne le vecteur tangent unitaire à ∂K , orienté selon l'orientation canonique, et $\operatorname{rot} X = \partial_x X_2 - \partial_y X_1$.

2.4 Preuve du théorème de Stokes

Le cas d'un rectangle

En toute rigueur, un rectangle n'est pas un bon compact car son bord n'est pas C^1 . En réalité on peut énoncer une version du Théorème de Stokes dans ce cas (et même pour tout compact dont le bord est seulement C^1 par morceaux). Cette version, particulièrement simple à démontrer, sert d'outil de base pour démontrer le Théorème 3.

Proposition 23. Soit $K = [a, b] \times [c, d]$, où $a < b$ et $c < d$. Alors pour toute 1-forme α de classe C^1 sur un voisinage de K on a

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha.$$

Preuve. On a $\alpha(x, y) = p(x, y) dx + q(x, y) dy$ et $d\alpha = (\partial_x q - \partial_y p) dx \wedge dy$. Donc

$$\int_K d\alpha = \iint_K (\partial_x q(x, y) - \partial_y p(x, y)) dx dy = \int_c^d \int_a^b (\partial_x q(x, y) - \partial_y p(x, y)) dx dy.$$

En utilisant le Théorème de Fubini, cette égalité devient

$$\begin{aligned} \int_K d\alpha &= \int_c^d \int_a^b \partial_x q(x, y) dx dy - \int_a^b \int_c^d \partial_y p(x, y) dy dx = \\ &= \int_c^d q(b, y) - q(a, y) dy - \int_a^b p(x, d) - p(x, c) dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le bord de K peut être paramétré par quatre courbes :

$$\gamma_1 : t \rightarrow (t, c), \quad \gamma_2 : t \rightarrow (b, t), \quad \gamma_3 : t \rightarrow (t, d), \quad \gamma_4 : t \rightarrow (a, t),$$

où γ_1 et γ_3 sont définies sur $[a, b]$ et où γ_2 et γ_4 sont définies sur $[c, d]$. On a

$$\begin{aligned} \gamma_1^* \alpha(t) &= p(t, c) dt, & \gamma_2^* \alpha(t) &= q(b, t) dt, \\ \gamma_3^* \alpha(t) &= p(t, d) dt, & \gamma_4^* \alpha(t) &= q(a, t) dt. \end{aligned}$$

et donc (23) devient

$$\int_K d\alpha = \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha + \int_{\gamma_3} \alpha - \int_{\gamma_4} \alpha = \int_{\partial K} \alpha.$$

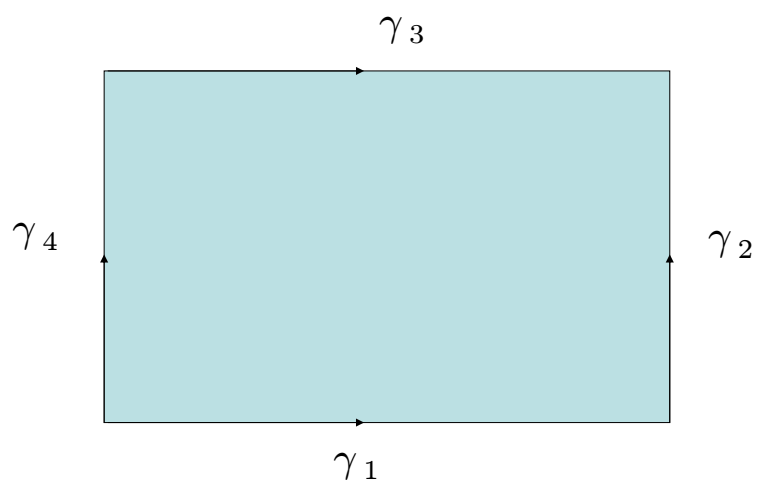
La dernière égalité vient du fait que γ_1 et γ_3 ont l'orientation canonique alors que γ_2 et γ_4 ont l'orientation contraire (voir Figure 2.2). \square

Recouvrement par des rectangles

Soit K un bon compact. Pour simplifier, on suppose ∂K de classe C^2 . Alors K peut être recouvert par des « rectangles », ou plutôt par des ouverts difféomorphes à des rectangles :

Proposition 24. Soit K un bon compact, et $P \in K$. Alors de deux choses l'une :

- si $P \notin \partial K$ alors il existe un carré ouvert centré en P et contenu dans K ,
- si $P \in \partial K$ alors il existe $\varepsilon > 0$ et un difféomorphisme φ de $] -\varepsilon, \varepsilon[\times] -\varepsilon, \varepsilon[$ sur son image U_P tels que $P = \varphi(0, 0)$ et tels que $\varphi(t, s) \in K \iff s \geq 0$.
De plus φ préserve l'orientation.

FIG. 2.2 – Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

Démonstration. Si $P \notin \partial K$ alors que $P \in K$, cela signifie que P est un point intérieur à K , et donc qu'il existe un ouvert de \mathbb{R}^2 inclus dans K et contenant P . Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre P et de rayon ε soit contenue dans K . Si l'on choisit comme norme la norme $\|\cdot\|_\infty$ et que l'on note $P = (x, y)$, cela se traduit par

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset K,$$

ce qui prouve la première assertion.

Si $P \in \partial K$, soit Γ la composante de ∂K contenant P , et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de Γ d'orientation canonique. Quitte à reparamétriser, on peut en outre supposer que $a < 0 < b$, que $\gamma(0) = P$, et que γ est paramétrisée par l'abscisse curviligne. Notons (T, N) les vecteurs du repère de Frénet associé à γ et pour tout $t \in [a, b]$ et tout $s \in \mathbb{R}$, posons

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + sN(t).$$

Comme Γ est C^2 , la fonction φ est C^1 . De plus, on a $\partial_t \varphi(0, 0) = T(0)$ et $\partial_s \varphi(0, 0) = N(0)$ donc le déterminant jacobien de φ en $(0, 0)$ est $J\varphi(0, 0) = 1$. Il en résulte par le théorème d'inversion locale qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que la restriction de φ à $] -\varepsilon_1, \varepsilon_1[^2$ est un difféomorphisme sur son image. Par ailleurs, la Définition 23 implique qu'il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que si $t, s \in] -\varepsilon_2, \varepsilon_2[$ alors $\varphi(t, s) \in K \iff s \geq 0$. En choisissant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, il résulte que φ est un difféomorphisme de $] -\varepsilon, \varepsilon[^2$ sur son image, préservant l'orientation puisque $J\varphi(0, 0) = 1$, et tel que $\varphi(t, s) \in K \iff s \geq 0$. De plus $\varphi(0, 0) = \gamma(0) = P$. \square

Proposition 25. Soit $P \in K$ et U_P l'ouvert défini dans la proposition précédente. Alors pour toute 1-forme différentielle α de classe C^1 sur un voisinage de K et nulle sur $K \setminus U_P$ on a

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha. \quad (2.21)$$

Preuve. Dans le cas où $P \notin \partial K$, l'ouvert U_P est de la forme $I \times J$, où $I =]a, b[$ et $J =]c, d[$ sont des intervalles ouverts, et donc en appliquant la Proposition 23 sur le rectangle $C = [a, b] \times [c, d]$ on a

$$\int_C d\alpha = \int_{\partial C} \alpha.$$

De plus, comme $\alpha = 0$ en dehors de U_P , on a $\alpha = 0$ sur ∂C et $\alpha = 0$ sur $K \setminus C$. Donc l'intégrale de $d\alpha$ sur K est égale à son intégrale sur C et vaut 0. On en déduit (2.21) en remarquant que, puisque $U_P \subset K$, on a $\partial K \cap U_P = \emptyset$ (pourquoi?) et donc $\alpha = 0$ sur ∂K .

Si $P \in \partial K$, alors $U_P = \varphi(] -\varepsilon, \varepsilon[^2)$, où φ est un difféomorphisme préservant l'orientation. De plus, $\varphi(t, s) \in K \iff s \geq 0$ et donc

$$U_P \cap K = \varphi(] -\varepsilon, \varepsilon[\times [0, \varepsilon]), \quad U_P \cap \partial K = \varphi(] -\varepsilon, \varepsilon[\times \{0\}).$$

Posons $C = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, \varepsilon]$. En appliquant successivement la formule de changement de variable (2.14), la Proposition 21 et finalement la Proposition 23 dans C à la forme $\varphi^*\alpha$, on obtient

$$\int_K d\alpha = \int_{\varphi(C)} d\alpha = \int_C \varphi^*(d\alpha) = \int_C d(\varphi^*\alpha) = \int_{\partial C} \varphi^*\alpha.$$

Montrons, ce qui achèvera la démonstration, que

$$\int_{\partial C} \varphi^*\alpha = \int_{\partial K} \alpha. \quad (2.22)$$

Si l'on applique la formule de changement de variable (2.10) (qui reste valable pour des bords C^1 par morceaux, nous ne le démontrerons pas) on obtient

$$\int_{\partial C} \varphi^*\alpha = \int_{\partial\varphi(C)} \alpha.$$

Or $\partial\varphi(C)$ est l'ensemble des $(x, y) = \varphi(t, s)$ tels que $t = \pm\varepsilon$ ou $s = \varepsilon$ ou $s = 0$. Dans les deux premiers cas $\varphi(t, s) \in \partial U_P$ et donc $\alpha(x, y) = 0$. Le dernier cas correspond à $(x, y) \in \partial K$. On obtient donc

$$\int_{\partial\varphi(C)} \alpha = \int_{U_P \cap \partial K} \alpha = \int_{\partial K} \alpha,$$

puisque $\alpha = 0$ en dehors de U_P . Ceci achève de démontrer (2.22). \square

Partition de l'unité

Lemme 1. En utilisant les notations de la Proposition 25, il existe un nombre fini de points P_1, \dots, P_k et de réels positifs r_1, \dots, r_k tels que $K \subset \cup_i B(P_i, r_i)$ et tels que $B(P_i, r_i) \subset U_{P_i}$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Preuve. Choisissons pour tout $P \in K$ un réel $r_P > 0$ tel que $B(P, r_P) \subset U_P$. Il en existe un puisque U_P est un ouvert contenant P . Alors

$$K \subset \cup_{P \in K} B(P, r_P),$$

et donc, puisque K est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini que l'on note $\cup_i B(P_i, r_i)$. \square

Lemme 2. Soient $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$ des boules ouvertes et U leur réunion. Alors il existe des fonctions $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de classe C^∞ sur U et telles que

- Pour tout $1 \leq i \leq n$ la fonction f_i soit nulle en dehors de B_i et $0 \leq f_i \leq 1$.
- Pour tout $x \in U$ on ait $\sum_i f_i(x) = 1$.

On dit que $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une *partition de l'unité* subordonnée à $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$, de classe C^∞ .

Démonstration. On commence par définir des fonctions $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont C^∞ , comprises entre 0 et 1 et telles que $(g_i(x) = 0) \iff (x \notin B_i)$. Puis on pose

$$f_i = \frac{g_i}{\sum_{k=1}^n g_k}.$$

Le dénominateur est non nul si $x \in \cup_i B_i$ car alors un des termes de la somme au moins est différent de 0. Les fonctions f_i sont ainsi bien définies sur U , et leurs propriétés faciles à vérifier (le faire).

Reste à construire les fonctions g_i . Soit ζ une fonction C^∞ sur \mathbb{R}_+ , égale à 1 sur $[0, 1/2]$, telle que $0 < \zeta(x) < 1$ si $1/2 < x < 1$ et telle que $\zeta(x) = 0$ si $x \geq 1$ (voir la remarque ci-dessous pour l'existence d'une telle fonction). Si (x_i, y_i) est le centre de B_i et r_i , son rayon, on définit g_i par

$$g_i(x, y) = \zeta\left(\frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{r_i^2}\right).$$

Cette fonction a les propriétés requises (le vérifier). □

Remarque 46. La construction d'une fonction ζ ayant les propriétés énoncées dans la démonstration ci-dessus n'est pas une chose très simple. On a le choix entre donner une fonction explicitement, et alors la vérification des propriétés est fastidieuse, ou donner le procédé de construction, ce que nous allons faire. Tout d'abord on définit une fonction f sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = 1$ si $x < 1/2$ et $f(x) = 0$ si $x \geq 1/2$, et on la prolonge à \mathbb{R}_- par parité. Elle a toutes les propriétés requises, sauf qu'elle n'est pas C^∞ !

On la rend plus lisse par *convolution* : on pose $g(x) = e^{\frac{-1}{1-x^2}}$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ sinon. La fonction g est C^∞ (point crucial à vérifier), positive, et nulle en dehors de $[-1, 1]$. En posant $h(x) = g(2x)$ puis $\ell(x) = h(x) / \int_{\mathbb{R}} h$, on obtient ainsi une fonction ℓ positive, C^∞ , d'intégrale égale à 1, et nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$. La fonction ζ voulue sera définie par

$$\zeta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\ell(x - y) dy.$$

Le fait que ζ est C^∞ se démontre en dérivant sous le signe \int , les autres propriétés se démontrent sans trop de problèmes (essayez!).

Conclusion

Achevons maintenant la preuve du Théorème de Stokes. En utilisant les notations des deux lemmes ci-dessus on pose, pour toute 1-forme α de classe C^1 sur un voisinage du bon compact K ,

$$\alpha_i = f_i \alpha,$$

où $\{f_i\}_i$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{B(P_i, r_i)\}_i$ de K par des boules ouvertes telles que $B(P_i, r_i) \subset U_{P_i}$.

Alors $\sum_i \alpha_i = \alpha$ et α_i est nulle sur $K \setminus B(P_i, r_i)$ donc sur $K \setminus U_{P_i}$. On peut alors appliquer la proposition 25 qui nous donne

$$\int_K d\alpha_i = \int_{\partial K} \alpha_i.$$

En sommant pour i allant de 1 à n on obtient (2.16).

2.5 Inégalité isopérimétrique

Théorème 4. *Soit K un bon compact dont le bord ∂K n'a qu'une composante Γ . Notons L la longueur de Γ et A l'aire de K . Alors*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

avec égalité si et seulement si γ est un cercle.

Une des nombreuses démonstrations existantes fait appel aux séries de Fourier. On aura besoin du résultat suivant.

Lemme 3. Soient f et g deux fonctions 2π -périodiques et continues. On note $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{int}$ leurs séries de Fourier respectives. Alors

$$\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\bar{g} - \bar{f}g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \bar{d}_n - \bar{c}_n d_n. \quad (2.23)$$

Preuve. Pour montrer (2.23), on utilise l'identité

$$|f - ig|^2 - |f + ig|^2 = 2i(f\bar{g} - \bar{f}g),$$

qui se démontre (le faire) en développant le membre de gauche, c'est-à-dire $(f - ig)(\bar{f} + i\bar{g}) - (f + ig)(\bar{f} - i\bar{g})$. L'identité de Parseval donne alors

$$\frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\bar{g} - \bar{f}g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2,$$

où $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont respectivement les coefficients de Fourier de $f - ig$ et $f + ig$, c'est-à-dire $\alpha_n = c_n - id_n$ et $\beta_n = c_n + id_n$. L'identité (2.23) s'en déduit en notant que

$$|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 2i(c_n \bar{d}_n - \bar{c}_n d_n).$$

□

On peut maintenant donner la preuve du théorème. Paramétrons Γ par une courbe C^1 fermée simple et régulière $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\|\gamma'(t)\|$ est constant et d'orientation canonique. On note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, et on définit une

fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(t) = x(t) + iy(t)$, pour tout $t \in [0, 2\pi[$. Alors f est C^1 . On note $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de f . On a

$$\frac{L^2}{4\pi^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2. \quad (2.24)$$

Preuve. On a $\|\gamma'(t)\|^2 = |f'(t)|^2$. De plus, comme $\|\gamma'(t)\|$ est constant on a

$$\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt \right)^2 = \frac{L^2}{2\pi}.$$

D'autre part, la série de Fourier de f' est $\sum_{n \in \mathbb{Z}} inc_n e^{int}$ et donc, d'après l'identité de Parseval,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

Il en résulte (2.24). \square

D'autre part,

$$A = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2. \quad (2.25)$$

Preuve. On utilise (2.17). En remplaçant x par $(f + \bar{f})/2$ et y par $(f - \bar{f})/2i$, on obtient l'identité

$$\gamma^*(x dy - y dx) = \frac{1}{2i} (f'(t)\bar{f}(t) - \bar{f}'(t)f(t)) dt,$$

et, en intégrant,

$$A = \frac{1}{4i} \int_0^{2\pi} f'(t)\bar{f}(t) - \bar{f}'(t)f(t) dt.$$

En appliquant le Lemme ci-dessus aux fonctions f' et f on obtient alors, en utilisant le fait que la série de Fourier de f' est $\sum_{n \in \mathbb{Z}} inc_n e^{int}$, que

$$A = 2\pi \frac{1}{4i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (inc_n \bar{c}_n - (-in \bar{c}_n) c_n) = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2,$$

c'est-à-dire (2.25). \square

Au vu de (2.24) et (2.25), on a bien

$$\frac{L^2}{4\pi} \geq A,$$

et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité est que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2. \quad (2.26)$$

Or chacun des termes de la somme de gauche étant inférieur au terme correspondant de la somme de droite, (2.26) est vérifié si et seulement si $n|c_n|^2 = n^2|c_n|^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit si et seulement si $c_n = 0$ pour tout $n < 0$ et tout $n > 1$. Alors $f(t) = c_0 + c_1 e^{it}$, et Γ est un cercle de centre c_0 et de rayon $|c_1|$.

Chapitre 3

Calcul différentiel sur les surfaces

3.1 Surfaces de \mathbb{R}^3

Définition 29. Une *surface paramétrée* ou *nappe paramétrée* est une application différentiable et injective $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , telle que pour tout $(u, v) \in U$, le rang de la différentielle $dX(u, v)$ soit égal à 2.

Remarque 47. - La définition ci-dessus correspond à un objet « lisse » (différentiabilité), et qui est de dimension 2 (condition sur le rang de la différentielle). Pour montrer l'utilité de cette dernière condition, remarquons que $X(u, v) = (u, 0, 0)$ vérifie les autres conditions, mais que $X(\mathbb{R}^2)$ est une droite.

- La condition sur le rang de la différentielle équivaut au fait que les dérivées partielles $\partial_u X$ et $\partial_v X$ soient des vecteurs linéairement indépendants, ou encore que le produit vectoriel $\partial_u X \wedge \partial_v X$ soit différent de zéro sur U .
- Comme dans le cas des courbes paramétrées, la surface géométrique, qui nous intéresse, est $X(U)$.

Exemple 7. 1. Si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , l'application $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $X(u, v) = (u, v, 0)$ est une surface paramétrée (vérifiez) qui de plus est C^∞ . On a $X(U) = U \times \{0\}$. (voir Figure 3.1)

2. Si $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$ sont deux vecteurs linéairement indépendants et si $P_0 \in \mathbb{R}^3$, alors $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $X(u, v) = P_0 + uX_1 + vX_2$ est une surface paramétrée C^∞ (vérifiez). L'ensemble $X(\mathbb{R}^2)$ est le plan affine passant par P_0 et dirigé par $\text{vect}(X_1, X_2)$. (voir Figure 3.1)

3. Si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur U alors $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ est une surface paramétrée. En effet X est clairement différentiable et les dérivées partielles

$$\partial_u X = (1, 0, \partial_u f), \quad \partial_v X = (0, 1, \partial_v f)$$

sont linéairement indépendantes. L'ensemble $X(U)$ s'appelle le *graphe* de la fonction f (voir Figure 3.1).

4. Soient a et b deux réels non nuls. L'application $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$X(u, v) = (au \cos v, au \sin v, bv) \quad (3.1)$$

est une surface paramétrée C^∞ (vérifiez). L'ensemble $X(U)$ se nomme *hélicoïde* (voir Figure 3.1).

Définition 30. On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une *surface* si $\Sigma \neq \emptyset$ et pour tout $P \in \Sigma$ il existe un voisinage ouvert V de P et une surface paramétrée $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que $\Sigma \cap V = X(U) \cap V$ et tels que

$$X : U \rightarrow X(U) \text{ est un homéomorphisme.} \quad (3.2)$$

Si l'on ajoute la condition que X soit C^k alors on dit que la surface est C^k .

Remarque 48. La condition (3.2) nécessite quelques explications. Elle signifie exactement que $X : U \rightarrow X(U)$ est bijective (la surjectivité est automatique), continue (automatique puisque u est C^1), et que la bijection réciproque est continue.

Cette dernière condition signifie que si $\{P_n\}_n$ est une suite dans $X(U)$ qui converge vers $P \in X(U)$ (au sens de la distance euclidienne de \mathbb{R}^3), alors la suite des $\{(u_n, v_n)\}_n$, où $P_n = X(u_n, v_n)$ converge vers $(u, v) \in U$ tel que $P = X(u, v)$. Voir la figure 3.2 pour un exemple où X satisfait toute les propriétés requises, sauf que X^{-1} n'est pas continue.

Remarque 49. Une définition plus simple serait : $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une *surface* si il existe une surface paramétrée $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\Sigma = X(U)$, et $X : U \rightarrow X(U)$ est un homéomorphisme, mais cette définition serait trop restrictive. En effet, contrairement au cas des courbes, une surface peut ne pas être « paramétrable en totalité », mais seulement par morceaux. C'est le cas de la sphère par exemple.

Exemple 8. Si $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de la forme $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 et f est C^k sur U , alors $\Sigma = X(U)$ est une surface de \mathbb{R}^3 . En effet, il suffit de montrer que X est un homéomorphisme de U sur $X(U)$. La bijectivité et la continuité de X sont évidentes. Pour la continuité de X^{-1} , on remarque que X^{-1} est la restriction à Σ de la projection $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Celle-ci est bien entendu continue, donc X^{-1} aussi.

La définition ci-dessus ne s'utilise pas telle quelle mais par le biais de la proposition suivante, qui est un cas particulier de ([4], Proposition 6.5.2)

Proposition 26. Soit V un ouvert de \mathbb{R}^3 et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^k , et soit

$$\Sigma = \{P \in V \mid f(P) = 0\}.$$

Si $\Sigma \neq \emptyset$ et si pour tout $x \in \Sigma$ on a $df(x) \neq 0$ alors Σ est une surface C^k .

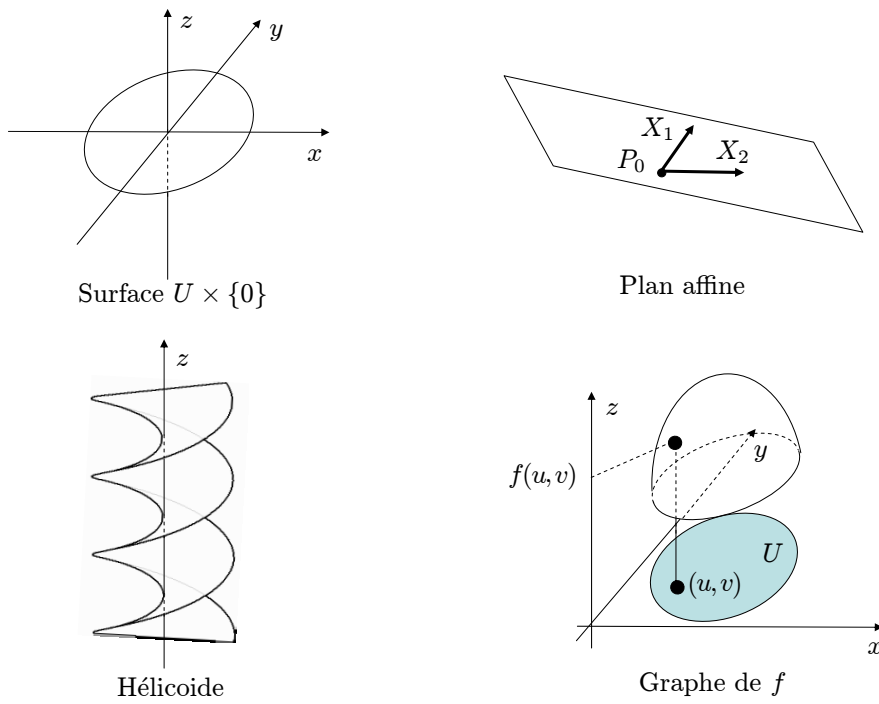


FIG. 3.1 – Surfaces paramétrées.

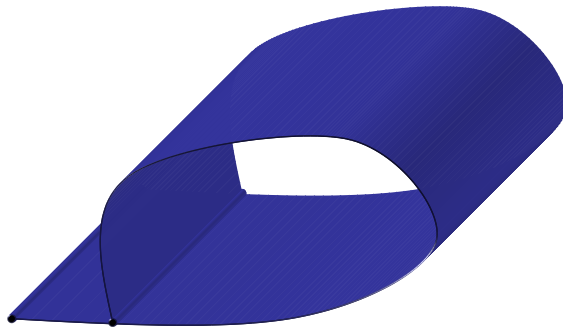


FIG. 3.2 – X^{-1} n'est pas un homéomorphisme.

Preuve. C'est une application du théorème des fonctions implicites, voir [4], Proposition 6.5.2. Celui-ci implique en effet que Σ est localement un graphe, et comme dans l'exemple ci-dessus, ceci implique que Σ est une surface. \square

Exemple 9. 1. L'ensemble des points de l'espace à une distance donnée r d'un point fixe C s'appelle la *sphère* de centre C et de rayon r . Dans le cas où le centre est 0 et le rayon 1, on la note S^2 et son équation est (vérifier) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La proposition ci-dessus s'applique à $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et donc S^2 est une surface.

2. L'ensemble des points de l'espace à une distance donnée r d'une droite fixe D s'appelle *cylindre* d'axe D et de rayon r . Dans le cas où l'axe est l'axe des z et le rayon 1, son équation est (vérifier) $x^2 + y^2 = 1$. La proposition ci-dessus s'appliquant à $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, ce cylindre est une surface de \mathbb{R}^3 .

Exercice 34. Montrez que pour tous $0 < r < R$ la Proposition 26 s'applique à la fonction

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2.$$

3.2 Coordonnées

Une surface, comme une courbe, peut admettre de nombreuses paramétrisations. Chaque paramétrisation associe à un couple (u, v) un point $P = X(u, v)$ sur la surface. Le couple (u, v) constitue les coordonnées du point P dans la paramétrisation choisie.

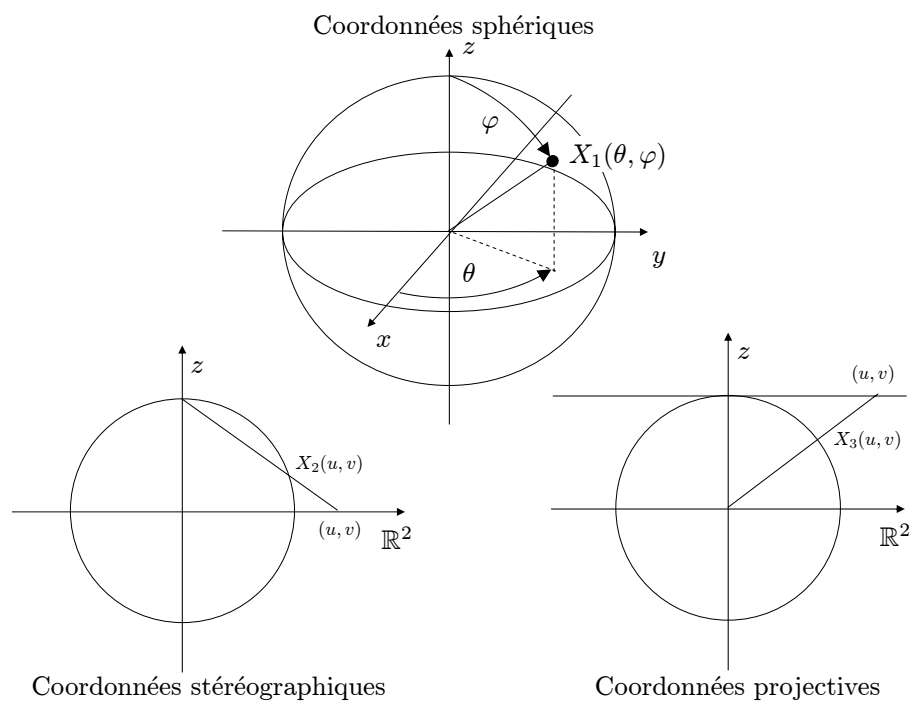
Définition 31. Soit Σ une surface et $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée telle que $X(U) \subset \Sigma$ et $X : U \rightarrow X(U)$ soit un homéomorphisme. On dit que X est une *paramétrisation locale* de Σ et définit un *système de coordonnées* sur Σ . Si $P = X(u, v)$ on dit que (u, v) sont les *coordonnées de P* dans cette paramétrisation. Les fonctions $P \rightarrow u$ et $P \rightarrow v$ sont les *fonctions coordonnées* dans la paramétrisation X , et $P \rightarrow (u, v)$ est la *carte locale* associée à X (c'est la bijection réciproque de X , définie sur $X(U)$).

Exemple 10. (Coordonnées sur \mathbb{R}^2)

L'application $X(u, v) = (u, v)$ définie sur \mathbb{R}^2 définit un système de coordonnées (les coordonnées dites *cartésiennes*) sur \mathbb{R}^2 . Ce système est canonique dans le sens où les coordonnées d'un point P sont le point P lui-même. C'est le cas de la base canonique de \mathbb{R}^n : les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique ne sont autres que ce vecteur lui-même.

L'application $X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]t, t + 2\pi[$ définit un système de coordonnées (les coordonnées *polaires* sur \mathbb{R}^2 .)

Exemple 11. (Coordonnées sur S^2) On rappelle que S^2 est la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Voici trois exemples de systèmes de coordonnées sur S^2 (voir Figure 3.3)

FIG. 3.3 – Coordonnées sur S^2 .

Les *coordonnées sphériques* sont définies par l'application

$$X_1(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad (3.3)$$

où $\varphi \in]0, \pi[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. Les *coordonnées stéréographiques* sont définies par l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$X_2(u, v) = \left(\frac{2u}{1+r^2}, \frac{2v}{1+r^2}, \frac{r^2-1}{1+r^2} \right), \quad (3.4)$$

où $r = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Les *coordonnées projectives* sont définies par l'application définie sur \mathbb{R}^2 par

$$X_3(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{1+r^2}}, \frac{v}{\sqrt{1+r^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \right), \quad (3.5)$$

où $r = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Exercice 35. Montrer pour $i = 1, 2, 3$ que X_i définit bien un système de coordonnées sur S^2 , et déterminer l'image de X_i .

Définition 32. Soit Σ une surface et $X_1 : U_1 \rightarrow \Sigma$ et $X_2 : U_2 \rightarrow \Sigma$ deux paramétrisations locales C^k sur Σ . On appelle *changement de coordonnées* de X_1 à X_2 l'application φ telle que si $P = X_1(u_1, v_1) = X_2(u_2, v_2)$, alors $\varphi(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$.

Remarque 50. L'application φ ci-dessus s'écrit $X_2^{-1} \circ X_1$, c'est une bijection de $X_1^{-1}(V)$ sur $X_2^{-1}(V)$ (le vérifier), où $V = X(U_1) \cap X(U_2)$ est l'ensemble des points de Σ ayant à la fois des coordonnées dans les deux systèmes.

La proposition suivante donne une propriété intéressante des changements de coordonnées.

Proposition 27. Avec les notations de la définition et de la remarque précédentes, φ est un C^k -difféomorphisme de $X_1^{-1}(V)$ sur $X_2^{-1}(V)$.

Preuve de la proposition. Soit $P = X_1(u_1, v_1) = X_2(u_2, v_2)$. Montrons que φ est C^k et de différentielle inversible au voisinage de (u_1, v_1) (en vertu du théorème d'inversion globale, ceci implique que l'inverse de φ est C^k et donc que φ est un C^k difféomorphisme). Notons $X_2 = (x, y, z)$, où x, y, z sont des fonctions de u et v . Puisque $dX_2(u_2, v_2)$ est de rang 2, un de ses mineurs d'ordre 2 est non nul. Supposons qu'il s'agit de celui faisant intervenir les dérivées de x et y par rapport à u et v . Alors, en posant $\tilde{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, on a une application à valeurs dans \mathbb{R}^2 dont le déterminant jacobien en (u_2, v_2) est non nul. Elle est donc localement inversible (voir [4]), notons $\tilde{Y}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ son inverse local, qui est C^k , et définissons une application C^k sur un voisinage de P dans \mathbb{R}^3 par $Y(x, y, z) = \tilde{Y}(x, y)$. On a, sur un voisinage de (u_2, v_2) l'égalité $Y \circ X_2 = \tilde{Y} \circ \tilde{X} = \text{Id}$.

De plus $\varphi = Y \circ X_1$ au voisinage de (u_1, v_1) . En effet si $Q = X_2(a', b') = X_1(a, b)$, alors $Y(Q) = (a', b')$, et donc $Y \circ X_1(a, b) = (a', b')$. L'application $Y \circ X_1$ étant C^k , φ l'est également. Par ailleurs, puisque $X_2 \circ \varphi = X_1$, la composée de $dX_2(u_2, v_2)$ et de $d\varphi(u_1, v_1)$ est de rang 2, ce qui implique que $d\varphi(u_1, v_1)$ est de rang au moins 2, et donc inversible. \square

3.3 Vecteurs tangents, espace tangent

Définition 33. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et $X : U \rightarrow \Sigma$ une paramétrisation locale sur Σ . L'espace tangent à Σ en P , noté $T_P\Sigma$ est défini comme l'image de l'application linéaire $dX(u, v)$. Les éléments de $T_P\Sigma$ sont appelés *vecteurs tangents* à Σ en P .

Remarque 51. Il résulte immédiatement de la définition de $T_P\Sigma$ que celui-ci est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2, et que les dérivées partielles $\partial_u X(u, v)$ et $\partial_v X(u, v)$ en forment une base.

Remarque 52. La définition ci-dessus dépend a priori du système de coordonnées choisi, mais en fait il n'en est rien car si X_1 et X_2 sont deux paramétrisations, et $\varphi = X_2^{-1} \circ X_1$ est le changement de coordonnées correspondant, alors $X_1 = X_2 \circ \varphi$ et donc $dX_1(u, v)(\mathbb{R}^2) = dX_2(u', v')(E)$, où $(u', v') = \varphi(u, v)$ et $E = d\varphi(u, v)(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ puisque $d\varphi(u, v)$ est inversible. Donc $dX_1(u, v)$ et $dX_2(u', v')$ ont même image.

Dans le cas où la surface est définie *implicitement* (c'est-à-dire par une équation), on a une autre caractérisation de l'espace tangent.

Proposition 28. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et $P \in \Sigma$. Si f est une fonction différentiable sur un voisinage V de P , telle que $\Sigma \cap V = \{Q \in V \mid f(Q) = 0\}$, et si $df(P) \neq 0$, alors

$$T_P\Sigma = \langle \nabla f(P) \rangle^\perp.$$

Remarque 53. - On rappelle que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E , on désigne par F^\perp l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à *tous* les vecteurs de F . On a la relation $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$. Dans le cas où $F = \langle x \rangle$ est la droite vectorielle engendrée par x , on a donc $\dim F^\perp = \dim E - 1$.
- Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n , le *gradient* de f en un point P est le vecteur

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right),$$

lorsque les dérivées partielles existent. Si f est différentiable en P , alors on a la relation

$$\ker df(P) = \langle \nabla f(P) \rangle^\perp. \quad (3.6)$$

En effet, si $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$df(P)(u) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = u \cdot \nabla f(P).$$

- Quand on dira que Σ est la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, on supposera toujours implicitement que la différentielle de f ne s'annule pas sur Σ .

Preuve. Notons que $\langle \nabla f(P) \rangle^\perp$ est de dimension 2 tout comme $T_P \Sigma$, il suffit donc de montrer une inclusion pour que les deux sous-espaces soient égaux. Montrons que $T_P \Sigma \subset \langle \nabla f(P) \rangle^\perp$ c'est-à-dire, en vertu de (3.6) que $T_P \Sigma \subset \ker df(P)$.

Pour cela soit X une paramétrisation locale de Σ et (u, v) les coordonnées de P dans ce système. Posons $\tilde{f} = f \circ X$. Alors f étant nulle sur Σ au voisinage de P , la fonction \tilde{f} est nulle au voisinage de (u, v) , et donc ses dérivées partielles aussi. Or

$$\partial_u \tilde{f}(u, v) = df(P)(\partial_u X(u, v)), \quad \partial_v \tilde{f}(u, v) = df(P)(\partial_v X(u, v)).$$

Par conséquent, $\partial_u X(u, v)$ et $\partial_v X(u, v)$ appartiennent au noyau de $df(P)$ et comme ils engendrent $T_P \Sigma$, on a bien $T_P \Sigma \subset \ker df(P)$. \square

Pour résumer, on peut décrire une surface de deux façons :

1. par une paramétrisation $(u, v) \rightarrow X(u, v)$,
2. de façon *implicite*, c'est-à-dire par une équation $f(x, y, z) = 0$.

Si on se trouve dans le premier cas, la définition 33 et la remarque qui suit décrivent $T_P \Sigma$ comme sous-espace vectoriel engendré par $\partial_u X(u, v)$ et $\partial_v X(u, v)$. Dans le second cas, $T_P \Sigma$ est décrit comme orthogonal du gradient de f ou, ce qui est équivalent, comme noyau de $df(P)$. Voyons comment ceci permet, par exemple, de déterminer en pratique l'équation de l'espace tangent.

Exemple 12. Soit $(u, v) \rightarrow X(u, v)$ une paramétrisation de la surface Σ . Un vecteur (x, y, z) appartient à l'espace tangent $T_P \Sigma$ si et seulement si il est combinaison linéaire de $\partial_u X(u, v)$ et $\partial_v X(u, v)$, où u et v sont les coordonnées de P . Les dérivées partielles de X étant linéairement indépendantes, cette condition s'écrit

$$\det \begin{pmatrix} x & & \\ y & \partial_u X & \partial_v X \\ z & & \end{pmatrix} = 0, \quad (3.7)$$

où l'écriture ci-dessus signifie que le vecteur $\partial_u X(u, v)$ occupe la seconde colonne et le vecteur $\partial_v X(u, v)$ occupe la troisième.

Faisons le calcul pour $X(u, v) = (u, v, uv)$, c'est-à-dire le graphe de la fonction de deux variables $f(u, v) = uv$, et $P = X(1, 1) = (1, 1, 1)$. Dans ce cas $\partial_u X(1, 1) = (1, 0, 1)$ et $\partial_v X(1, 1) = (0, 1, 1)$, donc l'équation de $T_P \Sigma$ est

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-x - y + z = 0.$$

Exemple 13. Si Σ est la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ et $P = (x_0, y_0, z_0)$ alors, en notant $X = (x, y, z)$,

$$X \in T_P \Sigma \iff X \cdot \nabla f(P) = 0 \iff x \frac{\partial f}{\partial x}(P) + y \frac{\partial f}{\partial y}(P) + z \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0.$$

Dans le cas où Σ est la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (vérifier qu'il s'agit d'une surface de \mathbb{R}^3), et $P = (1, 1, 1)$, on a $\nabla f(P) = (2, 2, -2)$, où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, l'équation de $T_P\Sigma$ est donc $2x + 2y - 2z = 0$, ou de façon équivalente

$$x + y - z = 0.$$

Remarque 54. L'espace tangent $T_P\Sigma$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . On désigne souvent par *plan tangent* à Σ en P le sous-espace affine de \mathbb{R}^3 dirigé par $T_P\Sigma$ et passant par P . Si l'équation de $T_P\Sigma$ est $ax + by + cz = 0$, alors celui-ci a pour équation

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0,$$

où $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Pour finir ce paragraphe, notons qu'un vecteur est dit *normal* à Σ en P , s'il est orthogonal à $T_P\Sigma$. L'ensemble des vecteurs normaux constitue un sous-espace vectoriel de dimension 1, puisque $T_P\Sigma$ est de dimension 2. Il y a donc en tout point de Σ exactement 2 vecteurs normaux unitaires, c'est-à-dire de norme 1. Nous y reviendrons.

Exemple 14. Soit $(u, v) \rightarrow X(u, v)$ une paramétrisation de Σ . Le vecteur $\partial_u X \wedge \partial_v X$ (où \wedge désigne le produit vectoriel) est normal à Σ puisque qu'il est orthogonal à $\partial_u X$ et $\partial_v X$, qui engendrent $T_P\Sigma$. Dans ce cas les deux vecteurs normaux unitaires à Σ en $P = X(u, v)$ sont

$$N(P) := \frac{\partial_u X(u, v) \wedge \partial_v X(u, v)}{\|\partial_u X(u, v) \wedge \partial_v X(u, v)\|} \quad \text{et} \quad -N(P). \quad (3.8)$$

Si Σ est la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ et $P \in \Sigma$, alors le vecteur $\nabla f(P)$ est normal, puisque $T_P\Sigma = \langle \nabla f(P) \rangle^\perp$. Les deux vecteurs normaux unitaires sont

$$N(P) := \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} \quad \text{et} \quad -N(P). \quad (3.9)$$

3.4 Fonctions différentiables.

On a vu en cours de calcul différentiel ce qu'est la différentiabilité d'une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n . On souhaite étendre cette notion aux fonctions définies sur une surface Σ (qui n'est certainement pas un ouvert de \mathbb{R}^3 , et même est d'intérieur vide). Pour cela deux approches sont possibles : l'une consiste à travailler avec une paramétrisation. Si $X : U \rightarrow \Sigma$ est une paramétrisation, définir $f(P)$, où $P \in \Sigma$ équivaut à définir $\tilde{f}(u, v)$, où u et v sont les coordonnées de P (on a posé $\tilde{f} = f \circ X$). Comme \tilde{f} est définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , on peut parler de différentiabilité de \tilde{f} , et on verra qu'on peut définir naturellement par ce biais la différentielle de f .

La seconde approche consiste à dire qu'une fonction différentiable sur Σ est la restriction d'une fonction différentiable définie sur un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant Σ . Les deux approches sont équivalentes, mais nous ne le démontrerons pas tout à fait.

Définition 34. Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $P \in \Sigma$. Soit X une paramétrisation locale sur Σ et (u, v) les coordonnées de P . On dit que f est différentiable en P si $\tilde{f} = f \circ X$ est différentiable en (u, v) . De plus on définit $df(P) : T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme l'unique application linéaire telle que

$$d\tilde{f}(u, v) = df(P) \circ dX(u, v). \quad (3.10)$$

Cette définition nécessite de démontrer deux choses : d'abord qu'il existe bien une unique application linéaire $df(P) : T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant (3.10). Ensuite que la différentiabilité et la différentielle ainsi définies ne dépendent pas du système de coordonnées choisi.

Preuve. Montrons d'abord l'existence et l'unicité d'une application linéaire $L : T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $d\tilde{f}(u, v) = L \circ dX(u, v)$. Cela résulte immédiatement du fait que $dX(u, v)$ est une application linéaire inversible de \mathbb{R}^2 dans $T_P\Sigma$ (pourquoi?). Par conséquent

$$(L : T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } d\tilde{f}(u, v) = L \circ dX(u, v)) \iff L = d\tilde{f}(u, v) \circ (dX(u, v))^{-1},$$

ce qui démontre à la fois l'existence et l'unicité.

Pour montrer l'indépendance par rapport à la paramétrisation, on considère X_1 et X_2 telles que $P = X_1(u_1, v_1) = X_2(u_2, v_2)$, et on note $\varphi = (X_2)^{-1} \circ X_1$ le changement de coordonnées. Soit L l'application linéaire vérifiant $d\tilde{f}_1(u_1, v_1) = L \circ dX_1(u_1, v_1)$, où $\tilde{f}_1 = f \circ X_1$. Puisque $X_1 = X_2 \circ \varphi$, on a

$$d\tilde{f}_1(u_1, v_1) = d\tilde{f}_2(u_2, v_2) \circ d\varphi(u_1, v_1), \quad dX_1(u_1, v_1) = dX_2(u_2, v_2) \circ d\varphi(u_1, v_1),$$

où $\tilde{f}_2 = f \circ X_2$. On en déduit que

$$d\tilde{f}_2(u_2, v_2) \circ d\varphi(u_1, v_1) = L \circ dX_2(u_2, v_2) \circ d\varphi(u_1, v_1)$$

ce qui implique, puisque $d\varphi(u_1, v_1)$ est inversible, que

$$d\tilde{f}_2(u_2, v_2) = L \circ dX_2(u_2, v_2).$$

Autrement dit, si $df(P)$ vérifie (3.10) pour une paramétrisation, alors elle vérifie l'égalité pour *toutes* les paramétrisations. \square

Remarque 55. L'identité (3.10) peut se traduire de la façon suivante : l'image par $df(P)$ du vecteur tangent $\partial_u X$ est le vecteur $\partial_u \tilde{f}$, et l'image de $\partial_v X$ est $\partial_v \tilde{f}$.

Définition 35. Soit X une paramétrisation de Σ . Les fonctions coordonnées $P \rightarrow u(P)$ et $P \rightarrow v(P)$ sont différentiables, ainsi que X^{-1} , au sens de la définition ci-dessus.

La différentiabilité de X^{-1} est triviale, puisque par définition elle équivaut à la différentiabilité de $X^{-1} \circ X = \text{Id}$. Elle implique celle des fonctions coordonnées qui sont ses composantes.

Exemple 15. Soit Σ l'hélicoïde paramétrée par $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. Soit $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application qui à P associe le vecteur normal unitaire $N(P)$ défini par (3.8) et soit $P = X(u, v)$. On a

$$\partial_u X = (\cos v, \sin v, 0), \quad \partial_v X = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

et donc

$$N(P) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v, -\cos v, u).$$

Le membre de droite ci-dessus, c'est $N \circ X(u, v)$, on a donc par exemple

$$dN(P)(\partial_v X(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\cos v, \sin v, 0),$$

où le membre de droite est obtenu en dérivant N par rapport à v . On pourrait de même calculer $dN(P)(\partial_u X(u, v))$ en dérivant par rapport à u .

La proposition suivante est utile lorsque la fonction f à différentier est donnée comme restriction à Σ d'une fonction de trois variables.

Proposition 29. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application définie sur un ouvert V de \mathbb{R}^3 contenant Σ . Si f est différentiable (au sens du cours de calcul différentiel), alors la restriction f_Σ de f à la surface Σ est différentiable (au sens de la Définition 34) et on a pour tout $P \in \Sigma$

$$df_\Sigma(P) = df(P)|_{T_P \Sigma}.$$

Autrement dit la différentielle de la restriction à Σ de f est la restriction de la différentielle de f à $T_P \Sigma$.

Preuve. Soit X une paramétrisation sur Σ et $\tilde{f} = f_\Sigma \circ X = f \circ X$ (pourquoi y a-t-il égalité ?) Alors, si $P = X(u, v)$,

$$df_\Sigma(P)(\partial_u X(u, v)) = \partial_u \tilde{f}(u, v) = df(P)(\partial_u X(u, v)),$$

où la première égalité traduit la définition de $df_\Sigma(P)$ et la seconde égalité est la formule de composition des différentielles (voir [4]). On trouve de même $df_\Sigma(P)(\partial_v X(u, v)) = df(P)(\partial_v X(u, v))$, et donc $df_\Sigma(P) = df(P)$ sur $T_P \Sigma$. \square

Exemple 16. Soit S^2 la sphère d'équation $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Soit $N : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application qui à P associe le vecteur normal unitaire $N(P)$ défini par (3.9). On a $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ et donc

$$N(x, y, z) = (x, y, z).$$

L'application N est donc la restriction à S^2 de l'application identité de \mathbb{R}^3 . Or pour tout $P \in \mathbb{R}^3$ on a $d\text{Id}_{\mathbb{R}^3}(P) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ (différentielle d'une application linéaire, voir [4]) donc pour tout $P \in S^2$ $dN(P)$ est la restriction à $T_P S^2$ de l'application identité : $dN(P)(\vec{u}) = \vec{u}$, pour tout $\vec{u} \in T_P \Sigma$.

Exercice 36. Calculez la différentielle de N comme ci-dessus lorsque $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$.

Pour finir, citons un résultat utile concernant les applications à valeurs dans une surface.

Proposition 30. Soit f une application différentiable à valeurs dans une surface Σ . Alors $\text{Im}df(x) \subset T_{f(x)}\Sigma$.

Remarque 56. Cette proposition s'applique aussi bien à une application définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n qu'à une application définie sur une surface.

Preuve. Soit X une paramétrisation locale au voisinage de P et \tilde{f} l'application qui à x associe les coordonnées de $f(x)$. Alors $f = X \circ \tilde{f}$ et donc $df(x) = dX(u, v) \circ d\tilde{f}(x)$, où $(u, v) = \tilde{f}(x)$ (et donc $X(u, v) = f(x)$). Ceci implique $\text{Im}df(x) \subset \text{Im}dX(u, v) = T_{f(x)}\Sigma$. \square

3.5 Intégrale d'une fonction.

Nous nous bornerons au cas d'une surface paramétrée.

Définition 36. Soit $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et K un compact inclus dans U . On pose $\Sigma = X(K)$. Alors pour toute fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on définit l'intégrale de f sur Σ par

$$\int_{\Sigma} f = \iint_K f(X(u, v)) \|\partial_u X(u, v) \wedge \partial_v X(u, v)\| du dv,$$

où l'intégrale de droite est l'intégrale double d'une fonction de deux variables.

Remarque 57. 1. La définition ci-dessus est à mettre en rapport avec la définition de l'intégrale d'une fonction sur une courbe (définition 2.1). Ici le terme $\|\gamma'\|$ a été remplacé par $\|\partial_u X \wedge \partial_v X\|$.

2. Nous ne justifierons pas cette définition très longuement. Notons cependant que 1) Si $X(u, v) = (u, v)$ sont les coordonnées cartésiennes sur \mathbb{R}^2 , la définition ci-dessus coïncide avec l'intégrale double sur un domaine de \mathbb{R}^2 vue en cours de fonctions de plusieurs variables. 2) si $X(u, v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$ paramétrise un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, et en prenant $K = [0, 1] \times [0, 1]$, on obtient

$$\int_{\Sigma} 1 = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|.$$

Le membre de droite est l'aire du parallélogramme construit sur \vec{a} et \vec{b} , or Σ est précisément ce parallélogramme.

3. La quantité $\|\partial_u X \wedge \partial_v X\|$ n'est autre que $|\det(dX(u, v))|$, c'est-à-dire la valeur absolue du déterminant de l'application linéaire $dX(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_P\Sigma$,

où $P = X(u, v)$ et où l'on a choisi au départ et à l'arrivée des bases orthonormées. Notons qu'un choix de bases est nécessaire pour définir ce déterminant car $dX(u, v)$ n'est pas un endomorphisme. Si l'on se restreint aux bases orthonormales, les matrices de changement de base correspondantes sont de déterminant ± 1 donc n'affecte pas la valeur de $|\det(dX(u, v))|$.

Afin de démontrer que $\|\partial_u X \wedge \partial_v X\| = |\det(dX(u, v))|$, on peut procéder comme suit. On munit \mathbb{R}^2 de la base canonique $\epsilon_1 = (1, 0)$ et $\epsilon_2 = (0, 1)$ et l'espace tangent $T_P \Sigma$ d'une base orthonormale (e_1, e_2) quelconque. On pose $e_3 = e_1 \wedge e_2$ de telle sorte que (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormale directe de \mathbb{R}^3 . Comme e_3 est normal à $T_P \Sigma$ et unitaire, on a $e_3 = \pm \partial_u X \wedge \partial_v X / \|\partial_u X \wedge \partial_v X\|$.

La matrice de $dX(u, v)$ par rapport aux bases (ϵ_1, ϵ_2) et (e_1, e_2) est

$$\begin{pmatrix} e_1 \cdot \partial_u X & e_1 \cdot \partial_v X \\ e_2 \cdot \partial_u X & e_2 \cdot \partial_v X \end{pmatrix}.$$

On constate que le déterminant de cette matrice est égal à $(\partial_u X \wedge \partial_v X) \cdot e_3$ donc à $\pm \|\partial_u X \wedge \partial_v X\|$ étant donné la valeur de e_3 .

Une dernière justification est que la définition 36 est indépendante du système de coordonnées choisi.

Proposition 31. La définition 36 est indépendante du système de coordonnées.

Preuve. Soient $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées C^1 et $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$ deux compacts tels que $X_1(K_1) = X_2(K_2) = \Sigma$. Soit $\varphi = (X_2)^{-1} \circ X_1$ le changement de coordonnées, qui est un difféomorphisme de U_1 sur U_2 . La formule de changement de variable dans les intégrales doubles nous donne, en notant que $X_1 = X_2 \circ \varphi$ et $K_2 = \varphi(K_1)$, et en notant $(u_2, v_2) = \varphi(u_1, v_1)$,

$$\begin{aligned} \iint_{K_2} f \circ X_2(u_2, v_2) |\det(dX_2(u_2, v_2))| du_2 dv_2 &= \\ \iint_{K_1} f \circ X_1(u_1, v_1) |\det(dX_2(\varphi(u_1, v_1)))| |\det d\varphi(u_1, v_1)| du_1 dv_1. \end{aligned}$$

Mais $dX_2(\varphi(u_1, v_1)) \circ d\varphi(u_1, v_1) = d(X_2 \circ \varphi)(u_1, v_1) = dX_1(u_1, v_1)$ et donc

$$|\det(dX_2(\varphi(u_1, v_1)))| |\det d\varphi(u_1, v_1)| = |\det(dX_1(u_1, v_1))|,$$

ce qui nous donne le résultat recherché, à savoir

$$\iint_{K_2} f \circ X_2 |\det(dX_2)| du_2 dv_2 = \iint_{K_1} f \circ X_1 |\det(dX_1)| du_1 dv_1.$$

□

Un cas particulier important est le cas où $f = 1$, qui donne l'aire de Σ .

Définition 37. L'aire de la surface paramétrée Σ est la quantité

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1.$$

Exercice 37. Calculer l'aire d'une demi-sphère $S_+^2 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$.

3.6 Stokes

La généralisation de la formule de Stokes aux surfaces est pratiquement gratuite, si l'on se borne au cas d'une surface paramétrée.

Définition 38. Soient $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée C^1 , K un compact inclus dans U et posons $\Sigma = X(K)$. Soit α une 2-forme continue définie sur un ouvert V contenant Σ . L'intégrale de α sur Σ est définie par

$$\int_{\Sigma} \alpha = \iint_K X^* \alpha. \quad (3.11)$$

Si de plus K est un bon compact (voir la définition 22), et que cette fois α est une 1-forme continue au voisinage de $\partial\Sigma = X(\partial K)$, on définit

$$\int_{\partial\Sigma} \alpha = \int_{\partial K} X^* \alpha. \quad (3.12)$$

Remarque 58. Les notations ci-dessus reflètent le fait que l'intégrale ne dépend pas que de Σ , mais de l'orientation induite par la paramétrisation X . Plus précisément, si X_1 et X_2 sont deux paramétrisations locales C^1 tels que $X_1(K_1) = X_2(K_2) = \Sigma$, et si le changement de coordonnées $\varphi = (X_2)^{-1} \circ X_1$ préserve l'orientation (voir Définition 25), alors

$$\int_{\partial K_1} X_1^* \alpha = \int_{\partial K_2} X_2^* \alpha.$$

En effet, le changement de coordonnées φ est un difféomorphisme en vertu de la Proposition 27. Par ailleurs $X_1 = \varphi \circ X_2$ implique que $(X_1)^* \alpha = \varphi^*((X_2)^* \alpha)$ et de plus $K_1 = \varphi(K_2)$ donc (2.14) appliqué à $(X_2)^* \alpha$ nous donne le résultat voulu dans le cas où φ préserve l'orientation. Notons (voir la remarque qui suit la Proposition 22) que dans le cas où φ renverse l'orientation, on a

$$\int_{\partial K_1} X_1^* \alpha = - \int_{\partial K_2} X_2^* \alpha.$$

Des formules semblables ont lieu pour l'intégrale de surface (3.11), on utilise pour les démontrer (2.14) au lieu de (2.10).

Remarque 59. Ici, le « bord de Σ » noté $\partial\Sigma$ n'a rien à voir avec la frontière de l'ensemble Σ relativement à la topologie de \mathbb{R}^3 , que l'on note parfois de la même façon. En effet pour cette topologie Σ est d'intérieur vide, et donc $\Sigma = \text{Fr}(\Sigma)$. Pour nous, $\partial\Sigma$ désigne l'image par la paramétrisation X du bord de K (qui est la frontière de K relativement à la topologie de \mathbb{R}^2). Il s'agit donc d'une réunion de traces de courbes paramétrées.

On obtient immédiatement

Théorème 5. Soient $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée C^1 , K un bon compact (au sens de la définition 22) inclus dans U et $\Sigma = X(K)$, $\partial\Sigma = X(\partial K)$. Soit α une 1-forme C^1 définie sur un ouvert V contenant Σ . On a

$$\int_{\Sigma} d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha. \quad (3.13)$$

Preuve. Par définition, l'égalité (3.13) équivaut à

$$\iint_K X^*(d\alpha) = \int_{\partial K} X^*\alpha.$$

Or on sait par la Proposition 21 que $X^*(d\alpha) = d(X^*\alpha)$, et donc l'égalité ci-dessus n'est autre que la formule de Stokes dans le plan (Théorème 3) appliquée à la forme $X^*\alpha$. \square

Remarque 60. Evidemment il n'y a pas de miracles, et la facilité de la démonstration ci-dessus signifie simplement qu'on a « caché » la difficulté de ce théorème profond dans les définitions (3.11), (3.12). Nous allons résoudre cette difficulté en donnant une formulation de (3.13) où interviennent des intégrales de *fonctions* et non de *formes différentielles*, ce qui était le cas dans la formulation flux-divergence de la formule de Stokes dans le plan. Ce sera aussi l'occasion de voir où intervient l'orientation induite par la paramétrisation X .

Soient donc $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée C^1 , K un bon compact (au sens de la définition 22) inclus dans U et $\Sigma = X(K)$, $\partial\Sigma = X(\partial K)$. On considère une 1-forme $\alpha = a dx + b dy + c dz$, où a, b, c sont des fonctions C^1 sur un voisinage de Σ . On posera $\vec{F} = (a, b, c)$.

L'orientation induite par X sur Σ interviendra par l'intermédiaire du vecteur normal $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$N(P) = \frac{\partial_u X \wedge \partial_v X}{\|\partial_u X \wedge \partial_v X\|},$$

où $P = X(u, v)$.

Pour $P \in \partial\Sigma$, on définit le vecteur tangent $T(P)$ unitaire ainsi : il est tangent à $\partial\Sigma$, et tel que le produit vectoriel $T(P) \wedge N(P)$ pointe vers l'*extérieur* de Σ . On a alors

Proposition 32. Avec les notations ci-dessus

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d\alpha &= \int_{\Sigma} \text{rot}(\vec{F}) \cdot N, \\ \int_{\partial\Sigma} \alpha &= \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot T, \end{aligned}$$

où les intégrales de droite désignent respectivement l'intégrale de la fonction $\text{rot}(\vec{F}) \cdot N$ sur la surface Σ (Définition 36) et l'intégrale de la fonction $\vec{F} \cdot T$ sur la courbe $\partial\Sigma$ (Formule 2.1).

Remarque 61. Les intégrales de droite sont des intégrales de fonctions, et donc ne dépendent pas de la paramétrisation de Σ et $\partial\Sigma$ choisies pour les calculer. Par contre, le vecteur N dépend de la paramétrisation choisie, et par conséquent le vecteur T également.

Preuve. On a

$$d\alpha = (\partial_x b - \partial_y a) dx \wedge dy + (\partial_y c - \partial_z b) dy \wedge dz + (\partial_z a - \partial_x c) dz \wedge dx,$$

ce que l'on peut écrire

$$d\alpha = \text{rot}(\vec{F})^3 dx \wedge dy + \text{rot}(\vec{F})^1 dy \wedge dz + \text{rot}(\vec{F})^2 dz \wedge dx,$$

où $\text{rot}(\vec{F})^i$ désigne la i -ème composante du vecteur $\text{rot}(\vec{F})$.

Par ailleurs, en notant $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, on a

$$X^*(dx \wedge dy) = (\partial_u x du + \partial_v x dv) \wedge (\partial_u y du + \partial_v y dv) = (\partial_u x \partial_v y - \partial_u y \partial_v x) du \wedge dv,$$

ce que l'on peut écrire

$$X^*(dx \wedge dy) = (\partial_u X \wedge \partial_v X)^3 du \wedge dv,$$

où $(\partial_u X \wedge \partial_v X)^3$ est la troisième composante du vecteur $\partial_u X \wedge \partial_v X$. On vérifie de même que

$$X^*(dy \wedge dz) = (\partial_u X \wedge \partial_v X)^1 du \wedge dv, \quad X^*(dz \wedge dx) = (\partial_u X \wedge \partial_v X)^2 du \wedge dv.$$

Il résulte de ce qui précède et de la définition de N que

$$X^*(d\alpha) = \text{rot}(\vec{F}) \cdot N \|\partial_u X \wedge \partial_v X\|,$$

et donc que

$$\int_{\vec{\Sigma}} d\alpha = \iint \text{rot}(\vec{F}) \cdot N \|\partial_u X \wedge \partial_v X\| du dv.$$

Le membre de droite est bien l'intégrale de la fonction $\text{rot}(\vec{F}) \cdot N$ sur la surface Σ .

Pour ce qui concerne la seconde intégrale, les choses sont plus simples à écrire. Nous supposons pour simplifier que ∂K n'a qu'une composante et nous noterons $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de ∂K d'orientation compatible. On a alors par définition

$$\int_{\vec{\partial\Sigma}} \alpha = \int_{\partial K} X^* \alpha = \int_a^b \gamma^*(X^* \alpha).$$

On peut alors écrire en notant $\Gamma = X \circ \gamma$, qui est une paramétrisation de $\partial\Sigma$,

$$\int_{\vec{\partial\Sigma}} \alpha = \int_{\Gamma} \alpha.$$

Cette dernière intégrale est égale à l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction

$$t \rightarrow \Gamma'(t) \cdot \vec{F}(\Gamma(t)) = T(t) \cdot \vec{F}(\Gamma(t))\|\Gamma'(t)\|,$$

où l'on a noté $T = \Gamma'/\|\Gamma'\|$ le vecteur tangent de Γ . Cette intégrale est donc l'intégrale de la fonction $T(t) \cdot \vec{F}(\Gamma(t))$ sur la trace de Γ , qui est $\partial\Sigma$.

Il resterait à vérifier que l'orientation de T est bien celle décrite dans l'énoncé de la proposition, mais il est préférable de s'en convaincre sur un dessin! \square

Chapitre 4

Géométrie des surfaces paramétrées

Ce chapitre est consacré essentiellement à explorer la notion de courbure d'une surface. Il sera très utile à partir de maintenant d'utiliser une notation abrégée pour les dérivées partielles :

Notation 3. Pour une application différentiable $(u, v) \rightarrow X(u, v)$, on notera X_u et X_v les dérivées partielles premières de X , X_{uu} , X_{uv} et X_{vv} les dérivées partielles secondes, etc... Si les variables ont des noms différents, la notation est adaptée en conséquence.

4.1 Première forme fondamentale

Définition 39. Soit Σ une surface et $P \in \Sigma$. On appelle *première forme fondamentale* de Σ en P l'application bilinéaire $\mathbf{I}_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbf{I}_P(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

autrement dit la restriction du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 à l'espace tangent de Σ en P .

Remarque 62. La forme bilinéaire \mathbf{I}_P étant la restriction d'un produit scalaire, c'est également un produit scalaire (le vérifier), c'est-à-dire qu'elle est symétrique et définie positive.

Comme souvent en géométrie, on a une notion définie abstraitement, et elle devient utile lorsqu'on l'exprime *en coordonnées* :

Définition 40. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 , X une paramétrisation locale sur Σ , et $P = X(u, v)$. Alors les vecteurs tangents $X_u(u, v)$ et $X_v(u, v)$ forment une base de $T_P\Sigma$, et la matrice de \mathbf{I}_P dans cette base est par définition

$$M = \begin{pmatrix} X_u \cdot X_u & X_u \cdot X_v \\ X_u \cdot X_v & X_v \cdot X_v \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = X_v \cdot X_v. \quad (4.1)$$

Ce sont des fonctions de u, v appelées *coefficients de la première forme fondamentale dans la paramétrisation X* .

Remarque 63. La matrice de \mathbf{I}_P dans la base (X_u, X_v) est $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. C'est bien entendu une matrice symétrique et définie positive (pourquoi?).

Exemple 17. Si $\Sigma = \mathbb{R}^2$ est le plan, on peut considérer les coordonnées canoniques $X_1(u, v) = (u, v)$ et les coordonnées polaires $X_2(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Les coefficients de la première forme fondamentale dans le système X_1 sont

$$E_1 = 1, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = 1,$$

c'est-à-dire que la matrice correspondante est l'identité. On remarque que les coefficients ne dépendent pas de (u, v) , ce qui est très particulier.

Dans la paramétrisation X_2 , on a (faire le calcul, cette fois les variables s'appellent r, θ au lieu de u, v)

$$E_2 = 1, \quad F_2 = 0, \quad G_2 = r^2,$$

et on remarque que G_2 n'est pas constant dans ce cas.

Exemple 18. Si Σ est un graphe, c'est-à-dire que $\Sigma = X(U)$ avec $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Alors on a

$$X_u = (1, 0, f_u), \quad X_v = (0, 1, f_v),$$

et donc les coefficients de \mathbf{I} sont

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2.$$

Exercice 38. On considère le cylindre $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, et la paramétrisation locale X définie sur $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ par

$$X(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z).$$

Vérifiez que X est bien une paramétrisation locale sur Σ . Calculez les coefficients de la première forme fondamentale dans cette paramétrisation. Remarquez vous quelque chose?

Les coefficients E, F, G servent dans le calcul de longueurs ou d'aires :

Proposition 33. Soient Σ une surface et $X : U \rightarrow \Sigma$ une paramétrisation locale. On note E, F, G les coefficients de la première forme fondamentale.

1. La longueur d'une courbe sur Σ définie par $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, où u et v sont des fonctions C^1 définies sur un intervalle $[a, b]$, est

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))v'(t)^2} dt. \quad (4.2)$$

2. L'aire de la portion de surface $X(K)$, où K est un compact inclus dans U est

$$A(X(K)) = \iint_K \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} du dv. \quad (4.3)$$

Démonstration. Pour (4.2), on note que $\gamma' = X_u u' + X_v v'$ (avec des notations abrégées), et donc

$$\|\gamma'\|^2 = (X_u \cdot X_u)u'^2 + (X_u \cdot X_v)u'v' + (X_v \cdot X_v)v'^2.$$

Ceci donne le résultat voulu, puisque la longueur de γ vaut $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Par définition, l'aire de $X(K)$ est l'intégrale sur K de $(u, v) \rightarrow \|X_u \wedge X_v\|$. Or

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - (X_u \cdot X_v)^2 = EG - F^2,$$

d'où l'on déduit (4.3). \square

Exemple 19. Considérons les coordonnées sphériques (3.3) sur la sphère S^2 . Dans ces coordonnées on a (vérifier!)

$$E = \sin^2 \varphi, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

et donc l'aire de S^2 est

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \varphi} d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin t dt = 4\pi.$$

4.2 Isométries

Définition 41. Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces et $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ une application C^1 . On dit que f est une *isométrie locale* si pour tout $P \in \Sigma_1$ la différentielle df_P est une isométrie entre les espaces tangents $T_P \Sigma_1$ et $T_P \Sigma_2$. On dit que f est une *isométrie globale* si de plus f est bijective.

On a une caractérisation plus parlante, bien que moins pratique mathématiquement, des isométries locales :

Proposition 34. Avec les notations de la définition précédente, f est une isométrie locale si et seulement si pour toute courbe $\gamma : I \rightarrow \Sigma_1$ de classe C^1 on a $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$.

Démonstration. Supposons d'abord que f est une isométrie locale. Alors $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ et puisque $df_{\gamma(t)}$ est une isométrie on en déduit que $\|(f \circ \gamma)'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$. En intégrant par rapport à t on trouve $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$.

Réciproquement, on suppose que $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$ est vérifié pour toute courbe γ sur Σ_1 de classe C^1 . Si, par exemple, γ est définie sur $[0, 1]$, alors l'égalité est vraie aussi pour la restriction de γ à un intervalle $[0, x]$, pour tout $x \in [0, 1]$. On a alors

$$\int_0^x \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^x \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt.$$

En dérivant par rapport à x en $x = 0$ on obtient alors

$$\|\gamma'(0)\| = \|(f \circ \gamma)'(0)\|. \quad (4.4)$$

Soient maintenant P un point de Σ_1 et $\vec{u} \in T_P\Sigma_1$. Montrons que $df_P(\vec{u})$ est de même norme que \vec{u} . Pour cela il suffit de remarquer qu'il existe une courbe γ sur Σ_1 telle que $\gamma(0) = P$ et $\gamma'(0) = \vec{u}$ (pourquoi ? Indication : on peut raisonner dans une paramétrisation locale). On a alors $(f \circ \gamma)'(0) = df_P(\vec{u})$ et (4.4) montre que $\|\vec{u}\| = \|df_P(\vec{u})\|$. \square

Remarque 64. Intuitivement, le fait que f soit une isométrie signifie que l'application f « déforme » la surface Σ_1 en Σ_2 sans étirement ni contraction. Un exemple typique est la déformation d'une feuille de papier (sans la plier). Il est assez clair qu'une courbe tracée sur la feuille ne change pas de longueur quand on déforme cette dernière. Or il est facile de fabriquer un cylindre ou un cône à partir d'une feuille de papier, on peut donc penser qu'il existe une isométrie locale du plan vers chacune de ces surfaces (essayer de le démontrer pour le cylindre, le cône est plus difficile).

On a également le résultat suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Proposition 35. Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces, soit $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ une isométrie locale injective et soit X_1 une paramétrisation locale de Σ_1 . Alors $X_2 = f \circ X_1$ est une paramétrisation locale de Σ_2 et, avec les notations évidentes, on a l'égalité des coefficients de la première forme fondamentale :

$$E_1 = E_2, \quad F_1 = F_2, \quad G_1 = G_2.$$

4.3 Courbure des courbes, seconde forme fondamentale

A partir de maintenant, toutes les surfaces et courbes sont supposées aussi régulières que nécessaire (C^2 pour les surfaces).

Quand on se promène sur une courbe plane, le vecteur accélération a deux composantes (voir (1.11)). La composante tangentielle est la dérivée de la vitesse,

4.3. COURBURE DES COURBES, SECONDE FORME FONDAMENTALE 79

et la composante normale est égale à la courbure multipliée par le carré de la vitesse. Autrement dit, même si on parcourt la courbe à vitesse constante, on subit une accélération qui est due au fait qu'on suit une trajectoire courbée.

La même chose se produit sur une surface. Il est plus simple de faire le calcul dans une paramétrisation. Soient donc Σ une surface, X une paramétrisation locale sur Σ et $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ une courbe. On note $(u(t), v(t))$ les coordonnées de $\gamma(t)$, autrement dit $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$. En supposant que X , u et v sont C^2 , on a (faites le calcul)

$$\gamma'' = X_{uu}u'^2 + 2X_{uv}u'v' + X_{vv}v'^2 + X_u u'' + X_v v'',$$

où l'on a adopté une notation abrégée (la notation complète serait $\gamma''(t) = X_{uu}(u(t), v(t))u'(t)^2 + \dots$). On remarque que X_u et X_v sont des vecteurs tangents à Σ , et on retrouve le fait que la composante *normale* de γ'' ne dépend que de u' et v' , c'est-à-dire des coordonnées de γ' dans la base (X_u, X_v) , et de quantités liées à Σ et non à la courbe : si N est un vecteur normal à Σ , on a

$$\gamma'' \cdot N = (X_{uu} \cdot N)u'^2 + 2(X_{uv} \cdot N)u'v' + (X_{vv} \cdot N)v'^2. \quad (4.5)$$

Définition 42. Soient Σ une surface et $P \in \Sigma$. On suppose que $P = X(u, v)$, où X est une paramétrisation locale sur Σ , et que N est un vecteur normal unitaire à Σ en P .

La *seconde forme fondamentale* de Σ en P est la forme bilinéaire symétrique sur $T_P\Sigma$, notée \mathbf{II}_P , telle que pour tout $\vec{u} \in T_P\Sigma$ de coordonnées (x, y) dans la base (X_u, X_v) on ait

$$\mathbf{II}_P(\vec{u}, \vec{u}) = (X_{uu} \cdot N)x^2 + 2(X_{uv} \cdot N)xy + (X_{vv} \cdot N)y^2. \quad (4.6)$$

On pose

$$e = X_{uu} \cdot N, \quad f = X_{uv} \cdot N, \quad g = X_{vv} \cdot N, \quad (4.7)$$

et on appelle e , f et g les *coefficients* de la seconde forme fondamentale dans la paramétrisation X . Ce sont des fonctions de u et v . Notons que la matrice de \mathbf{II}_P dans la base (X_u, X_v) est précisément $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$.

Remarque 65. On a vu en cours d'algèbre ([3], remarque après la définition 2.1.8) que si b est une forme bilinéaire symétrique, on a la formule dite de polarisation $4b(u, v) = b(u + v, u + v) - b(u - v, u - v)$, par conséquent (4.6) suffit à définir la forme bilinéaire \mathbf{II}_P .

Exercice 39. Déterminez $\mathbf{II}_P(\vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} = x_1X_u + y_1X_v$ et $\vec{v} = x_2X_u + y_2X_v$.

Remarque 66. 1. L'expression (4.6) dépend du choix du vecteur normal unitaire N . Il y a en tout point P exactement 2 choix possibles : N et $-N$, et choisir $-N$ changerait le signe de la seconde forme fondamentale. Par exemple « \mathbf{II}_P est définie positive » est une affirmation liée au choix de N , et non une propriété de Σ .

2. On a défini \mathbf{II}_P en utilisant une paramétrisation. Il faudrait donc vérifier que le membre de droite de (4.6) ne dépend pas du système de coordonnées utilisé. Au lieu de cela, nous donnerons une autre définition de \mathbf{II}_P qui n'utilise pas les coordonnées.
3. On peut maintenant réécrire (4.5) :

$$\gamma'' \cdot N = \mathbf{II}_P(\gamma', \gamma'). \quad (4.8)$$

Exemple 20. 1. Si Σ est un plan paramétré par $X(u, v) = P_0 + uX_1 + vX_2$, alors les dérivées secondes de X sont nulles et donc la seconde forme fondamentale de Σ est nulle en tout point. Ceci traduit le fait que Σ n'est pas courbée.

2. Pour un graphe $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ avec $f_u(u_0, v_0) = f_v(u_0, v_0) = 0$, alors les coefficients de \mathbf{II}_P — où $P = X(u_0, v_0)$ — sont (faire le calcul)

$$e = f_{uu}(u_0, v_0), \quad f = f_{uv}(u_0, v_0), \quad g = f_{vv}(u_0, v_0).$$

Autrement dit, si (u_0, v_0) est un point critique de f , alors la matrice de \mathbf{II}_P est la matrice hessienne de f .

Exercice 40. Montrez que si $\Sigma = S^2$, alors $\mathbf{II}_P = \pm \mathbf{I}_P$ selon le choix de N .

Revenons à présent à la courbure de Σ . Considérons une courbe $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ sur la surface. La courbure de γ est due à deux facteurs : d'une part à la liberté que l'on a lorsqu'on trace une courbe sur une surface de la faire se tortiller dans tous les sens, c'est la partie de la courbure *due à la courbe elle même*. Mais il y a un autre facteur, qui est que sur la plupart des surfaces, il est impossible d'aller tout droit, même si on le voulait, c'est la partie de la courbure *due à la contrainte d'être sur la surface*. Et mathématiquement, ces deux facteurs se distinguent facilement.

En effet, si γ est paramétrée par l'abscisse curviligne, la courbure est $\kappa = \|\gamma''\|$, et le vecteur γ'' se décompose en une partie tangente à Σ et une partie normale à Σ . Cette dernière, comme on l'a vu, ne dépend en fait que de γ' : c'est la partie due à la surface, et on la calcule à l'aide de la seconde forme fondamentale.

Définition 43. Soit $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ une courbe C^2 . Soit N un vecteur unitaire normal à Σ en $P = \gamma(t_0)$. On notera \vec{t} et \vec{n} le vecteur tangent et le vecteur normal de γ en P , pour distinguer du vecteur normal à la surface, et κ la courbure de γ en P . On appelle *courbure normale* de γ en P la quantité

$$\kappa_n(t_0) = \kappa (\vec{n} \cdot N). \quad (4.9)$$

On appelle *courbure géodésique* de γ en P la quantité

$$\kappa_g(t_0) = \kappa (\vec{n} \cdot (N \wedge \vec{t})). \quad (4.10)$$

Remarque 67. Tant le signe de la courbure normale que celui de la courbure géodésique dépendent du choix du vecteur normal unitaire N choisi. Prendre

4.3. COURBURE DES COURBES, SECONDE FORME FONDAMENTALE 81

– N au lieu de N change le signe de ces courbures. Par contre la définition ci-dessus est invariante par changement de paramétrisation, si celui-ci préserve l'orientation.

Remarque 68. On peut choisir de paramétrer γ par l'abscisse curviligne. Posons $e_1 = N$ et $e_2 = \vec{t}$. Ces vecteurs étant orthogonaux et unitaires, la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 . Puisque \vec{n} et \vec{t} sont orthogonaux, la composante de \vec{n} selon e_2 est nulle. Les coordonnées de $\gamma''(t_0) = \kappa \vec{n}$ dans \mathcal{B} sont donc $(\kappa_n, 0, \kappa_g)$.

Ajoutons que e_1 est normal à $T_P \Sigma$ et que $e_1 \wedge e_2 \in T_P \Sigma$. Donc $|\kappa_n|$ est la norme de la composante *normale* de $\gamma''(t_0)$, alors que $|\kappa_g|$ est la norme de la composante de $\gamma''(t_0)$ *tangente* à la surface. En particulier

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2. \quad (4.11)$$

On déduit aisément de ce qui précède

Proposition 36. Soient γ une courbe sur Σ , P un point de γ , et N un vecteur normal à Σ en P . On note $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ le repère de Frénet de γ en P et θ l'angle entre \vec{n} et N . Alors

$$\kappa_n = \kappa \cos \theta = \mathbf{II}_P(\vec{t}, \vec{t}),$$

où κ_n et κ sont la courbure normale et la courbure de γ en P .

Démonstration. La première égalité résulte directement de (4.9). Pour la seconde, on choisit de paramétrer γ par l'abscisse curviligne. Alors $\gamma'' = \kappa \vec{n}$ et $\gamma' = \vec{t}$. Donc (4.8) devient

$$\kappa_n = \gamma'' \cdot N = \mathbf{II}_P(\vec{t}, \vec{t}).$$

□

Remarque 69. Il résulte de ce qui précède que toute les courbes sur Σ ayant un vecteur tangent donné ont la même courbure normale : celle-ci est en quelque sorte inévitable, et au vu de (4.11), on peut dire que les courbes sur Σ qui sont « le moins courbées » sont celles dont la courbure géodésique est nulle. Ces courbes s'appellent *géodésiques*, et il n'est pas surprenant que le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre sur Σ soit toujours une géodésique, mais nous ne le montrerons pas.

On termine par un cas particulier intéressant :

Définition 44. Une courbe $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ est une section normale de Σ en $P = \gamma(t_0)$ si la trace de γ est contenue dans l'intersection de Σ et d'un plan affine contenant la normale à Σ passant par P .

Remarque 70. Le plan affine en question est en fait le plan passant par P et dirigé par $\text{Vect}(N, \gamma'(t_0))$, où N est un vecteur normal à Σ en P . En effet si E est le plan vectoriel directeur, alors E contient N par hypothèse et $\gamma'(t_0)$ aussi puisque la trace de γ est incluse dans le plan affine. Or $\dim E = 2$, d'où le résultat.

Proposition 37. La courbure géodésique d'une section normale à Σ en P est nulle au point P . En particulier sa courbure en P est $|\mathbf{II}(\vec{t}, \vec{t})|$, où \vec{t} est le vecteur tangent unitaire en P .

Preuve. Supposons γ paramétrée par l'abscisse curviligne. La trace de γ est incluse dans le plan affine passant par P et dirigé par $E = \text{Vect}(N, \vec{t})$, où N est un vecteur normal à Σ en P . Par conséquent $\gamma''(t_0) = \kappa \vec{n} \in E$ et comme ce vecteur est orthogonal à \vec{t} on obtient que \vec{n} est colinéaire à N , ce qui donne le résultat souhaité. \square

Pour pousser plus loin l'étude de \mathbf{II}_P , nous allons en donner une autre caractérisation.

4.4 Application de Gauss

On rappelle que toutes les surfaces seront supposées être de classe C^2 .

Définition 45. Soit Σ une surface. Si $N : \Sigma \rightarrow S^2$ associe à tout point de Σ un vecteur normal unitaire et si N est C^1 , on dit que N est l'*application de Gauss* de Σ .

Remarque 71. 1. L'application de Gauss de Σ n'existe pas toujours, son existence ou non est une propriété globale de Σ dont nous ne traiterons pas. Ce qui est clair, c'est que l'application de Gauss existe toujours pour une surface paramétrée $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, il suffit de définir N par (3.8), c'est-à-dire poser

$$N(P) = \frac{\partial_u X(u, v) \wedge \partial_v X(u, v)}{\|\partial_u X(u, v) \wedge \partial_v X(u, v)\|},$$

où (u, v) sont les coordonnées de P .

En particulier, sur une surface générale, on peut toujours utiliser une paramétrisation locale au voisinage d'un point P et l'application de Gauss sera définie au voisinage de ce point. En résumé, même si l'application de Gauss n'est pas définie *globalement*, elle est définie *localement*.

2. Par ailleurs, si Σ est définie implicitement, c.à.d. comme dans la Proposition 26, il existe également une application de Gauss que l'on définit par (3.9).
3. Si l'application existe, elle n'est pas unique. En effet on peut toujours choisir le vecteur normal unitaire $-N$ au lieu de N .

Exemple 21. Si $\Sigma = S^2$, alors on a vu dans l'exemple 16 que l'application de Gauss est définie par $N(P) = P$.

Exercice 41. Déterminez l'application de Gauss du *cylindre* $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. (il faut utiliser (3.9).) Faites de même pour l'*hélicoïde* (3.1) (il faut utiliser (3.8).)

Proposition 38. Soit N l'application de Gauss d'une surface Σ , alors sa différentielle dN_P au point P est un endomorphisme de $T_P \Sigma$.

Démonstration. Puisque $N : \Sigma \rightarrow S^2$, on a $dN_P : T_P\Sigma \rightarrow T_{N(P)}S^2$ (voir Proposition 30). Il suffit donc de montrer que $T_P\Sigma = T_{N(P)}S^2$. Mais on a vu que $T_{N(P)}S^2 = \langle N(P) \rangle^\perp$, et puisque $N(P)$ est un vecteur normal à Σ en P , on a $\langle N(P) \rangle^\perp = T_P\Sigma$. \square

On a la relation suivante entre la différentielle de l'application de Gauss et la seconde forme fondamentale :

Proposition 39. Pour tout $P \in \Sigma$ et tous $\vec{u}, \vec{v} \in T_P\Sigma$ on a

$$\mathbf{II}_P(\vec{u}, \vec{v}) = -dN_P(\vec{u}) \cdot \vec{v}. \quad (4.12)$$

Remarque 72. Rappelons que \mathbf{II}_P dépend d'un choix de vecteur normal en P . L'égalité ci-dessus est vraie seulement si ce choix est le même que celui de l'application de Gauss, c.à.d. si le « N » de \mathbf{II}_P est égal à $N(P)$.

Notons que (4.12) a deux conséquences capitales : d'une part que la définition de \mathbf{II}_P est indépendante du système de coordonnées choisi, et d'autre part que dN_P est un endomorphisme *symétrique* de $T_P\Sigma$, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

Preuve. On peut travailler avec une paramétrisation locale X . Alors d'après (4.6) la matrice de \mathbf{II}_P dans la base (X_u, X_v) est

$$\begin{pmatrix} X_{uu} \cdot N & X_{uv} \cdot N \\ X_{uv} \cdot N & X_{vv} \cdot N \end{pmatrix}.$$

Notons $b(\vec{u}, \vec{v})$ le membre de droite de (4.12). La matrice de b dans la base (X_u, X_v) est

$$\begin{pmatrix} -dN_P(X_u) \cdot X_u & -dN_P(X_u) \cdot X_v \\ -dN_P(X_v) \cdot X_u & -dN_P(X_v) \cdot X_v \end{pmatrix}.$$

Montrons que ces deux matrices sont égales. Nous ferons le calcul uniquement pour le premier coefficient.

On a $dN_P(X_u) = \tilde{N}_u$, où $\tilde{N}(u, v) = N(X(u, v))$. Par ailleurs, étant donné que $N \perp X_u$, on peut écrire

$$0 = (\tilde{N} \cdot X_u)_u = \tilde{N}_u \cdot X_u + \tilde{N} \cdot X_{uu}.$$

Donc, si $P = X(u, v)$ on obtient $-dN_P(X_u) \cdot X_u = N(P) \cdot X_{uu}$, ce qui est l'égalité recherchée. La méthode est similaire pour les autres coefficients. \square

Comme on l'a remarqué, cette proposition montre que dN_P est un endomorphisme symétrique, que l'on peut donc diagonaliser dans une base orthonormée de $T_P\Sigma$, on obtient :

Proposition 40. (et définition) Pour tout $P \in \Sigma$ on note κ_1 et κ_2 les valeurs propres de dN_P , en les ordonnant de façon à ce que $\kappa_1 \leq \kappa_2$, et on les appelle *courbures principales* de Σ en P . Les vecteurs propres associés à chacune d'entre

elles sont les *directions principales* associées. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$, les directions principales associées à l'une et l'autre courbure principale sont orthogonales.

Enfin, on appelle *courbure de Gauss* la quantité

$$K(P) = \det(dN_P) = \kappa_1 \kappa_2, \quad (4.13)$$

et *courbure moyenne* la quantité

$$H(P) = \frac{1}{2} \text{Trace}(dN_P) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \quad (4.14)$$

Remarque 73. Le choix de l'application de Gauss détermine le signe des courbures principales : prendre $-N$ au lieu de N change ce signe. Toutefois le signe change pour les *deux* courbures principales, donc K ne dépend pas du choix de l'application de Gauss. Ce n'est pas le cas de H .

Remarque 74. En termes de courbure (normale) des sections normales, κ_1 représente la courbure de la section normale ayant la plus petite courbure, et κ_2 la courbure de la section normale ayant la plus grande courbure. Notons qu'on parle ici de la courbure normale, qui a un signe : si la courbe est courbée vers N , celle-ci est négative, et positive dans le cas contraire.

4.5 Calculs

On va maintenant calculer les différentes quantités évoquées dans le paragraphe précédent.

Le plan

On a déjà noté (voir Exemple 1) que la seconde forme fondamentale du plan est nulle, et ceci implique par (4.12) que la différentielle de l'application de Gauss est nulle aussi. Ceci est d'ailleurs évident puisque la normale à un plan est constante. Les courbures principales du plan sont donc nulles.

La sphère

On a vu (voir Exemple 16) que $N(P) = P$ est l'application de Gauss de S^2 , c'est donc la restriction à S^2 de l'application identité de \mathbb{R}^3 et on a vu que sa différentielle est alors la restriction à $T_P S^2$ de l'identité. Son unique valeur propre est donc 1 et on a $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. La courbure de Gauss et la courbure moyenne sont aussi égales à 1, et en particulier sont constantes.

Le cylindre

On considère $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. On peut donc prendre comme application de Gauss $N = \nabla f / |\nabla f|$, où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, ce qui donne

$$N(x, y, z) = (x, y, 0)$$

sur Σ . L'application de Gauss est donc la restriction à Σ de la projection orthogonale sur le plan $z = 0$, notons la π . La différentielle de π est constante, égale à π puisqu'il s'agit d'une application linéaire. Par conséquent dN_P est la restriction de π à $T_P\Sigma$. Clairement, le vecteur vertical $(0, 0, 1)$ qui est vecteur propre de π pour 0 appartient à $T_P\Sigma$. Donc dN_P a pour valeurs propres : $\kappa_1 = 0$ et $\kappa_2 = 1$. On trouve donc $K = 0$ et $H = 1/2$. Enfin, il est facile de voir que les directions principales sont $(0, 0, 1)$ et $(-y, x, 0)$. On retrouve le fait qu'elles sont orthogonales.

Une surface paramétrée

Faisons à présent le calcul dans le cas d'une surface paramétrée $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Notons M_I et M_{II} les matrices respectives des premières et seconde formes fondamentales au point P dans la base $\mathcal{B} = (X_u, X_v)$, et A la matrice de dN_P dans la même base. Alors l'égalité (4.12), que l'on peut aussi écrire $\mathbf{II}_P(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathbf{I}_P(dN_P(\vec{u}), \vec{v})$ nous donne, en notant U et V les colonnes des coordonnées de \vec{u} et \vec{v} dans la base \mathcal{B} ,

$$U^T M_{II} V = -(AU)^T M_I V = -U^T (A^T M_I) V,$$

et donc (pourquoi?) $A^T = -M_{II}(M_I)^{-1}$. Or les coefficients de M_{II} sont donnés par (4.7) et ceux de M_I par (4.1). On obtient donc

$$A^T = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G & F \\ F & -E \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

On en déduit immédiatement les formules suivantes pour la courbure de Gauss et la courbure moyenne

$$K = \det A = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \text{Trace}(A) = -\frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (4.16)$$

Les courbures principales s'en déduisent : elles sont les racines du polynôme $x^2 - 2Hx + K = 0$ (pourquoi?).

L'hélicoïde

On applique ce qui précède à l'hélicoïde

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

On a

$$X_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad X_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

D'où on déduit

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 + u^2$$

et le vecteur normal

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Les dérivées secondes sont

$$X_{uu} = 0, \quad X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad X_{vv} = -(u \cos v, u \sin v, 0).$$

On peut alors calculer les coefficients de \mathbf{II}_P

$$e = 0, \quad f = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad g = 0.$$

On en déduit en utilisant (4.16)

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}, \quad H = 0.$$

Cette surface est à courbure moyenne nulle, et à courbure de Gauss négative.

Bibliographie

- [1] J.-M. Arnaudiès et J. Lelong-Ferrand, *Cours de mathématiques, tome 3, Géométrie et cinématique*, Dunod Université.
- [2] Cartan, *Formes différentielles*, Hermann, 1967.
- [3] Danchin, Polycopié du cours d'algèbre de 2ème année, 2004–2005
<http://ufr-math-p12.univ-mlv.fr/L2/telecharger/Anciens%20fichiers>
- [4] Danchin, Polycopié du cours de calcul différentiel de 3ème année, 2005–2006
<http://ufr-math-p12.univ-mlv.fr/Licence/telecharger>
- [5] R. Deltheil et D. Caire, *Géométrie et compléments*, Editions Jacques Gabay, 1950.
- [6] B. Gostiaux, *Cours de mathématiques spéciales*. Tome 5, Presses Universitaires de France, 1995.
- [7] A. Hénaut et A. Yger, *Eléments de géométrie*, Niveau M1, coll Mathématiques Université, Ellipses, 2004.
- [8] G. Laville, *Courbes et surfaces*, collection CAPES/Agrégation, Ellipses, 2004.
- [9] Y. Ladegaillerie, *Géométrie pour le CAPES de mathématiques*, Ellipses, 2002.
- [10] Y. Ladegaillerie, *Géométrie, exercices corrigés pour le CAPES de mathématiques*, Ellipses, 2004.
- [11] M. Lofficial et D. Tanré, *Intégrales curvilignes et de surfaces, Niveau L2*, Ellipses, 2006.
- [12] J. Marsden et A. Weinstein, *Calculus III*, Springer, 1985.
- [13] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, W. A. Benjamin, Inc., 1965.

Index

- abscisse curviligne, 18
- affine
 - application, 11
- antidéplacement, 11

- birégulière, 27
- bon compact, 40

- cercle, 7
- cinématique, 4
- clothoïde, 25
- conique, 7
- coordonnées, 61
- coordonnées
 - changement de, 63
 - projectives, 63
 - sphériques, 63
 - stéréographiques, 63
- courbe
 - gauche, 3
 - paramétrée, 3
 - plane, 3
 - régulière, 3, 4
 - simple, 3
 - support, ou trace d'une, 3
- courbe normale, 18
- courbes équivalentes, 16
- courbure
 - comme dérivée d'un relèvement, 22
 - d'une courbe gauche, 27
 - d'une courbe plane, 19
 - géodésique, 80
 - interprétation automobile, 23
 - normale, 80
- courbure de Gauss, 83
- courbure moyenne, 83
- courbures principales, 83

- déplacement, 11
- difféomorphisme, 15
- différentielle extérieure, 43
- directions principales, 83
- divergence, 47
- droite affine, 5

- ellipse, 7

- forme différentielle
 - 1-forme, 36
- forme différentielle de degré 2, 42
- formule
 - flux-divergence, 47
- Formule de Stokes, 46
- formule de Stokes
 - dans le plan, 46
 - sur une surface, 72
- Frénet
 - formules de, courbes planes, 19
 - repère de, courbes gauches, 28
 - repère de, courbes planes, 19

- hélice, 9
- hyperbole, 9

- intégrale curviligne
 - d'une 1-forme, 37
 - d'une fonction, 35
- isométrie, 77
- isométrie affine, 11
- isométrie locale, 77

- longueur
 - d'une courbe paramétrée, 14
 - effet d'une dilatation, 15
 - invariance par isométrie, 14

- orientation, 40
 - canonique, 40
- orientation d'une courbe, 16
- partie linéaire, 11
- point
 - régulier, 3
 - singulier, 3
- première forme fondamentale, 75
- première forme fondamentale
 - et aire, 76
 - et longueur, 76
- Produit
 - mixte, 26
 - vectorel, 26
- rayon de courbure, 19
- relèvement, 22
- repère canonique, 11
- repère, changement de, 11
- reparamétrisation, 16
- seconde forme fondamentale, 79
- section normale, 81
- spirale
 - d'Euler, 25
- tangente, 13
- Théorème flux divergence, 47
- théorème fondamental des courbes gauches,
32
- théorème fondamental des courbes planes
, 25
- transposée
 - d'une 1-forme, 36
- Transposée d'une forme différentielle,
36
- vecteur
 - tangent, 13
 - vitesse, 13
- vitesse, 13