

EXERCICE 3 6 points
Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0 ; 1]$

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ [vérifiant l'équation

différentielle $(E_0) : y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.

On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_0) strictement positive sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$

et on pose sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ $z = \frac{1}{y_0}$

Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z .

2) Question de cours

PRÉ-REQUIS

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \rightarrow C e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle

$(E'_0) : z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$

b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0 .

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}[$

3. a. Démontrer que $\ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$

On pourra étudier sur $]0 ; 1]$ la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$

b. En déduire que $\frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2}$

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$

Démontrer alors que (E_0) admet une solution strictement positive sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ que l'on précisera.