TS EQUATION DIFFERENTIELLE *feuille 2*

EXERCICE 3 6 points
Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, ¸ λ désigne un nombre réel de l'intervalle]0 ; 1]

.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ **vérifiant l'équation**

différentielle (E¸) : $y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.

On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E¸) strictement positive sur ¸$\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$

et on pose sur ¸ $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ $z = \dfrac{1}{y_0}$

Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

.

2)Question de cours

PRÉ-REQUIS
Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \to C e^{-\lambda x}$
où C est une constante réelle.
.
a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle

(E'¸) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$
.
b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.
.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$

.

3. a. Démontrer que $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

On pourra étudier sur]0 ; 1] *la fonction f définie par* $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$

.

b. En déduire que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$

.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$

Démontrer alors que (E¸) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$
que l'on précisera.