



Cours de Mécanique analytique

Cours de Mécanique analytique	1
I Introduction et Objectifs	3
II Cinématique	4
II.1 Cinématique du point et notion de référentiel.....	4
II.1.i Le point	4
II.1.ii Nécessité d'un référentiel (espace-temps).....	4
II.1.iii Trajectoire, Vitesse et Accélération – cinématique analytique	5
II.1.iii.a Trajectoire.....	5
II.1.iii.b Vitesse	6
II.1.iii.c Cinématique analytique – calcul des vitesses.....	10
II.1.iii.d Accélérations	11
II.1.iii.e Cinématique analytique – calcul des accélérations	12
II.1.iii.f Quelques relations fondamentales - Formule Cinématique de Lagrange	12
II.1.iii.g Cas simples à mémoriser.....	13
II.1.iv Changement de référentiel	14
II.2 Cinématique du solide.....	16
II.2.i Notion de solide, rigide - Notion de champ	16
II.2.ii Champs équiprojectifs - Torseurs	18
II.2.iii Dérivation d'un vecteur mobile	20
II.2.iv Dérivation d'un vecteur de base – en cinématique analytique.....	21
II.2.v Torseur cinématique.....	22
II.2.vi Conséquence sur la composition de mouvement de points matériels	22
II.2.vii Torseur cinématique de Lagrange pour un solide :	23
II.2.viii Exemple de Calcul de cinématique analytique – cas du solide rigide	24
II.2.ix Quelques mouvements de solide particuliers.....	25
II.2.ix.a Mouvement de translation d'un solide	25
II.2.ix.b Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe	25
II.2.ix.c Mouvement plan sur plan	28
II.2.x Notion d'axe central.....	30
II.2.xi Champ d'accélération dans un solide.....	31
II.2.xii Composition des mouvements	32
II.3 Cinématique d'un système de solides	33
II.3.i Les liaisons.....	33
II.3.ii Cinématique des liaisons entre solides.....	33
II.3.ii.a Cadre général	33
II.3.ii.b Cas particulier de la liaison ponctuelle	34
II.3.ii.c Cas particulier des autres liaisons	35
II.3.iii Représentation simplifiée d'un système de solide	39
III Dynamique	40
III.1 Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au Point	40
III.1.i Énoncé.....	40
III.1.ii Exemple d'utilisation	41
III.1.iii Loi de l'action et de la réaction.....	42



III.2	Principe Fondamental de la Dynamique, cas du Solide Rigide	43
III.2.i	Justification en appliquant le PFD à tous les points.....	43
III.2.ii	Énoncé du PFD , cas du solide rigide	45
III.2.iii	Discussion sur le torseur des efforts résultants	46
III.2.iv	Calcul du torseur dynamique ; torseur cinétique.....	47
III.2.iv.a	Résultante dynamique.....	47
III.2.iv.b	Moment dynamique.....	47
III.2.iv.c	Moment cinétique	49
III.2.v	Exemple d'utilisation du PFD.....	52
III.2.vi	Application du PFD à un SYSTÈME de Solides	53
III.2.vii	Un exemple :	53
III.2.viii	Géométrie des masses - matrice d'inertie	54
III.2.viii.a	Opérateur d'inertie et matrice d'inertie	54
III.2.viii.b	Changement de point d'une matrice d'inertie.....	55
III.2.viii.c	Inertie par rapport à une droite quelconque :	57
III.2.viii.d	Quelques propriétés à connaître	58
III.2.ix	Liaisons et Lois de Coulomb pour un Contact Ponctuel.....	60
III.2.ix.a	Liaisons Parfaites.....	60
III.2.ix.b	Exemple de la liaison Pivot Parfaite	61
III.2.ix.c	Exemple de la liaison Ponctuelle Parfaite	62
III.2.ix.d	Liaisons non Parfaites	62
III.2.ix.e	Lois de Coulomb dans le cas du Contact Ponctuel.....	63
III.2.ix.f	Discussion	64
III.2.ix.g	Exemple : Disque en mouvement sur un plan.....	65
IV	Énergétique	66
IV.1	Théorème de l'énergie cinétique appliqué au point	66
IV.2	Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un solide rigide.....	67
IV.2.i	L'exemple du Disque en mouvement sur un plan.....	70
IV.2.ii	Intérêt du Théorème de l'énergie cinétique appliquée à un solide.....	72
IV.3	Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système de solide	72
IV.3.i	Remarques sur la puissance des interefforts	74
IV.3.ii	Exemple	74
V	Principe des Puissances Virtuelles "PPV"	78
V.1	Cas d'un Solide.....	78
V.2	Cas d'un Système de Solide :	79
VI	Equations de Lagrange	80
VII	Stabilité et mouvements particuliers	87
VII.1	Introduction	87
VII.2	Equilibre.....	87
VII.3	Stabilité d'un Equilibre Paramétrique	88
VII.4	Mouvement permanent ou stationnaire.....	91
VII.5	Technique de linéarisation	92
VII.5.i	Présentation.....	92
VII.5.ii	Méthodologie	92
VII.5.iii	Présentation de la Technique de Linéarisation pour une classe particulière de système.....	93



I Introduction et Objectifs

Pour débiter ce cours un peu de PHILOSOPHIE :

La MÉCANIQUE est un sous-domaine de la PHYSIQUE dont la finalité est de prévoir et décrire les mouvements, quantifier les efforts et les énergies. Dans la mécanique, on peut distinguer plusieurs domaines :

- Systèmes à l'échelle humaine et du système solaire possédant des vitesses lentes ($\ll$ à la vitesse de la lumière) : MÉCANIQUE NEWTONIENNE.
- Systèmes à l'échelle humaine possédant des vitesses très élevées proche de la vitesse de la lumière : MÉCANIQUE RELATIVISTE.
- Systèmes à l'échelle atomique : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

Dans ce cours de physique, nous nous limiterons à la MÉCANIQUE NEWTONIENNE que l'on peut découper de manière *académique* comme suit :

- Mécanique des SOLIDES RIGIDES.
- Mécanique des SOLIDES DÉFORMABLES
- Mécanique des FLUIDES

que l'on appelle aussi Mécanique des Milieux Continus. Dans votre scolarité, vous aborderez de près ou de loin ces trois thèmes mais pour ce cours, nous nous limiterons au cas des SOLIDES RIGIDES.

Les objectifs de ce cours sont de vous présenter les outils théoriques et mathématiques utilisés en mécanique newtonienne des solides rigides. Les travaux dirigés vous permettront d'utiliser ces outils afin que vous puissiez vous en servir dans votre futur métier de mécanicien. Ces outils sont nécessaires au mécanicien pour :

- prévoir les mouvements et les trajectoires,
- prévoir les efforts transmis dans les liaisons (rigides ou souples) pour les dimensionner,
- prévoir les efforts à transmettre par les actionneurs pour les dimensionner et les piloter (asservissement),
- dimensionner des amortisseurs pour éviter ou favoriser des phénomènes vibratoires,
- choisir la géométrie des solides pour obtenir une cinématique désirée,
- choisir la géométrie pour "mieux" solliciter les liaisons,
- déterminer les "efforts dynamiques" (accélération) en préambule d'un calcul de déformations et de contraintes (mécanique des milieux déformables),
- en résumé prévoir le fonctionnement d'un SYSTÈME MÉCANIQUE et de plus en plus (aujourd'hui) avant de le construire.

Vos acquis sont tels que vous êtes déjà capables dans de nombreuses situations simples de répondre aux interrogations du mécanicien. Mais pour améliorer ces connaissances, les concepts théoriques de la physique seront approfondis, mais surtout nous nous attacherons à utiliser au mieux les outils mathématiques. Ces derniers peuvent sembler parfois très abstraits, mais ils sont souvent très utiles et pratiques. Ils permettent souvent de résoudre judicieusement des problèmes compliqués.

Dans chaque partie de ce cours des rappels ou des appels de mathématique seront présentés au moment où cela est nécessaire.

II Cinématique

II.1 Cinématique du point et notion de référentiel

II.1.i Le point

La définition du point peut être celle-ci :

Tout solide ou partie de solide que l'on observe de suffisamment loin de telle manière que l'on ne puisse plus mesurer ses dimensions.

II.1.ii Nécessité d'un référentiel (espace-temps)

L'objectif de la cinématique du point est de décrire les mouvements des points indépendamment des causes qui les engendrent. Pour étudier le mouvement d'un point il faut nécessairement un observateur qui repère :

- la position du point par rapport à lui-même
- l'instant correspondant à cette position (mesure du temps).

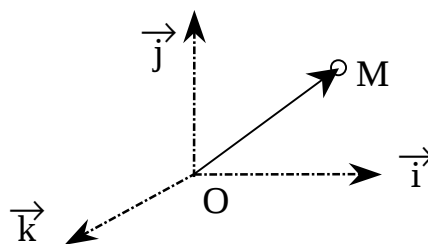
Afin de repérer la position d'un point on utilise naturellement la notion d'espace à trois dimensions. Du point de vue mathématique c'est un espace affine euclidien (espace muni d'un produit scalaire, qui permet de définir les distances et les angles). Dans cet espace on construit un système de mesure de la position constitué de quatre points (notés O, A, B et C) non coplanaires tels que : $\overline{OA}$ soit une constante par rapport au temps t, $\overline{OB}$ soit une constante par rapport au temps t, $\overline{OC}$ soit une constante par rapport au temps t. Une fois ces quatre points définis la position d'un point mobile noté M dans cet espace est complètement déterminée dès que l'on connaît les quatre distances : $\overline{MO}, \overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}$.

Cas particulier :

Généralement on choisit un repère orthonormé comme système de positionnement $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ qui est tel que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}, \overrightarrow{OB} = \vec{j}, \overrightarrow{OC} = \vec{k}$$

$$\|\vec{i}\| = 1, \|\vec{j}\| = 1, \|\vec{k}\| = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$



Avec ce système de mesure, pour repérer la position d'un point M il suffit de donner les coordonnées (x,y,z) définies dans le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Alors nous avons la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

En plus du système de mesure il faut aussi pouvoir repérer le temps pour différencier chaque instant. On utilise pour cela du point de vue mathématique un espace affine de dimension 1 (que l'on note quelques fois $\{\tau\}$).

Définition :

On appelle référentiel espace-temps (noté $\mathfrak{R}$) le couple :
système de mesure de la position
système de mesure du temps (espace affine)

Le mouvement d'un point M est alors caractérisé par une application :

$$t \rightarrow \vec{OM}(t)$$

Si ces définitions paraissent très mathématiques il est important de remarquer qu'en physique expérimentale pour décrire un mouvement on procède bien de cette façon. Le repère définissant l'espace est matérialisé par les systèmes de mesure (règles, lasers, optique,...) utilisés pour caractériser x,y,z (par exemple). Ces systèmes de mesure utilisent des références fixes par rapport à l'observateur (mur d'une salle de manip, étoiles dans le ciel, socle de la manip,...).

L'espace affine du temps est physiquement matérialisé par une horloge qui permet de mesurer le temps tout simplement.

Une fois que nous avons défini le référentiel espace-temps (noté $\mathfrak{R}$) attaché à notre OBSERVATEUR, il est important de prendre conscience que toutes les observations faites par cet observateur seront indissociables du référentiel. Si l'on change d'observateur et par conséquent de référentiel, la description de la cinématique du point étudié (mouvement, vitesse, accélération) change aussi. Toutefois dans le cadre de la mécanique de Newton l'hypothèse suivante est faite :

Hypothèse fondamentale de la mécanique Newtonienne :

Lorsque deux observateurs distincts suivent le mouvement d'un même point, ils utilisent leur propre système de mesure de la position, MAIS ils utilisent la MÊME MESURE DU TEMPS. Les horloges sont synchrones.

Cette hypothèse traduit le fait que l'espace et le temps sont découplés. Expérimentalement il a été prouvé que cette hypothèse est fautive et que le temps et l'espace sont deux entités intimement liées. Dans la réalité physique, le temps évolue différemment suivant l'observateur et plus précisément suivant son mouvement dans l'espace. Toutefois cette imbrication du temps et de l'espace n'est pas perceptible pour des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière et elle est difficilement mesurable avec des systèmes de mesure classiques du temps.

II.1.iii Trajectoire, Vitesse et Accélération – cinématique analytique

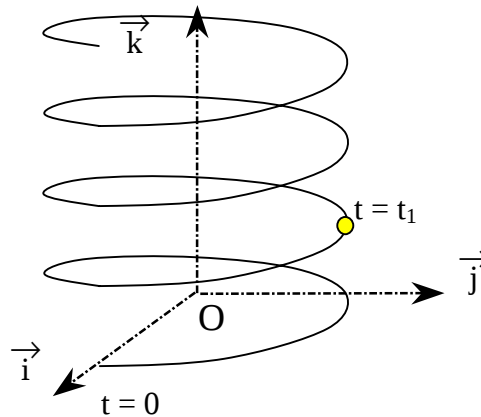
II.1.iii.a Trajectoire

Définition : La trajectoire est l'ensemble des positions prises par le point M observé dans le référentiel $\mathfrak{R}$ lorsque le temps varie.

Une trajectoire est une courbe dans l'espace paramétrée par le temps. Par exemple le mouvement hélicoïdal uniforme d'un point a une trajectoire définie par :

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \\ z = h t \end{cases}$$

r : rayon de l'hélice



La position du point à l'instant t_1 est définie par : $\vec{OM}(t_1) = x(t_1) \vec{i} + y(t_1) \vec{j} + z(t_1) \vec{k}$ avec :

$$\begin{cases} x(t_1) = r \cos(t_1) \\ y(t_1) = r \sin(t_1) \\ z(t_1) = h t_1 \end{cases}$$

II.1.iii.b Vitesse

La trajectoire est l'indication essentielle qui à elle seule contient toutes les informations concernant le mouvement. Par exemple entre deux instants t_1 et t_2 on peut mesurer la distance parcourue et définir la vitesse moyenne :

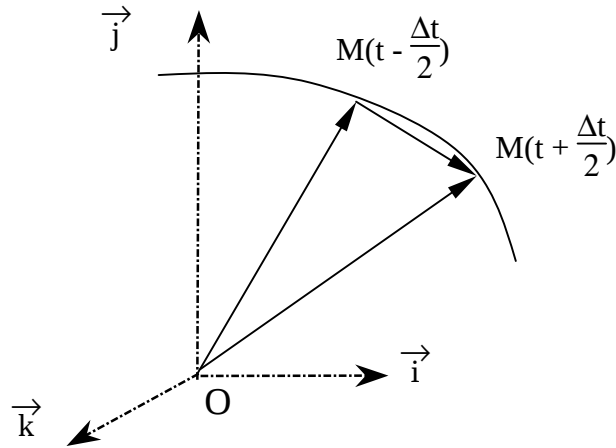
Vitesse Moyenne (V_{moyenne}) : C'est la distance parcourue D_i dans un intervalle de temps Δt rapportée à cet intervalle : $V_{\text{moyenne}} = \frac{D_i}{\Delta t}$

Lorsque l'incrément de temps tend vers zéro ($\Delta t \rightarrow 0$) nous obtenons la vitesse instantanée à un instant t :

Vitesse instantanée ($V_{\text{instantanée}}$) à un instant t : C'est la limite vers laquelle tend la vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers zéro : $V_{\text{instantanée}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{D_i}{\Delta t}$ où D_i est la distance entre les positions prises par M aux instants $t - \frac{\Delta t}{2}$ et $t + \frac{\Delta t}{2}$.

Dans ces définitions "simples" de la vitesse nous n'avons aucune indication sur les changements de direction dans la trajectoire du point M . pourtant entre deux instants définis comme suit $t - \frac{\Delta t}{2}$, $t + \frac{\Delta t}{2}$ le vecteur position $\vec{OM}(t)$ a évolué en direction et en norme. Ce changement est matérialisé par le vecteur :

$$\overrightarrow{M(t - \frac{\Delta t}{2})M(t + \frac{\Delta t}{2})} = \vec{OM}(t - \frac{\Delta t}{2}) - \vec{OM}(t + \frac{\Delta t}{2})$$



On définit alors les vecteurs suivants :

Le Vecteur Vitesse Moyenne : $\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{OM(t + \frac{\Delta t}{2})} - \overrightarrow{OM(t - \frac{\Delta t}{2})}}{\Delta t}$

Le Vecteur vitesse instantanée du point M à l'instant t :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \frac{\Delta t}{2})} - \overrightarrow{OM(t - \frac{\Delta t}{2})}}{\Delta t}$$

qui est par définition la **dérivée vectorielle** de la fonction vectorielle $\vec{OM}(t)$ définie dans le référentiel $\mathcal{R}$ que l'on note :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}}$$

à retenir

Cette dérivée n'a de sens que si la fonction vectorielle est continûment dérivable.

Dans cette définition sont contenues la vitesse instantanée $V_{\text{instantanée}} = \|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|$ et les informations sur la direction du changement de direction dans la trajectoire du point M à l'instant t.

Unités : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}}$ mètres/seconde (m/s) S.I.

Annotations : mètres (pointing to $\vec{OM}(t)$), seconde (pointing to $\frac{d}{dt}$)

- dans le secteur automobile : kilomètres par heures (km/h), milles per hour (Mph),
- dans le secteur des machines outils : millimètres par minute (mm/min).

Exemple de calcul :

Dans le cas du mouvement hélicoïdal uniforme

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} [x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}]_{\mathcal{R}}$$

en appliquant les règles classiques sur l'opérateur dérivé, nous obtenons

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} + x(t) \frac{d[\vec{i}(t)]}{dt}_{\mathcal{R}} + y(t) \frac{d[\vec{j}(t)]}{dt}_{\mathcal{R}} + z(t) \frac{d[\vec{k}(t)]}{dt}_{\mathcal{R}}$$

Comme les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont liés au référentiel $\mathcal{R}$ leurs dérivées sont nulles, car les vecteurs sont fixes dans le référentiel. Finalement tout calcul fait nous obtenons :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = -r \sin(t) \vec{i} + r \cos(t) \vec{j} + h \vec{k}$$

puisque $\begin{cases} x(t) = r \cos(t) \\ y(t) = r \sin(t) \\ z(t) = h t \end{cases}$

Cette expression de la vitesse dépend de la manière dont on repère le point M. Pour illustrer ce propos, au lieu des trois composantes x,y,z nous utilisons la notion de système de coordonnées cylindriques, c'est à dire :

$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{k}$ où $\vec{e}_r$ est un vecteur radial **qui tourne** avec le point M. La position angulaire de ce vecteur par rapport à $\vec{i}$ est notée $\theta = t$. La valeur de r est constante au cours du temps et l'altitude z est variable au cours du temps. Si l'on repère ainsi le point, la vitesse se calcule tout aussi simplement :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} [r \vec{e}_r + z \vec{k}]_{\mathcal{R}}$$

ce qui conduit à :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}} = r \frac{d[\vec{e}_r]}{dt}_{\mathcal{R}} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

En projetant $\vec{e}_r$ sur les axes de la base cartésienne nous obtenons :

$$\vec{e}_r = \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j}$$

$$\frac{d[\vec{e}_r]}{dt}_{\mathcal{R}} = -\sin(t) \vec{i} + \cos(t) \vec{j} = \vec{e}_\theta$$

Finalement $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = r \vec{e}_\theta + h \vec{k}$ où l'on retrouve une composante de rotation plus une composante d'ascension.

Remarque :

Si la trajectoire (notée Γ) est paramétrée par un arc de courbe (noté s) alors la position du point M est définie par la fonction vectorielle :

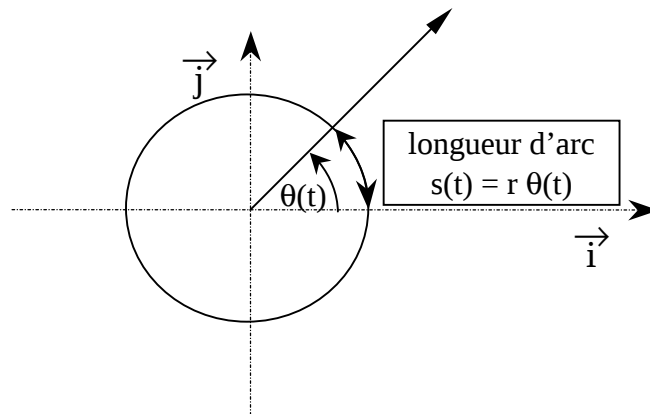
$$s \rightarrow \vec{OM}(s)$$

La vitesse se calcule de la manière suivante $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{ds} [\vec{OM}(s)]_{\mathcal{R}} \frac{ds}{dt}$

où la direction du vecteur $\vec{\tau} = \frac{d}{ds} [\vec{OM}(s)]_{\mathcal{R}}$ est identique à la direction tangente à Γ .

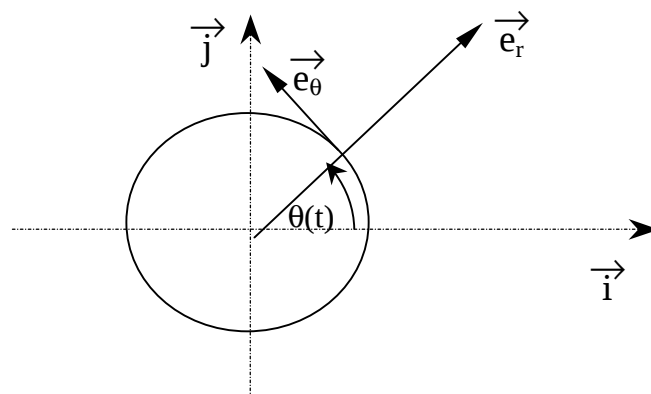
Propriété : Le Vecteur Vitesse du point M est tangent à la trajectoire Γ

Exemple simple : trajectoire circulaire bidimensionnelle



$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{ds} [\vec{OM}(s)]_{\mathcal{R}} \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} [\vec{OM}(s)]_{\mathcal{R}} r \frac{d\theta}{dt} \text{ avec } \frac{d}{ds} [\vec{OM}(s)]_{\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$



Remarque :

Le calcul de la vitesse se réduit au calcul de la dérivée par rapport au temps d'une fonction vectorielle. Le calcul dépend du paramétrage utilisé pour repérer le point que l'on observe :

Par exemple dans le cas du mouvement hélicoïdal :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r(t) + z(t) \vec{k}$$

$$\vec{OM}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

II.1.iii.c Cinématique analytique – calcul des vitesses

De manière plus formelle on peut utiliser une autre manière appelée **cinématique analytique**. La mécanique analytique est une approche entièrement mathématique du problème physique de fond.

Théorème fondamental pour le calcul des vitesses :

La position du point M dans le référentiel dépend de n paramètres **indépendants** qui évoluent au cours du temps : $\vec{OM}(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$. La vitesse est définie par les variations par rapport au temps de la fonction vectorielle $t \rightarrow \vec{OM}(t, q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$. (Remarque : O $\in$ au référentiel $\mathcal{R}$ et les paramètres définissent bien la position du point M par rapport à $\mathcal{R}$) :

Si on considère $(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ comme **indépendants** alors la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}} = \frac{\partial}{\partial q_1} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_2} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n} [\vec{OM}(t)]_{\mathcal{R}} \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$$

que l'on écrit plus simplement :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OM}(t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$$

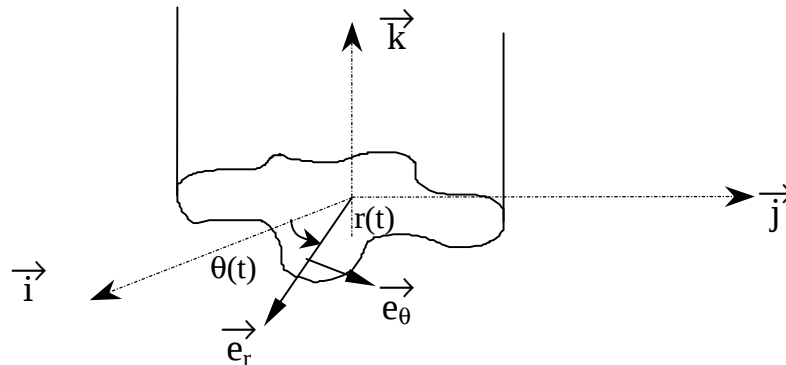
où $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1}$ représente l'évolution du vecteur de position lorsque le paramètre q_1 varie, et $\dot{q}_1$ représente l'évolution du paramètre au cours du temps.

Le dernier terme $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$ est présent dans le cas spécifique où le vecteur position dépend **explicitement** du temps.

Théorème :

La vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est la somme de n vecteurs $\vec{V}_i = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i}$, $\vec{V}_i$ étant la vitesse qu'aurait le point M si tous les autres paramètres $q_j(t)$ avec $j \neq i$ étaient maintenus constants ($q_j(t) = q_j(t_0)$) à l'exception de $q_i(t)$.
Ce principe de superposition n'est valable qu'à l'instant considéré.

Exemple :



$\vec{OM} = r(t) \vec{e}_r(\theta(t)) + z(t) \vec{k}$, les paramètres définissant la position sont $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$ par conséquent :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}.$$
 Le dernier terme est nul dans ce cas.

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r + r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + z \frac{\partial \vec{k}}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} = \vec{e}_r \quad \text{car } \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0; \frac{\partial \vec{k}}{\partial r} = 0; \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

Les deux dernières égalités viennent du fait que les paramètres sont supposés **indépendants**. Dans la suite on ne présentera plus ces termes.

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + z \frac{\partial \vec{k}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta \quad \text{car } \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \text{ et } \frac{\partial \vec{k}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} + z \frac{\partial \vec{k}}{\partial z} + \vec{k} = \vec{k} \quad \text{car } \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial \vec{k}}{\partial z} = 0.$$

Finalement :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

II.1.iii.d Accélération

L'accélération est la quantité physique qui caractérise l'évolution de la norme et de la direction de la vitesse.

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\vec{OM}}{dt}(t) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d^2}{dt^2} \left[\vec{OM}(t) \right]_{\mathcal{R}}$$

Unité : m/s² mètre par secondes au carré

On mesure l'accélération dans une direction avec des accéléromètres utilisant le phénomène piézoélectrique.

Si l'on utilise comme paramétrage l'arc de courbe (trajectoire)

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{\tau} \frac{ds}{dt} \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{\tau} \right]_{\mathcal{R}} \frac{ds}{dt} + \vec{\tau} \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\text{où } \frac{d}{dt} \left[\vec{\tau} \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{ds} \left[\vec{\tau} \right]_{\mathcal{R}} \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{ds} \left[\vec{\tau} \right]_{\mathcal{R}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{\tau} \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$\frac{d}{ds} \left[\vec{\tau} \right]_{\mathcal{R}}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{\tau}$ dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire.

L'accélération se décompose en une composante suivant la tangente à la courbe et une composante orthogonale à cette tangente. Cette dernière correspond au changement de direction du vecteur vitesse au cours du temps.

II.1.iii.e Cinématique analytique – calcul des accélérations

En utilisant le théorème fondamental on peut aussi calculer l'accélération de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) &= \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \right]_{\mathcal{R}} \\ \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) &= \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_n} \ddot{q}_n + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1^2 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &+ \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_n + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_n} \right) \dot{q}_n^2 + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \right) \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \right) \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{OM}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \sum_i \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \vec{OM}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i \frac{\partial^2 \vec{OM}}{\partial q_i \partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{OM}}{\partial t^2}$$

C'est une expression barbare dont le calcul peut être traité par des logiciels de calcul formel (c'est à dire que les opérations peuvent être traitées formellement par un ordinateur). Cette expression est valable si le vecteur position n'est pas une fonction explicite du temps. Dans le cas contraire nous obtenons :

II.1.iii.f Quelques relations fondamentales - Formule Cinématique de Lagrange

Il existe des relations entre les dérivées partielles qui servent à la simplification de certaines expressions :

$$\frac{\partial \vec{V}(M/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \right]_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}(M/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}}}$$

Formule de Lagrange :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}} \right] - \vec{V}(M/\mathcal{R}) \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}} \right]$$

Nous avons la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \dot{q}_i} \right]_{\mathfrak{R}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \dot{q}_i} \right]_{\mathfrak{R}} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \dot{q}_i} \right]$$

et en permutant les dérivées partielles :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \dot{q}_i} \right]_{\mathfrak{R}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{V}(M/\mathfrak{R})}{\partial \dot{q}_i}$$

En utilisant la relation précédente nous arrivons à :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathfrak{R}) \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathfrak{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathfrak{R}) \cdot \frac{\partial \vec{V}(M/\mathfrak{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathfrak{R}} \right] - \vec{V}(M/\mathfrak{R}) \frac{\partial \vec{V}(M/\mathfrak{R})}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\vec{\Gamma}(M/\mathfrak{R}) \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathfrak{R}} = \left\langle \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \cdot}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \cdot}{\partial \dot{q}_i} \right\rangle_{\text{opérateur}} \frac{1}{2} \left[\vec{V}(M/\mathfrak{R}) \right]^2$$

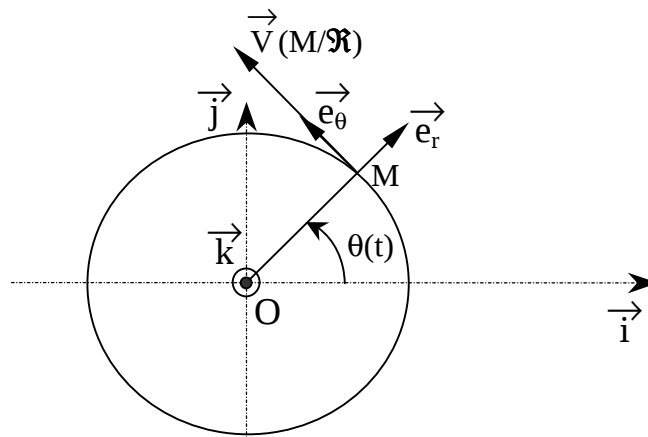
II.1.iii.g Cas simples à mémoriser

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe $\{O, \vec{k}\}$

$$\vec{OM}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(\theta(t)) \\ y(t) = r \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r(\theta(t))$$



Vitesse :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

où $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation.

Montrer que ces deux résultats sont équivalents.

Calcul de l'accélération

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} \right]_{\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$$

ou

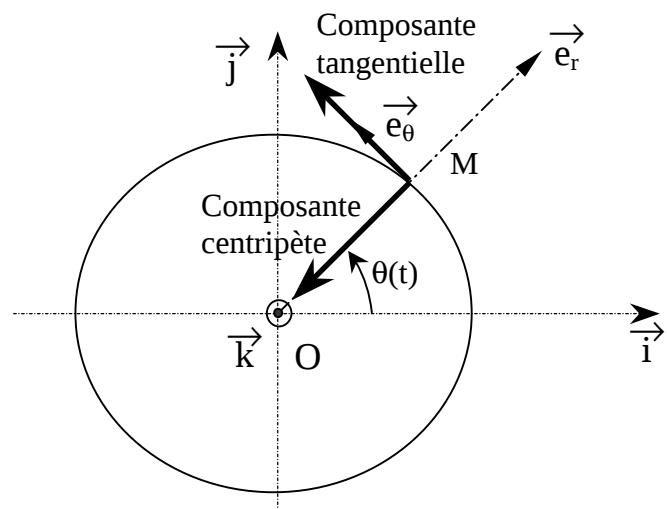
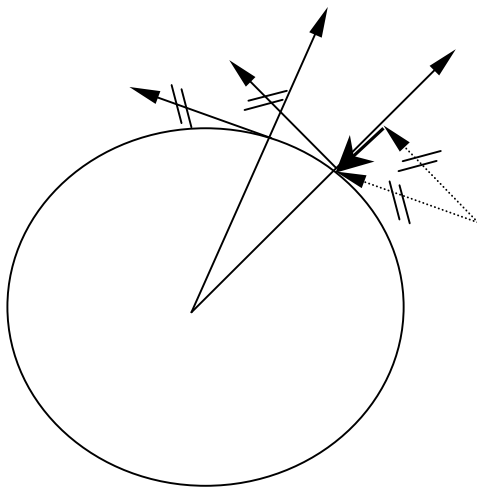
$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right]_{\mathcal{R}} = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_\theta \right]_{\mathcal{R}}$$

$$\text{avec : } \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_\theta \right]_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

La composante : $r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ est tangentielle, et elle est due à l'augmentation de la vitesse de rotation : $\dot{\theta}$.

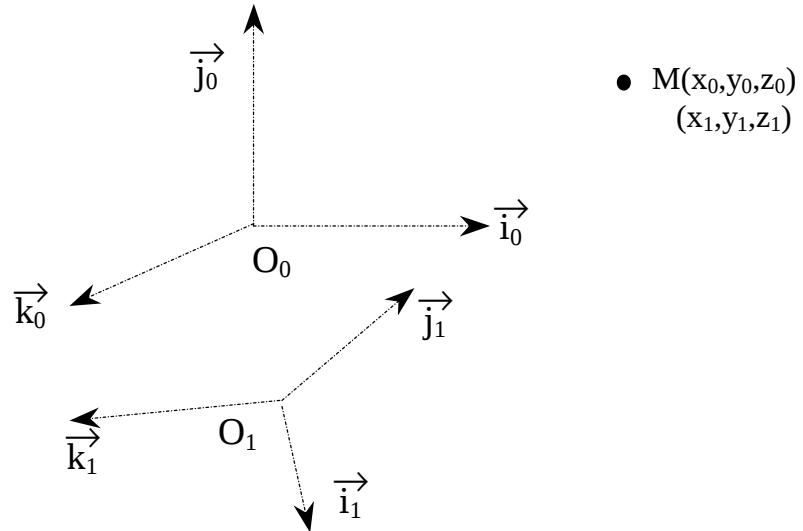
La composante $-r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$ est centripète et elle est due à un changement de direction du vecteur vitesse



II.1.iv Changement de référentiel

Soit deux référentiels associés à deux observateurs distincts, ces deux référentiels sont notés : $(O_0, \mathcal{R}_0)$ et $(O_1, \mathcal{R}_1)$. Chaque observateur a défini une base orthonormée matérialisant son référentiel.

L'observateur en O_0



L'observateur en O_1

Comment sont reliées les vitesses $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$?

Pour obtenir cette relation nous allons simplifier la démonstration en se plaçant dans une base orthonormée

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{d}{dt} [\vec{O_0 M}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\vec{O_0 O_1}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\vec{O_1 M}]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0) + \frac{d}{dt} [x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0) + x_1 \frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} + y_1 \frac{d}{dt} [\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} + z_1 \frac{d}{dt} [\vec{k}_1]_{\mathcal{R}_0} + \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{d}{dt} [\vec{O_0 O_1}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\vec{O_1 M \in \mathcal{R}_1}]_{\mathcal{R}_0} + \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$$

En contractant les deux premiers termes :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{d}{dt} [\vec{O_0 M \in \mathcal{R}_1}]_{\mathcal{R}_0} + \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$$

on obtient :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$$

Lorsque deux observateurs distincts suivent le mouvement d'un même point, les vitesses sont reliées par la relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$$

On appelle $\mathcal{R}_0$ le référentiel absolu et $\mathcal{R}_1$ le référentiel relatif

La vitesse absolue est : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$

La vitesse relative est : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$

La vitesse d'entraînement est : $\vec{V}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$

Dit autrement la vitesse absolue est égale à la vitesse relative, plus la vitesse d'entraînement. Cette relation n'est vraie que dans le cadre de la mécanique newtonienne.

II.2 Cinématique du solide

II.2.i Notion de solide, rigide - Notion de champ

Comme cela a été présenté précédemment, tout solide que l'on observe de suffisamment loin est réduit à un point. A l'inverse lorsque l'on étudie un solide en l'observant de près on voit une infinité de point. Ceci veut dire que tout ce que nous venons de définir dans le paragraphe **peut s'appliquer** au cas du solide.

Dans ce paragraphe et ce cours nous supposons que le solide est rigide :

Définition :

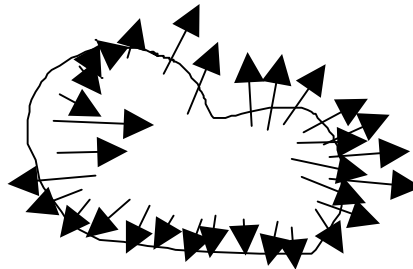
Le solide S (constitué d'un nombre infini de points géométriques) est considéré comme rigide, si la distance entre **deux points quelconques** de S **ne varie pas au cours du temps**.

Cette dernière condition va dicter les vitesses de chaque point du solide. Pour tirer profit de cette particularité, nous introduisons une nouvelle notion mathématique qui est le champ.

A chaque point M du solide (noté S) on associe le vecteur vitesse $\vec{V}(M \in S/\mathcal{R})$ du point M appartenant au solide en mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

$$M \rightarrow \vec{V}(M \in S/\mathcal{R})$$

L'ensemble des vecteurs $\vec{V}(M \in S/\mathcal{R})$ s'appelle le champ qui est composé d'une infinité de vecteurs vitesses puisque le solide S est constitué d'une infinité de points.



Ce champ de vitesses **n'est pas quelconque**, il est tel que les distances entre les points sont conservées.

Prenons par exemple deux points A_s et B_s appartenant au solide (d'où l'indice S), la distance (d) élevée au carré vaut :

$$d^2 = \vec{A_s B_s} \cdot \vec{A_s B_s}$$

Si l'on dérive cette égalité par rapport au temps, on obtient zéro car la distance est constante par rapport au temps, $\frac{d}{dt}(d^2) = 0$. Par conséquent :

$$\frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s} \cdot \vec{A_s B_s}] = \frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} \cdot \vec{A_s B_s} + \vec{A_s B_s} \cdot \frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} = 0$$

$$\text{Or } \frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} [\vec{A_s O}]_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} [\vec{O B_s}]_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} = - \frac{d}{dt} [\vec{O A_s}]_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} [\vec{O B_s}]_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} = \vec{V}(B \in S / \mathcal{R}) - \vec{V}(A \in S / \mathcal{R})$$

Reprenons l'égalité :

$$\frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} \bullet \vec{A_s B_s} + \vec{A_s B_s} \bullet \frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} = 0$$

comme le produit scalaire est commutatif :

$$2 \frac{d}{dt} [\vec{A_s B_s}]_{\mathcal{R}} \bullet \vec{A_s B_s} = 0$$

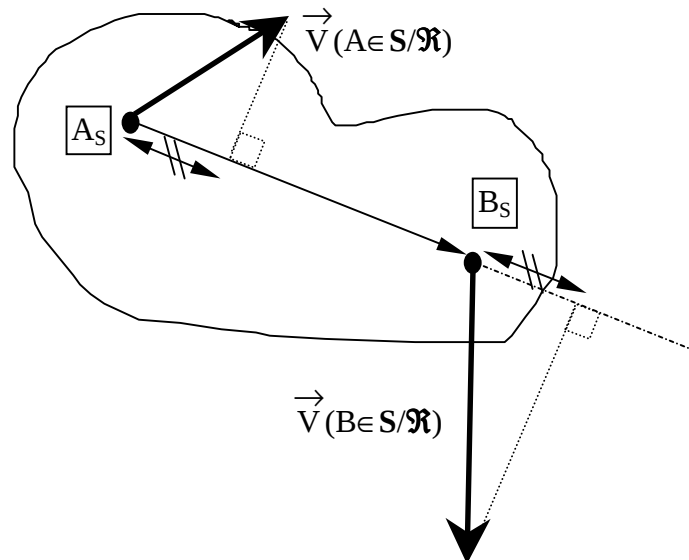
ou encore

$$[\vec{V}(B \in S / \mathcal{R}) - \vec{V}(A \in S / \mathcal{R})] \bullet \vec{A_s B_s} = 0$$

On en déduit la relation FONDAMENTALE :

$$\vec{V}(B \in S / \mathcal{R}) \bullet \vec{A_s B_s} = \vec{V}(A \in S / \mathcal{R}) \bullet \vec{A_s B_s}$$

Un champ vérifiant cette égalité est appelé champ **équiprojectif** (projection -produit scalaire).



Quels que soient les points M et N appartenant au solide, leurs vitesses sont **liées**.

Nous introduisons alors une nouvelle notion mathématique : le torseur. Nous verrons l'utilité d'un tel outil après avoir présenté quelques bases mathématiques des torseurs.

II.2.ii Champs équiprojectifs - Torseurs

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{W}$ défini dans un domaine D du référentiel $\mathcal{R}$ est équiprojectif si :

$$\vec{PQ} \bullet (\vec{W}(Q) - \vec{W}(P)) = 0 \quad \forall P \text{ et } Q \in D$$

Proposition :

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le champ $\vec{W}$ est équiprojectif.

(ii) Il existe un opérateur linéaire antisymétrique tel que pour tout point P et Q de D :

$$\vec{PQ} \rightarrow \mathbf{L}(\vec{PQ}) = \vec{W}(Q) - \vec{W}(P)$$

(iii) Il existe un vecteur :

$$\vec{W}(P) = \vec{W}(Q) + \vec{PQ} \wedge \vec{\Omega}$$

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Si $\mathbf{L}$ est un opérateur antisymétrique, nous avons $\forall \vec{u}$ et $\vec{v} : \vec{u} \bullet \mathbf{L}(\vec{v}) = -\vec{v} \bullet \mathbf{L}(\vec{u})$

Développons le produit scalaire : $\vec{PQ} \bullet \mathbf{L}(\vec{PQ}) = \vec{PQ} \bullet [\vec{W}(Q) - \vec{W}(P)] = 0$

$$\vec{PQ} \bullet [(\vec{W}(Q) - \vec{W}(O)) - (\vec{W}(P) - \vec{W}(O))] = 0$$

$$(\vec{PO} + \vec{OQ}) \bullet [\mathbf{L}(\vec{OQ}) - \mathbf{L}(\vec{OP})] = 0$$

En développant :

$$\vec{PO} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OQ})] + \vec{OQ} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OQ})] - \vec{PO} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OP})] - \vec{OQ} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OP})] = 0$$

Par équiprojectivité :

$$\vec{OQ} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OQ})] = 0$$

$$-\vec{PO} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OP})] = \vec{OP} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OP})] = 0$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\vec{PO} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OQ})] - \vec{OQ} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OP})] = 0$$

ou encore :

$$\vec{OP} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OQ})] = -\vec{OQ} \bullet [\mathbf{L}(\vec{OP})]$$

Ce qui montre bien que l'opérateur est antisymétrique !!

Il faut démontrer que $\mathbf{L}$ est linéaire : soit deux vecteurs quelconques notés $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Soit deux scalaires λ_1 et λ_2 quelconques, alors pour tous vecteurs $\vec{v}$:

$$(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) \bullet \mathbf{L}(\vec{v}) + \vec{v} \bullet \mathbf{L}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = 0$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 \bullet \mathbf{L}(\vec{v}) + \lambda_2 \vec{u}_2 \bullet \mathbf{L}(\vec{v}) + \vec{v} \bullet \mathbf{L}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = 0$$

$$-\lambda_1 \vec{v} \bullet \mathbf{L}(\vec{u}_1) - \lambda_2 \vec{v} \bullet \mathbf{L}(\vec{u}_2) + \vec{v} \bullet \mathbf{L}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = 0$$

$$\vec{v} \bullet [-\lambda_1 \mathbf{L}(\vec{u}_1) - \lambda_2 \mathbf{L}(\vec{u}_2) + \mathbf{L}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2)] = 0$$

comme cette égalité doit être vérifiée quel que soit le vecteur $\vec{v}$, par conséquent :

$$\lambda_1 \mathbf{L}(\vec{u}_1) + \lambda_2 \mathbf{L}(\vec{u}_2) = \mathbf{L}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2)$$

ce qui montre par définition la linéarité de l'opérateur $\mathbf{L}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\vec{W}(P) = \vec{W}(Q) + \vec{PQ} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\vec{W}(Q) - \vec{W}(P) = \vec{QP} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\mathbf{L}(\vec{PQ}) = \vec{QP} \wedge \vec{\Omega}$$

$$\text{ou } \mathbf{L}(\vec{PQ}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

Après avoir choisi une base, l'opérateur linéaire antisymétrique est représenté par une matrice antisymétrique que l'on écrit (par souci de limiter les calculs futurs) :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si le vecteur $\vec{PQ}$ s'écrit $\vec{PQ} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ dans la base d'écriture de la matrice A

$$\mathbf{L}(\vec{PQ}) = [A] \cdot \vec{PQ} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{bmatrix} = \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

$$\text{où } \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \text{ est appelé le vecteur résultant du champ équiprojectif.}$$

Pour montrer l'équivalence de toutes les propositions, il faut établir (iii) $\Rightarrow$ (i)

$$\mathbf{L}(\vec{PQ}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

$$\vec{PQ} \bullet \mathbf{L}(\vec{PQ}) = \vec{PQ} \bullet (\vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}) \text{ c'est un produit mixte}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{PQ} \text{ est perpendiculaire à } \vec{PQ} \text{ par conséquent : } \vec{PQ} \bullet \mathbf{L}(\vec{PQ}) = 0$$

Quel est l'intérêt de tout ceci ??

Un champ équiprojectif peut être représenté par :

- une résultante : $\vec{\Omega}$ (vecteur libre)
- un moment $\vec{W}(Q)$ (vecteur lié)

L'association de cette résultante et de ce moment est appelé torseur.

$\vec{\Omega}$ est appelé la résultante du torseur

$\vec{W}(Q)$ est appelé le moment en Q du torseur.

Le torseur se note : $\{F\}_Q = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{W}(Q) \end{Bmatrix}_Q$

Le moment varie d'un point à l'autre suivant la relation :

$$\vec{W}(P) = \vec{W}(Q) + \vec{PQ} \wedge \vec{\Omega}$$

appelée FORMULE DE CHANGEMENT DE POINT DU TORSEUR.

Torseurs particuliers

➤ Un glisseur se présente sous la forme :

$$\{F\}_Q = \begin{Bmatrix} \vec{u} \\ \vec{MA} \wedge \vec{u} \end{Bmatrix}_Q$$

Il est défini par un simple vecteur lié $(A, \vec{u})$.

La particularité d'un glisseur est qu'au point A, le moment s'annule.

➤ Si la résultante du torseur est nulle, le torseur s'appelle un couple :

$$\{F\}_Q = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}_Q = \{C\}_Q$$

Quel que soit le point considéré, le torseur possède la même expression :

$$\{C\}_P = \{C\}_Q$$

II.2.iii Dérivation d'un vecteur mobile

Dans le cas particulier d'un solide constitué de deux points rigidelement liés nous avons la relation :

$$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}) + \vec{P_s Q_s} \wedge \vec{\Omega}$$

ou bien

$$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) - \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}) = \vec{P_s Q_s} \wedge \vec{\Omega}$$

d'après la définition des vitesses :

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{OP_s} \right]_{\mathcal{R}} - \frac{d}{dt} \left[\vec{OQ_s} \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{Q_s P_s} \right]_{\mathcal{R}}$$

donc

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{Q_s P_s} \right]_{\mathcal{R}} = \vec{P_s Q_s} \wedge \vec{\Omega} (\vec{Q_s P_s} / \mathcal{R}) = \vec{\Omega} (\vec{Q_s P_s} / \mathcal{R}) \wedge \vec{Q_s P_s}$$

Si on choisit les deux points Q_s et P_s tels que $\vec{Q_s P_s}$ soit un vecteur unitaire noté $\vec{u}$

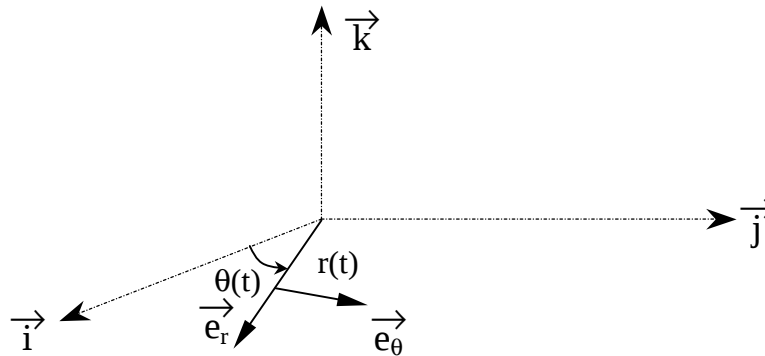
Nous obtenons la relation fondamentale de dérivation d'un vecteur unitaire :

$$\frac{d}{dt} [\vec{u}]_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}$$

A SAVOIR SUR LE BOUT DES DOIGTS.

où $\vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R})$ est le vecteur vitesse de rotation du vecteur $\vec{u}$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.

Exemple :



$$\frac{d}{dt} [\vec{e}_r]_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\vec{e}_r/\mathcal{R}) \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{k} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Le vecteur $\vec{e}_r$ tourne autour de l'axe $\{O, \vec{k}\}$ avec une vitesse angulaire de rotation égale à $\dot{\theta}$.

II.2.iv Dérivation d'un vecteur de base – en cinématique analytique

$$\frac{d}{dt} [\vec{u}(t)]_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}$$

Si on dérive cette relation par rapport à $\dot{q}_i$:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} [\vec{u}(t)]_{\mathcal{R}} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R}) \wedge \vec{u})_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}}$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R}) \wedge \vec{u})_{\mathcal{R}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R}))_{\mathcal{R}} \wedge \vec{u} + \vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R}) \wedge \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\vec{u})_{\mathcal{R}}$$

mais comme $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\vec{u})_{\mathcal{R}} = 0$

Nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\vec{\Omega}(\vec{u}/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \wedge \vec{u}$$

II.2.v Torseur cinématique

Revenons à la cinématique d'un solide rigide. Nous avons montré à partir de la condition de non-déformation que : $\left[\vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) - \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) \right] \bullet \vec{A_s B_s} = 0$

Cette relation traduit le fait que le champ de vitesse est équiprojectif, c'est donc un champ de moment torseur. Par conséquent, il existe un vecteur résultant $\vec{\Omega}$ qui est le vecteur vitesse de rotation instantanée du solide S en mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Théorème :

A chaque instant t, il existe un vecteur $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ appelé Vecteur Vitesse Instantanée de Rotation du solide S en mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, tel que pour tous points Q et P de S, on a :

$$\begin{aligned} \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) &= \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}) + \vec{P_s Q_s} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ \text{ou bien} \\ \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) &= \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{Q_s P_s} \end{aligned}$$

Définition :

On appelle torseur cinématique du solide S en mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\{V(S/\mathcal{R})\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_M$$

Quel est l'intérêt de cette écriture ????

Si l'on connaît ce torseur (deux vecteurs) on connaît TOUT LE CHAMP c'est à dire la vitesse en tous les points **d'un même solide** (c'est à dire en une infinité).

II.2.vi Conséquence sur la composition de mouvement de points matériels

Nous avons vu que par rapport aux deux référentiels $(O_0, \mathcal{R}_0)$ et $(O_1, \mathcal{R}_1)$ les vitesses sont reliées par la relation :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$$

Dans le terme correspondant à la vitesse d'entraînement $\vec{V}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ le point M est lié au référentiel $(O_1, \mathcal{R}_1)$ qui possède un mouvement de corps rigide par rapport au référentiel $(O_0, \mathcal{R}_0)$, par conséquent en utilisant la formule de changement de point nous obtenons :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1(\in \mathcal{R}_1)/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_1M} + \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$$

En dérivant dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_1) \\ &+ \vec{\Gamma}(O_1(\in \mathcal{R}_1)/\mathcal{R}_0) + \frac{d}{dt} \left[\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \right]_{\mathcal{R}_0} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_1M}) \\ &+ 2 \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \end{aligned}$$

Le premier terme est l'accélération relative, le second terme est l'accélération d'entraînement et le dernier terme l'accélération de Coriolis.

II.2.vii Torseur cinématique de Lagrange pour un solide :

Pour la suite la relation entre les dérivées partielles utilisée est :

$$\frac{\partial \vec{V}(M/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}}$$

En utilisant la formule de changement de point dans les solides

$$\vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{P_sQ_s}$$

$$\text{Alors } \forall i \quad \frac{\partial \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{V}(P \in S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{\partial \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P_sQ_s} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \frac{\partial \vec{P_sQ_s}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}}$$

En remarquant que le vecteur position n'est fonction que des paramètres de position et du temps ($t, q_1, q_2, \dots, q_n$) nous obtenons :

$$\frac{\partial \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{V}(P \in S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{\partial \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P_sQ_s}$$

et en appliquant la première égalité :

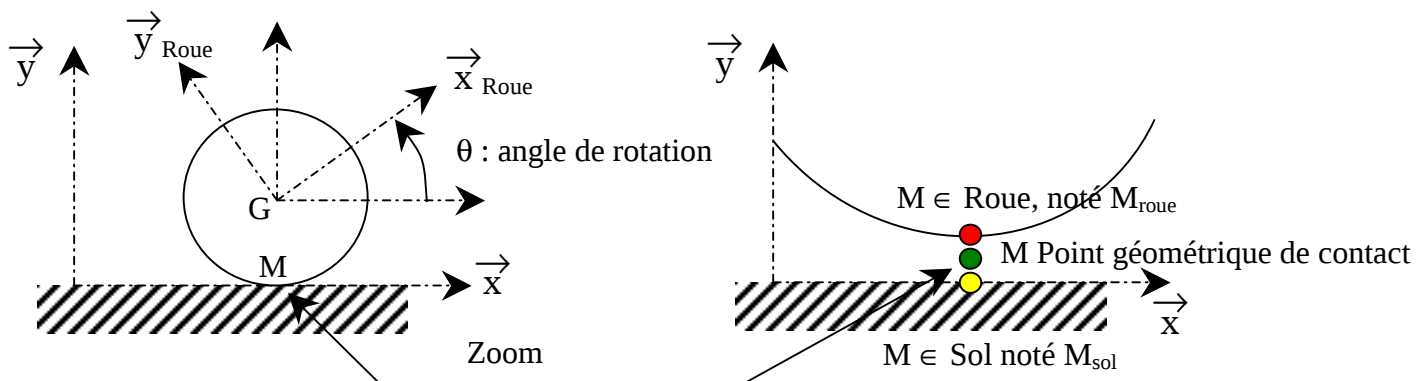
$$\frac{\partial \vec{OQ_s}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{OP_s}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{\partial \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P_sQ_s}$$

C'est la définition d'un champ de moment de torseur. On définit alors le torseur cinématique relatif au paramètre q_i qui "représente" la contribution du paramètre q_i sur le champ de vitesse au point considéré.

torseur cinématique relatif au paramètre q_i :

$$\{V_{q_i}(S/\mathcal{R})\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} \\ \frac{\partial \vec{V}(M/\mathcal{R})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}} \end{array} \right\}_M$$

II.2.viii Exemple de Calcul de cinématique analytique – cas du solide rigide



Soit une roue qui roule sur le sol la vitesse du point géométrique de contact se calcule de la façon suivante:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OM}(t)}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}$$

avec $\vec{OM} = x \vec{x}$ et le seul paramètre de position pour repérer ce point M étant $q_1 = x$.

$$\frac{\partial \vec{OM}(t)}{\partial q_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{OM}(t)}{\partial x} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{x}$$

$$\text{et } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} = \vec{0}$$

d'où la vitesse recherchée : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{x} \vec{x}$

La vitesse du point de contact appartenant au solide se calcule comme précédemment mais les paramètres

de position changent : $\vec{OM}_{roue} = \vec{OG}_{roue} + \vec{GM}_{roue}$.

Donc $\vec{OM}_{roue} = x \vec{x} + R \vec{y} - R \vec{y}_{roue}$.

Les paramètres de position pour repérer ce point M_{roue} sont $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$.

$$\vec{V}(M_{roue}/\mathcal{R}) = \frac{\partial \vec{OM}_{roue}}{\partial x} \underset{\mathcal{R}}{\dot{x}} + \frac{\partial \vec{OM}_{roue}}{\partial \theta} \underset{\mathcal{R}}{\dot{\theta}} \frac{\partial \vec{OM}_{roue}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}_{roue}}{\partial x} \underset{\mathcal{R}}{=} \vec{x} ; \frac{\partial \vec{OM}_{roue}}{\partial \theta} \underset{\mathcal{R}}{=} -R \frac{\partial \vec{y}_{roue}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}_{roue}}{\partial t} = \vec{0}$$

A ce stade il est nécessaire de calculer $\frac{\partial \vec{y}_{roue}}{\partial \theta}$:

$$\frac{d}{dt} [\vec{y}_{roue}]_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \vec{y}_{roue}}{\partial \theta} \underset{\mathcal{R}}{\dot{\theta}} = \underset{\mathcal{R}}{\dot{\theta}} \vec{z} \wedge \vec{y}_{roue} = - \underset{\mathcal{R}}{\dot{\theta}} \vec{x}_{roue} ; \text{ donc nous avons : } \frac{\partial \vec{y}_{roue}}{\partial \theta} = - \vec{x}_{roue}$$

d'où la vitesse recherchée : $\vec{V}(M_{roue}/\mathcal{R}) = \underset{\mathcal{R}}{\dot{x}} \vec{x} + R \underset{\mathcal{R}}{\dot{\theta}} \vec{x}$

La réussite du calcul ne tient qu'au bon choix des paramètres définissant la position du point M

II.2.ix Quelques mouvements de solide particuliers

II.2.ix.a Mouvement de translation d'un solide

Le champ des vitesses est indépendant du point considéré

$$\forall P, M \in S \quad \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(M \in S/\mathcal{R})$$

Le torseur cinématique se présente sous la forme suivante

$$\{V(S/\mathcal{R})\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_M$$

Le torseur cinématique est un couple.

II.2.ix.b Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Un solide S a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe si et seulement s'il existe deux points A_s et B_s tels que :

$$\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

Les vitesses de A et B appartenant au solide S sont constamment nulles. La droite $(A_s B_s)$ est l'axe de rotation. Le vecteur vitesse de rotation est colinéaire à $(A_s B_s)$.

$$\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) + \vec{A_s B_s} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

$$\text{comme } \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

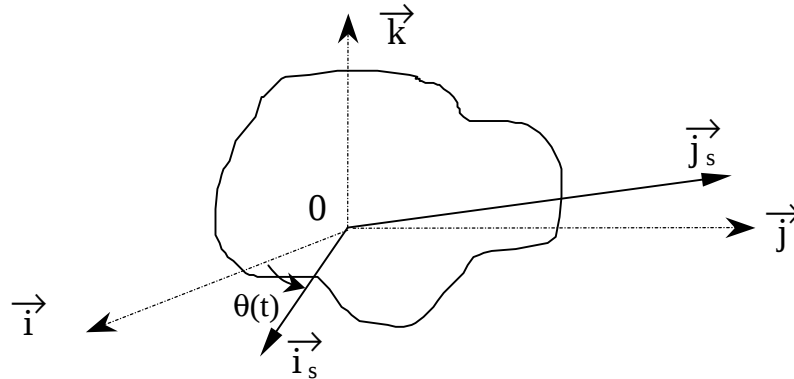
$$\vec{A_s B_s} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega} \text{ est colinéaire à } \vec{A_s B_s}$$

Tous les points C appartenant au solide S de la droite $(A_s B_s)$ de l'axe de rotation ont une vitesse nulle :

$$\begin{aligned}\vec{V}(C \in S/\mathcal{R}) &= \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) + C_s \vec{A}_s \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ &= \vec{0} + \vec{0} \text{ car } C_s \vec{A}_s \text{ est colinéaire à } \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\end{aligned}$$

Construction du champ des vitesses d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

Par souci de simplicité supposons que le vecteur de vitesse de rotation $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ du solide S en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ est porté par l'axe $(O, \vec{k})$



Le solide tourne autour de l'axe $\{O, \vec{k}\}$, on lie au solide une base $(O, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s \equiv \vec{k})$. On définit l'angle θ entre les deux axes $(O, \vec{i}_s)$ et $(O, \vec{j})$.

Soit un point situé sur l'axe $(O, \vec{i}_s)$, ses coordonnées dans la base $(O, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$ sont $(x_s, 0, 0)$. La valeur x_s est invariable au cours du temps car le solide est rigide.

Calculons $\vec{V}(P \in S/\mathcal{R})$

$$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} [\vec{OP}_s]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} [x_s \vec{i}_s]_{\mathcal{R}} = x_s \frac{d}{dt} [\vec{i}_s]_{\mathcal{R}}$$

Le vecteur $\vec{i}_s$ tourne au cours du temps puisqu'il est lié au solide qui lui même tourne autour de $(O, \vec{k})$.

$$\vec{i}_s = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{i}_s]_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j}$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{i}_s]_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} [-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}] = \dot{\theta} \vec{j}_s \text{ donc } \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = x_s \dot{\theta} \vec{j}_s$$

Nous pouvons utiliser la relation :

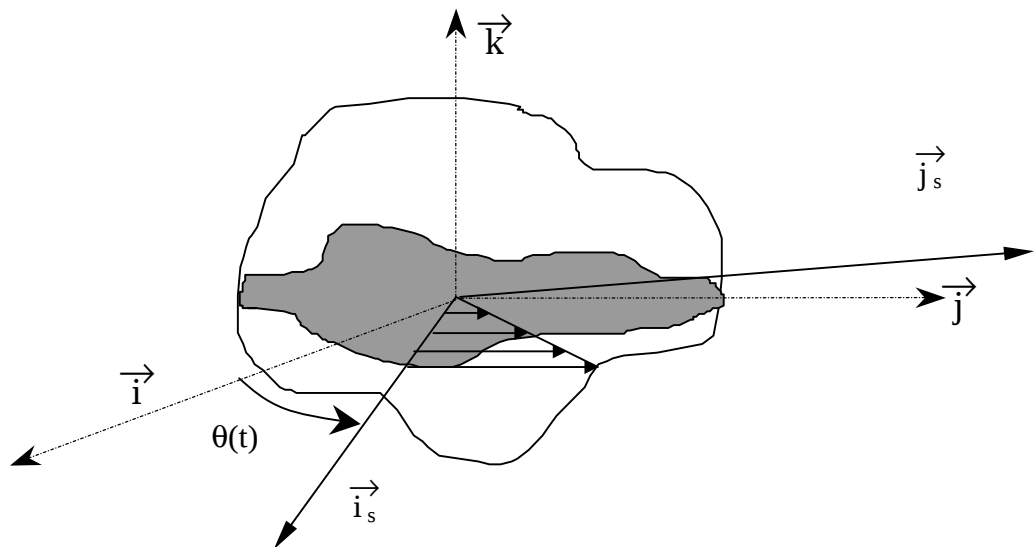
$$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(O \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{OP}_s \text{ avec } \vec{V}(O \in S/\mathcal{R}) = \vec{0} \text{ car } O \in \text{à l'axe}$$

$$x_s \dot{\theta} \vec{j}_s = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge x_s \vec{i}_s$$

ce vecteur est porté par $\vec{j}_s$ donc $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ est porté par l'axe $\vec{k}$

donc $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \dot{\theta} \vec{k}$ où $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

Tracé du champ

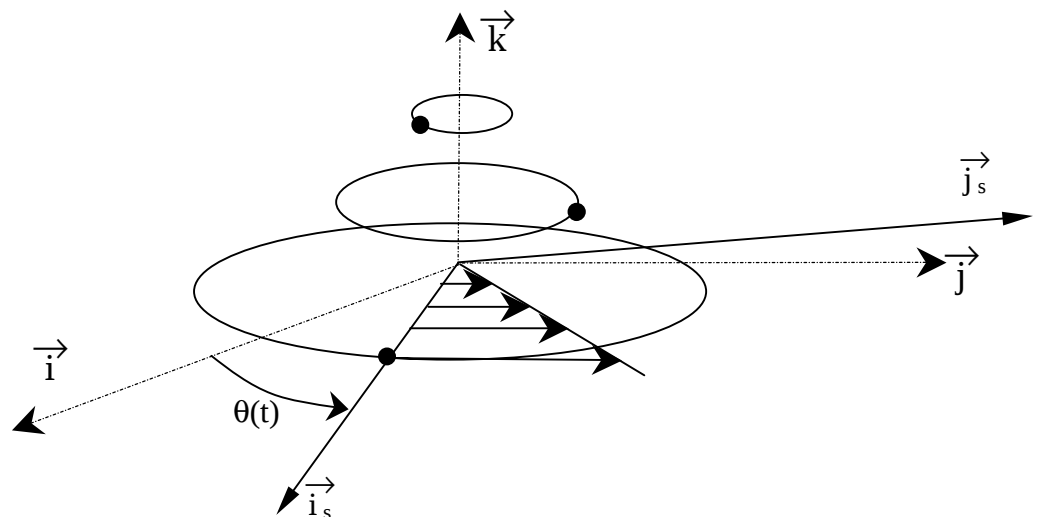


$$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = x_s \dot{\theta} \vec{j}_s$$

$$\text{Si } x_s = 0 \text{ alors } P_s \equiv O_s \quad \vec{V}(O \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

La vitesse est proportionnelle à x_s c'est à dire à la distance de l'axe.

Tout point P du solide S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ décrit un cercle dont l'axe est l'axe de rotation (l'axe $(O, \vec{k})$ dans notre exemple) :



Tous les points font un tour dans le même intervalle de temps. C'est pour cette raison que les points situés à la périphérie ont une vitesse plus importante que ceux situés plus près de l'axe. Effectivement les points extérieurs doivent parcourir une plus grande distance dans le même intervalle de temps.

II.2.ix.c Mouvement plan sur plan

Un mouvement est dit plan si toutes les vitesses sont coplanaires à un même plan π . On peut donc se limiter à l'étude des vitesses dans ce plan. Le champ des vitesses est tel qu'il existe un vecteur de vitesse de rotation orthogonal au plan π : $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$. Notons $\vec{k}$ la normale au plan π alors on peut écrire :

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \omega \vec{k}.$$

Comme les vecteurs vitesses des points appartenant au solide S en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$ sont parallèles au plan π , les vecteurs vitesses sont tous orthogonaux à $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \omega \vec{k}$:

$$\forall P \in S \quad \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = 0$$

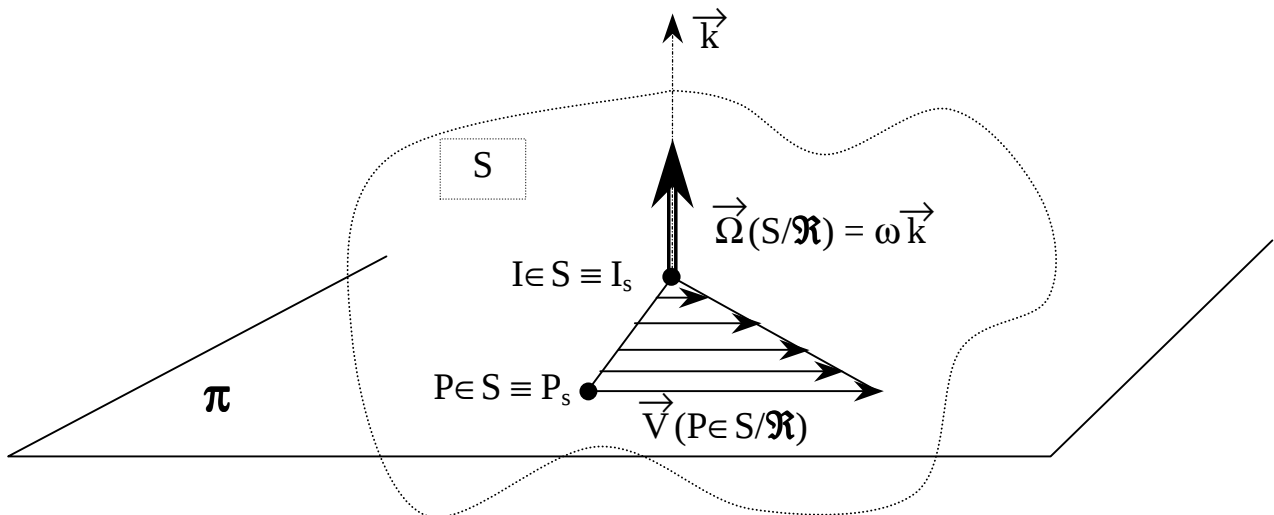
Dans un mouvement plan à chaque instant t il existe un point I appelé CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION tel que $\vec{V}(I \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$. A l'instant t le point I est sur une droite orthogonale au vecteur vitesse $\vec{V}(P \in S/\mathcal{R})$ passant par P .

$$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(I \in S/\mathcal{R}) + \vec{P_s I_s} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$$

$$\vec{P_s I_s} \cdot \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \vec{P_s I_s} \cdot [\vec{P_s I_s} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})]$$

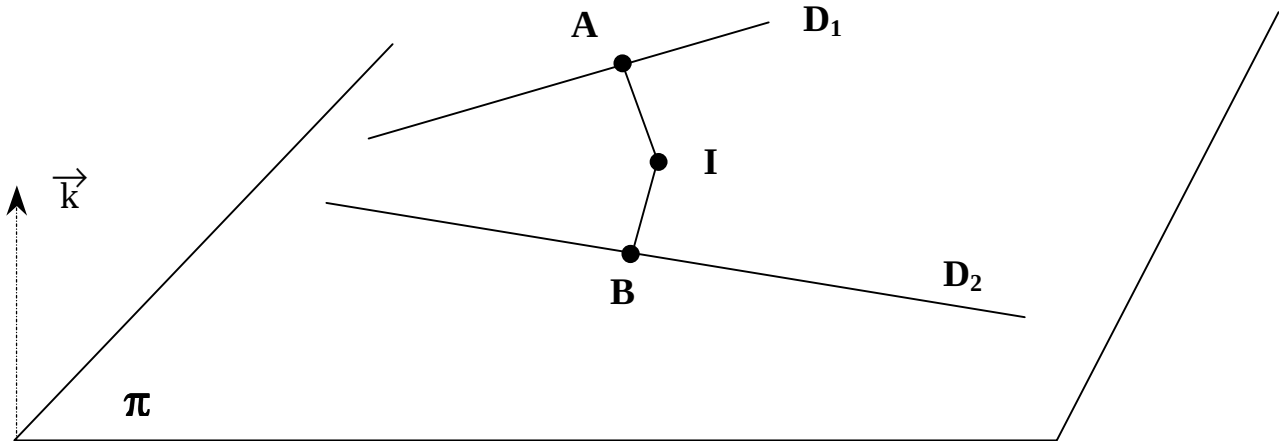
le résultat du produit vectoriel est orthogonal à $\vec{P_s I_s}$ donc :

$$\vec{P_s I_s} \cdot \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = 0$$



Construction graphique

Si l'on connaît deux directions de vitesse en deux points distincts A_s et B_s . Le centre instantané de rotation est situé à l'intersection des deux normales aux directions des vitesses (notées D_1 et D_2) élevées aux deux points A_s et B_s :

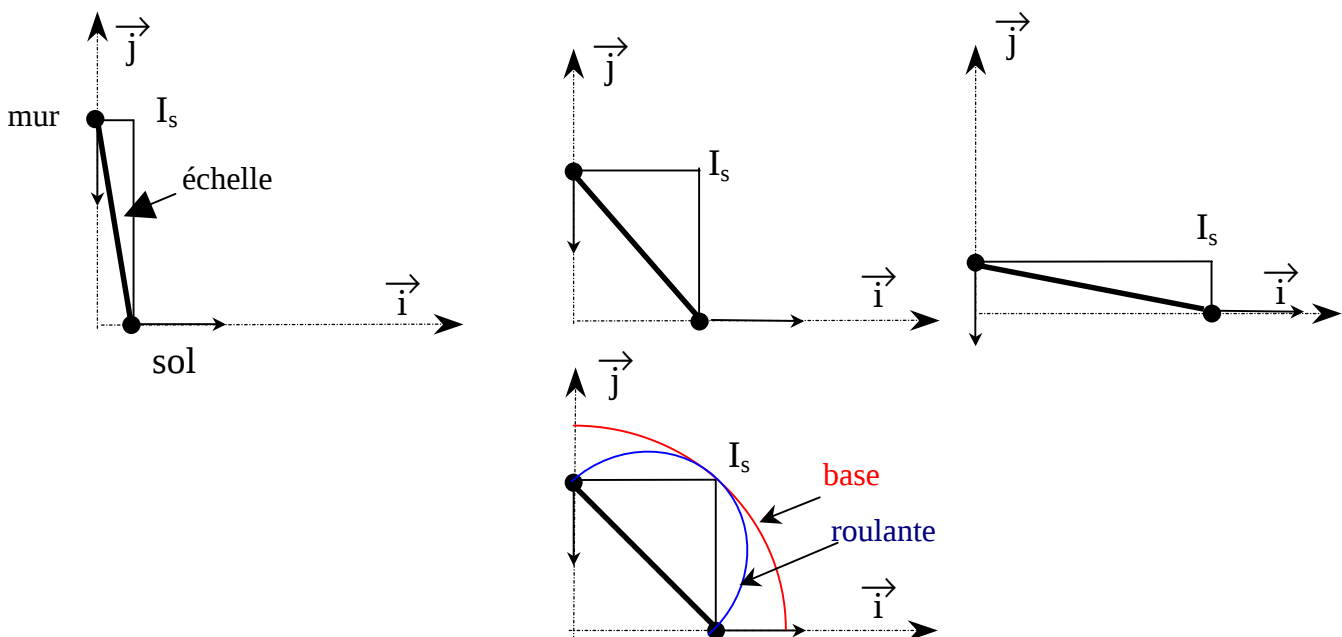


Si l'on connaît de plus la norme d'une des deux vitesses, alors le vecteur vitesse de rotation peut être entièrement déterminé.

Dans le cas d'un mouvement plan quelconque, si à un instant t donné le point I correspond à un point particulier du solide S à l'instant suivant le point I correspond à un autre point du solide. Au cours du mouvement, l'ensemble des points du solide qui ont été CIR à un instant donné de l'histoire est appelé la ROULANTE. et l'ensemble des positions des CIR dans le référentiel $\mathcal{R}$ est appelé la BASE.

Exemple :

Chute d'une échelle le long d'un mur (cas le plus simple de construction d'un CIR)



La roulante roule sans glisser sur la base

Nous introduisons une nouvelle notion cinématique qui est développé dans le paragraphe i).

II.2.x Notion d'axe central

Théorème : Supposons que le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ soit différent du vecteur nul quelque soit l'instant t (on exclut un mouvement de translation pur). Alors il existe un axe Δ , appelé axe central du distributeur des vitesses (autre nom donné au torseur) tel que :

Si $P_s \in \Delta$ alors $\vec{V}(P_s \in S/\mathcal{R}) \parallel \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ de plus le vecteur directeur de Δ est $\parallel \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$

Comment déterminer l'axe Δ ?

Calculs préliminaires :

Soit A un pont du solide S en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, et P_s un point du solide et situé sur l'axe Δ à l'instant t, alors :

$$\vec{V}(P_s \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{A_s P_s}$$

Comme $P_s \in \Delta$ alors $\vec{V}(P_s \in S/\mathcal{R}) \parallel \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ et donc $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(P_s \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$

Or $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(P_s \in S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{A_s P_s}]$.

Le double produit vectoriel peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$: \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{A_s P_s}] = [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \cdot \vec{A_s P_s}] \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) - [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})] \vec{A_s P_s}.$$

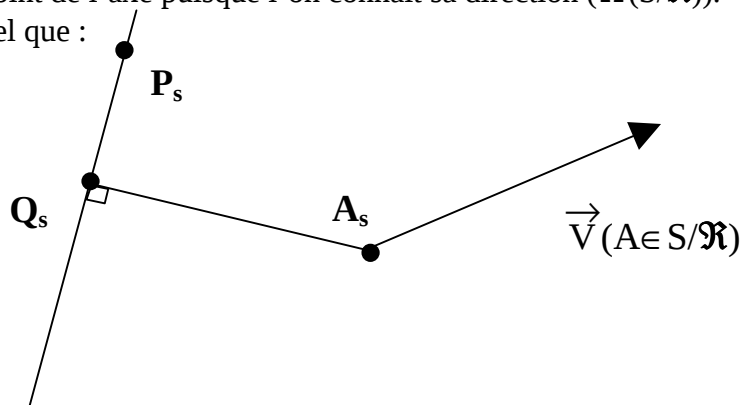
Par conséquent pour tout point $\in$ à l'axe central :

$$\vec{0} = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) + [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \cdot \vec{A_s P_s}] \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) - [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})] \vec{A_s P_s}.$$

Pour définir l'axe Δ , il suffit de déterminer un point de l'axe puisque l'on connaît sa direction ($\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$).

Recherchons un point particulier $Q \in S$ et $\in \Delta$ tel que :

$$\vec{A_s Q_s} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = 0$$



D'après les deux relations précédentes nous obtenons :

$$\vec{A_s Q_s} = \frac{\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R})}{\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \bullet \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})}$$

L'axe Δ est défini comme suit :

$$\Delta = \{P/A_s \vec{P_s} = \vec{A_s Q_s} + \lambda \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\}$$

(définition d'une droite)

En résumé si l'on connaît A_s , $\vec{V}(A \in S/\mathcal{R})$ et $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$, il est possible de définir l'axe central de rotation.

Remarques :

Soit deux points quelconques M_s et $P_s \in \Delta$, nous avons :

$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) \bullet \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}) \bullet \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$. La quantité $\vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) \bullet \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ est indépendante du point M de l'axe Δ . On appelle cette quantité l'invariant du torseur cinématique.

Si $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$ et $\forall M \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) \bullet \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = 0$, alors il existe un point P tel que :

$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$ (CIR) et dans ce cas l'axe Δ est appelé l'axe instantané de rotation.

Le champ de vitesse à l'instant t coïncide avec un champ de vitesses d'un mouvement de rotation autour de P , Δ .

Dans le cas général $\vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) \bullet \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \neq 0$.

Le champ de vitesse est la somme d'un champ uniforme (translation) et d'un champ de type rotation autour d'un axe fixe.

II.2.xi Champ d'accélération dans un solide

Vu l'avantage et l'intérêt que peut nous apporter l'outil torseur, il est naturel de se demander si le champ des accélérations des points appartenant à un solide :

$$M \rightarrow \vec{\Gamma}(M \in S/\mathcal{R})$$

est un champ de moment de torseur. Nous avons établi la relation suivante sur les vitesses :

$$\vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{P_s M_s}$$

Si l'on dérive cette égalité par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} \left[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P_s M_s} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \frac{d}{dt} \left[\vec{P_s M_s} \right]_{\mathcal{R}}$$

Calculons la quantité :

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{P_s M_s} \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{O M_s} \right]_{\mathcal{R}} - \frac{d}{dt} \left[\vec{O P_s} \right]_{\mathcal{R}}$$

donc

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{P_s M_s} \right]_{\mathcal{R}} = \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) - \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{P_s M_s}$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{V}(M \in S/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} \left[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P_s M_s} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{P_s M_s} \right]$$

ce qui conduit à la relation entre les accélérations de deux points distincts d'un solide :

$$\vec{\Gamma}(M \in S/\mathcal{R}) = \vec{\Gamma}(P \in S/\mathcal{R}) + \frac{d}{dt} \left[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P_s M_s} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{P_s M_s} \right]$$

Cette relation "prouve" que le champ d'accélération n'est pas un champ de moment de torseur car il n'existe pas de vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{\Gamma}(M \in S/\mathcal{R}) = \vec{\Gamma}(P \in S/\mathcal{R}) + \vec{u} \wedge \vec{P_s M_s} \text{ uniquement à cause du terme } \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{P_s M_s} \right].$$

II.2.xii Composition des mouvements

La relation que nous avons établie au chapitre II-1-d est applicable à chaque point du solide. Quel que soit le point M appartenant au solide en mouvement par rapport à deux observateurs $(O_0, \mathcal{R}_0)$ et $(O_1, \mathcal{R}_1)$. Nous avons la relation de composition des vecteurs vitesses :

$\vec{V}(M \in S/\mathcal{R}_0)$	=	$\vec{V}(M_s \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$	+	$\vec{V}(M \in S/\mathcal{R}_1)$
Vitesse		Vitesse		Vitesse
Absolue		d'entraînement		Relative
(M _s est immobile dans $\mathcal{R}_1$)				

Comme cette relation est valable en tout point et avec la formule de changement de point :

$$\begin{aligned} \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(P_s \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(P \in S/\mathcal{R}_1) \\ \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{M_s P_s} &= \vec{V}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{M_s P_s} + \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{M_s P_s} \end{aligned}$$

Avec la relation dans l'encadrement précédent :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{M_s P_s} &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{M_s P_s} + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{M_s P_s} \\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{M_s P_s} &= [\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_1)] \wedge \vec{M_s P_s} \end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons la relation de composition des vecteurs vitesses de rotation :

$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_1)$

Nous avons donc les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_1) \\ \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(M_s \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M \in S/\mathcal{R}_1) \end{aligned}$$

Nous obtenons la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$\{V(S/\mathcal{R}_0)\}_M = \{V(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)\}_M + \{V(S/\mathcal{R}_1)\}_M$$

Pour sommer les torseurs, il FAUT OBLIGATOIREMENT les écrire AU MÊME POINT. Les moments du torseur doivent être écrits AU MÊME POINT.

On peut généraliser la relation précédente (robotique).

$$\{V(S/\mathcal{R}_0)\}_M = \{V(S/\mathcal{R}_1)\}_M + \{V(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2)\}_M + \{V(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3)\}_M + \dots + \{V(\mathcal{R}_{n-1}/\mathcal{R}_n)\}_M + \{V(\mathcal{R}_n/\mathcal{R}_0)\}_M$$

II.3 Cinématique d'un système de solides

II.3.i Les liaisons

Dans le cas d'un système de solide, la cinématique de chaque solide est la conséquence des actions appliquées par l'extérieur (traité dans la partie dynamique) **et des liaisons** qui relient les solides entre eux. Les liaisons entre les solides dans les systèmes industriels sont **extrêmement variées**. Malgré cette apparente diversité, du point de vue de la cinématique il est possible de proposer une classification. L'idée est de se concentrer uniquement sur **le mouvement relatif des solides**.

La cinématique des systèmes des solides est donc essentiellement pilotée par les liaisons. Elles ont pour objectif :

- de transmettre les efforts,
- de limiter les mobilités.

Pour modéliser ces liaisons du point de vue de la cinématique, il suffit d'étudier les mobilités relatives des solides reliés entre eux.

Tout d'abord un solide sans aucune liaison (satellite dans l'espace, un objet qui tombe) possède 6 degrés de mobilité ou 6 degrés de liberté. Ces degrés de mobilité sont :

- trois translations suivant trois directions distinctes,
- trois rotations par rapport à trois axes distincts.

Dans les systèmes, les solides sont en contact les uns avec les autres. Ces contacts sont 'ponctuel' ou linéique ou surfacique. Ces contacts transmettent les efforts et limite le mouvement relatif entre les deux solides. Différentes solutions technologiques existent et sont adaptées aux contraintes de conception des systèmes. Dans ce qui suit, on présente la schématisation de différentes liaisons, et l'on aborde succinctement la schématisation qui sera revue plus en détail en cours de technologie.

II.3.ii Cinématique des liaisons entre solides

II.3.ii.a Cadre général

Dans un système mécanique les solides liés entre eux par des liaisons mécaniques (souvent constituées de plusieurs solides qui ont pour objet d'assurer la transmission des efforts). Les liaisons limitent les mouvements relatifs entre les solides.

Dans l'absolu, deux solides S_1 et S_2 non liés entre eux ont **6** degrés de liberté.

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) : 3 \text{ composantes de rotation}$$

$$\vec{V}(P \in S_2/S_1) : 3 \text{ composantes de vitesses}$$

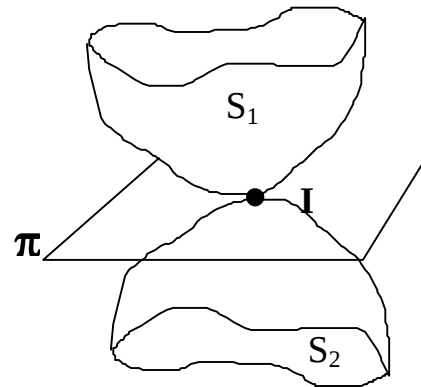
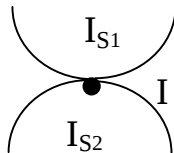
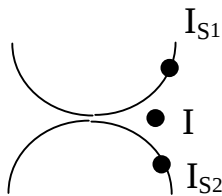
Deux solides complètement liés ont 0 degré de liberté puisque quelque soit l'instant t :

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$$

II.3.ii.b Cas particulier de la liaison ponctuelle

Soit deux solides S_1 et S_2 en contact en un point de l'espace $\mathcal{R}_0$ que l'on note I
à l'instant $t - \Delta t$ à l'instant t



Le contact a lieu entre deux solides.

A l'instant t les deux points I_{S1} et I_{S2} liés chacun respectivement au solide S_1 et S_2 , coïncident entre eux et avec le point géométrique I , qui lui n'appartient pas au solide.

On appelle vecteur vitesse de glissement du solide S_2 par rapport à S_1 en I :

$$\vec{V}_{\text{glissement de } S_2/S_1}(I) = \vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/\mathcal{R}) - \vec{V}(I \in S_1/\mathcal{R})$$

$$\text{ou bien : } \vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I/S_1) - \vec{V}(I/S_2)$$

Définition :

Si la vitesse de glissement $\vec{V}_{\text{glissement de } S_2/S_1}(I)$ est nulle, on dit que le solide S_2 roule sans glisser sur S_1 et inversement.

Remarques :

La vitesse de glissement est située dans le plan tangent (π) au contact I . Pour que le plan puisse être défini il faut et il suffit qu'une au moins des surfaces de contact soit régie par une équation de surface dérivable.

La vitesse de glissement est INDÉPENDANTE du référentiel choisi. C'est une vitesse relative entre deux solides ! Soit deux référentiels $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$:

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/\mathcal{R}_1) - \vec{V}(I \in S_1/\mathcal{R}_1)$$

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(I \in \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_1) - [\vec{V}(I \in S_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(I \in \mathcal{R}_0/\mathcal{R}_1)]$$

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/\mathcal{R}_0) - \vec{V}(I \in S_1/\mathcal{R}_0)$$

La vitesse de glissement est située dans le plan de contact (π) de normale $\vec{n}$. Ce plan est défini par deux vecteurs : $\vec{t}$ et $\vec{t} \wedge \vec{n}$

- le contact subsiste : $\vec{V}(I \in S_2/S_1) \cdot \vec{n} = 0$

- roulement sans glissement :

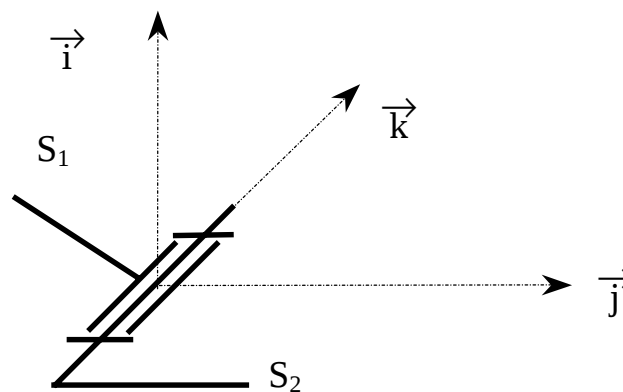
$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) \cdot \vec{t} = 0$$

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) \cdot (\vec{t} \wedge \vec{n}) = 0$$

II.3.ii.c Cas particulier des autres liaisons

Pour les autres liaisons le torseur cinématique du mouvement relatif entre les deux solides qui sont en liaison présente des particularités détaillées ci-dessous :

II.3.ii.c.1 Liaison pivot



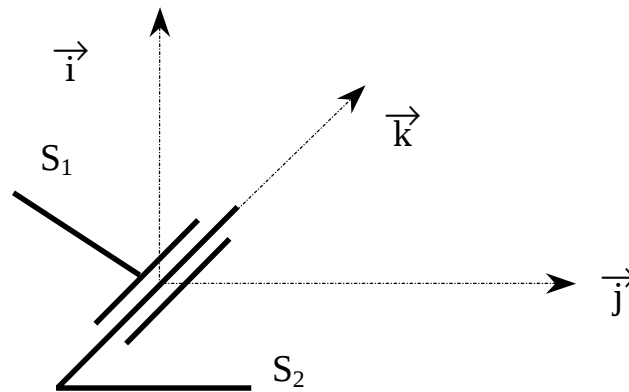
$$\forall P \in (I, \vec{k}) \quad \vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) \text{ est porté par l'axe } \vec{k}$$

$$\text{Dans la base } \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \text{ lié à } S_1 : \{V(S_2/S_1)\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \omega_z(S_2/S_1) \vec{k} \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

$$\text{autre notation : } \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z(S_2/S_1) & 0 \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$$

II.3.ii.c.2 liaison pivot glissant



$\forall P \in (I, \vec{k})$

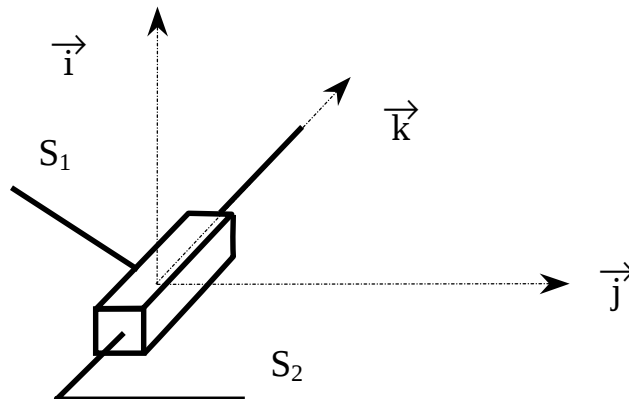
$\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est porté par l'axe $\vec{k}$

$\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ est porté par l'axe $\vec{k}$

Dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lié à S_1 : $\{V(S_2/S_1)\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \omega_z(S_2/S_1) \vec{k} \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) = v_{zp}(S_2/S_1) \vec{k} \end{Bmatrix}_P$

Autre notation : $\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}} \left| \begin{array}{c} \omega_z(S_2/S_1) \\ v_{zp}(S_2/S_1) \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$

II.3.ii.c.3 liaison glissière



$\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est porté par l'axe $\vec{k}$

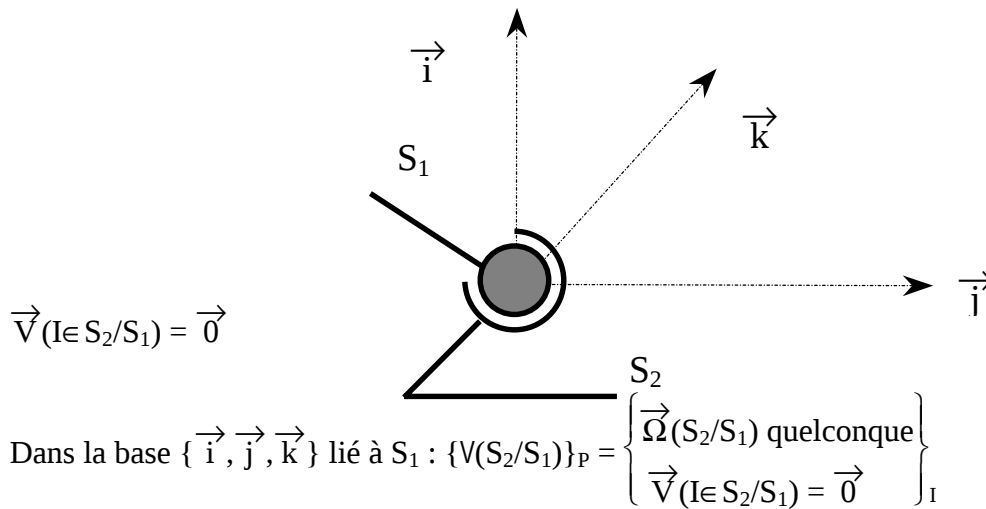
$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{0}$

C'est un couple, par conséquent ces expressions sont indépendantes de la position.

Dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lié à S_1 : $\{V(S_2/S_1)\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{0} \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) = v_{zvp}(S_2/S_1) \vec{k} \end{Bmatrix}_P$

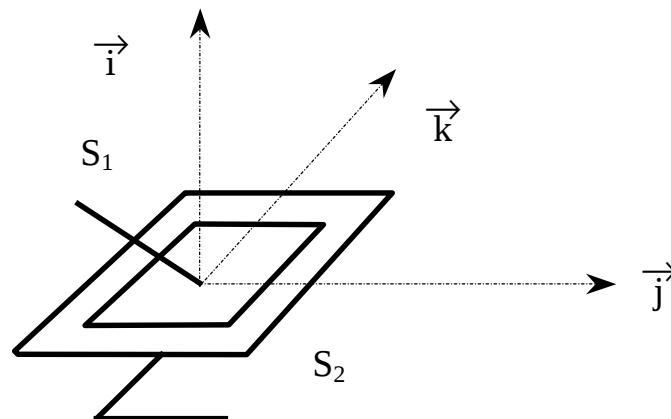
Autre notation : $\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}} \left| \begin{array}{c} 0 \\ v_{zvp}(S_2/S_1) \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$

II.3.ii.c.4 liaison rotule



Autre notation : $\left\{ \begin{array}{l} \omega_x(S_2/S_1) \\ \omega_y(S_2/S_1) \\ \omega_z(S_2/S_1) \end{array} \middle| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$

II.3.ii.c.5 liaison plane



$\forall P \in \text{plan de contact}$

$\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est perpendiculaire au plan donc à l'axe $\vec{k}$: $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \cdot \vec{k} = 0$

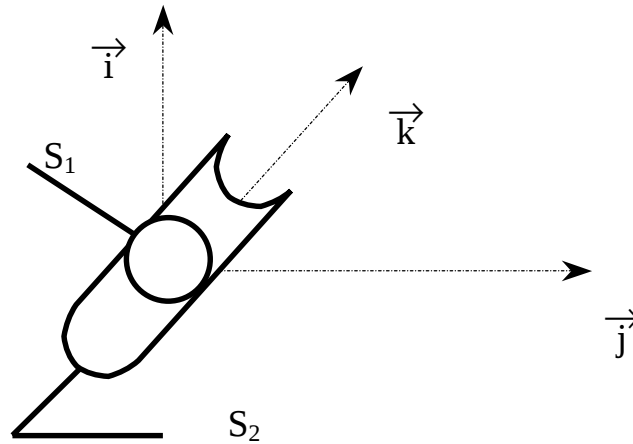
$\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ est porté par l'axe $\vec{k}$

Dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lié à S_1 :

$$\{V(S_2/S_1)\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \omega_z(S_2/S_1) \vec{k} \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) = v_{xp}(S_2/S_1) \vec{i} + v_{yp}(S_2/S_1) \vec{j} \end{array} \right\}_P$$

Autre notation :
$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & v_{xp}(S_2/S_1) \\ 0 & v_{yp}(S_2/S_1) \\ \omega_z(S_2/S_1) & 0 \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$$

II.3.ii.c.6 liaison linéaire annulaire



$\forall P \in (I, \vec{k})$

$\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est porté par l'axe $\vec{k}$

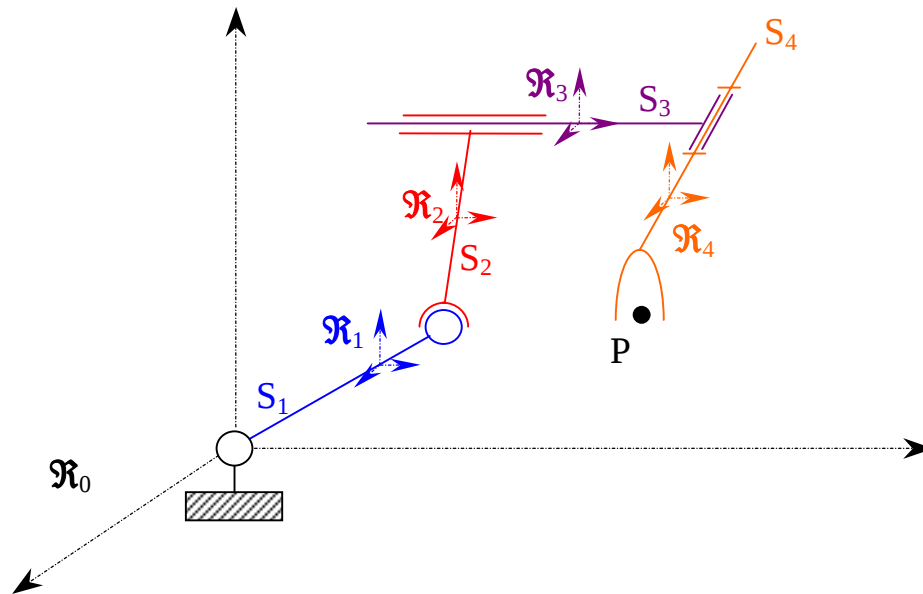
$\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ est quelconque

Dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lié à S_1 : $\{V(S_2/S_1)\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \text{ quelconque} \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) = v_{zp}(S_2/S_1) \vec{k} \end{array} \right\}_P$

Autre notation :
$$\left\{ \begin{array}{c|c} \omega_x(S_2/S_1) & 0 \\ \omega_y(S_2/S_1) & 0 \\ \omega_z(S_2/S_1) & v_{zp}(S_2/S_1) \end{array} \right\}_{\{P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$$

II.3.iii Représentation simplifiée d'un système de solide

Pour faciliter l'étude des systèmes mécaniques, on s'appuie sur une schématisation simplifiée du fonctionnement. Dans ce schéma on ne retient que la mobilité relative des solides et la position spatiale des différentes liaisons. Sur la figure ci dessous est présenté un exemple :



On accroche un référentiel à chaque solide, un observateur est lié à chaque solide :

$$\vec{\Omega}(S_4/R_0) = \vec{\Omega}(S_4/S_3 \equiv R_3) + \vec{\Omega}(S_3 \equiv R_3/S_2 \equiv R_2) + \vec{\Omega}(S_2 \equiv R_2/S_1 \equiv R_1) + \vec{\Omega}(S_1 \equiv R_1/R_0)$$

$$\vec{V}(P \in S_4/R_0) =$$

$$\vec{V}(P \in S_4/S_3 \equiv R_3) + \vec{V}(P \in S_3 \equiv R_3/S_2 \equiv R_2) + \vec{V}(P \in S_2 \equiv R_2/S_1 \equiv R_1) + \vec{V}(P \in S_1 \equiv R_1/R_0)$$

sous la forme de torseur :

$$\{V(S_4/R_0)\}_P =$$

$$\{V(S_4/S_3 \equiv R_3)\}_P + \{V(S_3 \equiv R_3/S_2 \equiv R_2)\}_P + \{V(S_2 \equiv R_2/S_1 \equiv R_1)\}_P + \{V(S_1 \equiv R_1/R_0)\}_P$$

Tous ces torseurs cinématiques sont en partie définis par les liaisons.

Conséquence sur la composition des dérivations par rapport à deux référentiels

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{u} \right]_{R_1} = \frac{d}{dt} \left[\vec{u} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_0/R_1) \wedge \vec{u}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{u} \right]_{R_0} = \vec{\Omega}(\vec{u}/R_0) \wedge \vec{u}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{u} \right]_{R_1} = \vec{\Omega}(\vec{u}/R_1) \wedge \vec{u}$$

Finalement

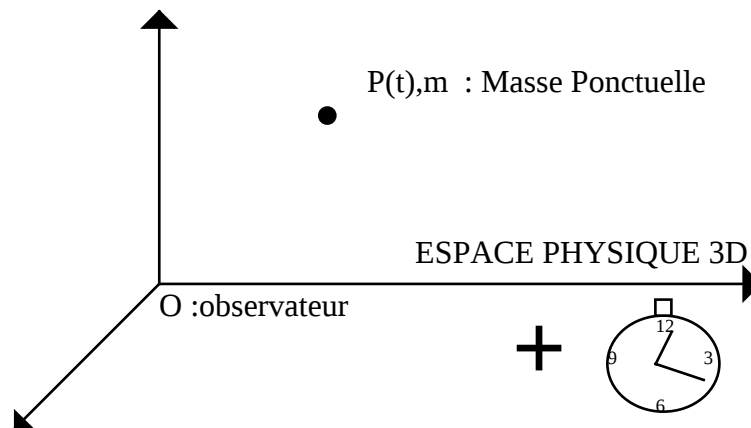
$$\vec{\Omega}(\vec{u}/R_1) = \vec{\Omega}(\vec{u}/R_0) + \vec{\Omega}(R_0/R_1)$$

III Dynamique

III.1 Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au Point

III.1.i Énoncé

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour suivre le mouvement d'un point au cours du temps, il faut définir un observateur auquel on associe un référentiel. Si les concepts théoriques présentés dans le paragraphe sur la cinématique suffisent à décrire le mouvement, la dynamique a pour objet d'expliquer les raisons physiques qui "pilotent" les mouvements.



Pour établir les lois fondamentales qui régissent les mouvements, il faut avoir recours à l'expérience et à l'observation. Il suit une étape de modélisation qui a pour objet de construire des lois mathématiques qui soient capable de décrire les observations. Si la loi proposée est suffisamment générale pour expliquer toutes les situations expérimentales réalisables, elle est appelée Principe Fondamental. En mécanique classique, Newton a par exemple beaucoup contribué à la formulation du Principe Fondamental de la Dynamique. Ce principe nous dit que le mouvement d'un point (sens, direction, évolution) est généré par des ACTIONS mécaniques exercées par l'extérieur sur le point que l'on appelle des FORCES (agissant sur le point P). L'influence de ces forces est pondérée par la masse du point. A l'échelle humaine les forces sont d'origine distincte la pesanteur, les champs électriques et mécaniques, les forces de contact. Les lois qui régissent ces forces ont été déterminées uniquement grâce aux observations des mouvements que ces forces engendrent.

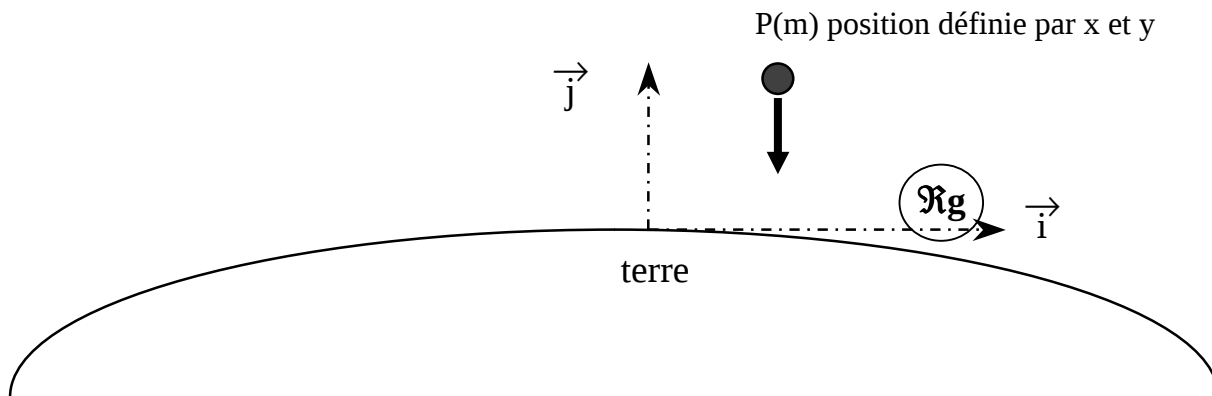
PRINCIPE FONDAMENTAL de la DYNAMIQUE (PFD)

L'influence des forces sur le mouvement est résumée dans l'égalité entre la somme des forces qui agissent sur le point matériel avec le produit de la masse du point P et de l'accélération du point P dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\sum \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} = m(P) \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R})$$

Si dans le référentiel $\mathcal{R}$ cette relation est vérifiée expérimentalement on peut conclure que le référentiel est Galiléen (noté $\mathcal{R}_g$). Tous les repères qui possèdent un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_g$ sont aussi des repères Galiléen et dans tout les repères Galiléen le Principe Fondamental de la Dynamique est valide.

III.1.ii Exemple d'utilisation



Nous appliquons le Principe Fondamental de la Dynamique dans un repère lié à la terre que l'on suppose Galiléen :

- Recenser les efforts qui s'appliquent sur le point P : La pesanteur qui est engendrée par l'attraction gravitationnelle de la terre sur la masse P(m). La force qui caractérise cette action est dirigée suivant $-\vec{j}$ et sa norme est égale à $9.81 \cdot m$. La valeur 9.81 est la norme du vecteur $\vec{g}$ définissant le champ gravitationnel sur la surface de la terre en France.
- Calcul de l'accélération : $\vec{\Gamma}(P/R_g) = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$
- Application du PFD $m(\ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}) = m \vec{g} = -m \cdot 9.81 \vec{j}$
- Résolution du système d'équation différentiel du second ordre :
 $\ddot{x} = 0$ ce qui nous donne : $x(t) = a \cdot t + b$
 $\ddot{y} = -9.81$ ce qui nous donne : $y(t) = -9.81 \cdot \frac{t^2}{2} + c \cdot t + d$

où a,b,c,d sont les constantes d'intégration. Ces constantes sont calculées grâce aux conditions initiales :

- Position à l'instant initial ($x(0)$ et $y(0)$) et

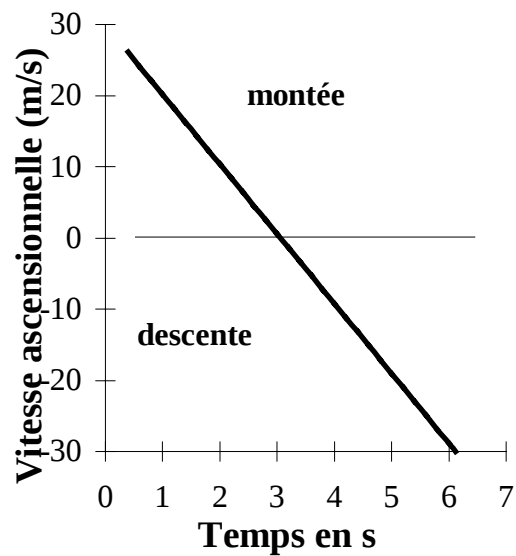
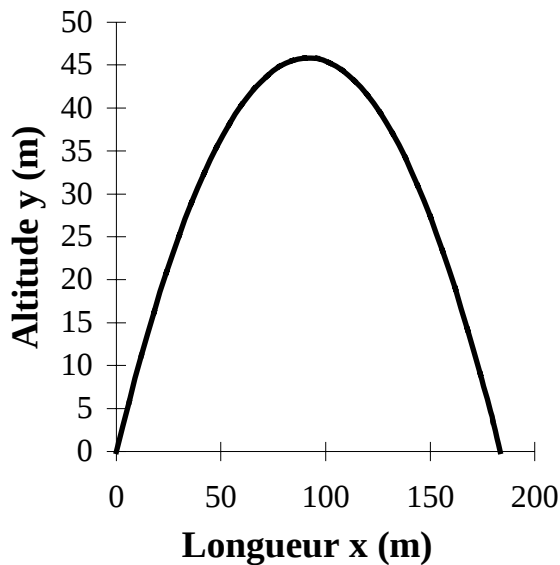
- Vitesse à l'instant initial $\vec{V}(t=0)$ c'est à dire ($\dot{x}(0)$ et $\dot{y}(0)$).

Si $t=0$ est le moment présent pour prévoir le futur il faut au moins se donner l'état du mouvement (position et vitesse) à l'instant présent.

Supposons que $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 30 \text{ m/s}$ et $\dot{y}(0) = 30 \text{ m/s}$. Ces données correspondent à un tir à 45° du sol avec une vitesse initiale du projectile égale à 42.43 m/s (152.73 km/h). Alors :

- $x(t) = 30 \cdot t$
- $y(t) = -9.81 \cdot \frac{t^2}{2} + 30 \cdot t$

Trajectoire et évolution de la vitesse ascensionnelle au cours du temps



III.1.iii Loi de l'action et de la réaction

Soit deux points P_1 et P_2 dans le référentiel Galiléen, leurs mouvements sont régis par :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_1 \rightarrow P_1} = m(P_1) \vec{\Gamma}(P_1/\mathcal{R}g)$$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_2 \rightarrow P_2} = m(P_2) \vec{\Gamma}(P_2/\mathcal{R}g)$$

On sépare les forces en deux parties et on obtient :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_1 \rightarrow P_1} = \Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_2 \text{ et à } P_1 \rightarrow P_1} + \Sigma \vec{F}_{P_2 \rightarrow P_1} = m(P_1) \vec{\Gamma}(P_1/\mathcal{R}g) : Eq a$$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_2 \rightarrow P_2} = \Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_2 \text{ et à } P_1 \rightarrow P_1} + \Sigma \vec{F}_{P_1 \rightarrow P_2} = m(P_2) \vec{\Gamma}(P_2/\mathcal{R}g) : Eq b$$

Maintenant si l'on applique le Principe Fondamental de la Dynamique à l'ensemble Σ constitué de l'union des deux points

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow \Sigma} = m(\Sigma) \vec{\Gamma}(\Sigma/\mathcal{R}g) = m(P_1) \vec{\Gamma}(P_1/\mathcal{R}g) + m(P_2) \vec{\Gamma}(P_2/\mathcal{R}g)$$

qui s'exprime :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow \Sigma} = \Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_2 \text{ et à } P_1 \rightarrow P_1} + \Sigma \vec{F}_{\text{extérieur à } P_2 \text{ et à } P_1 \rightarrow P_1}$$

$$= m(P_1) \vec{\Gamma}(P_1/\mathcal{R}g) + m(P_2) \vec{\Gamma}(P_2/\mathcal{R}g) : Eq c$$

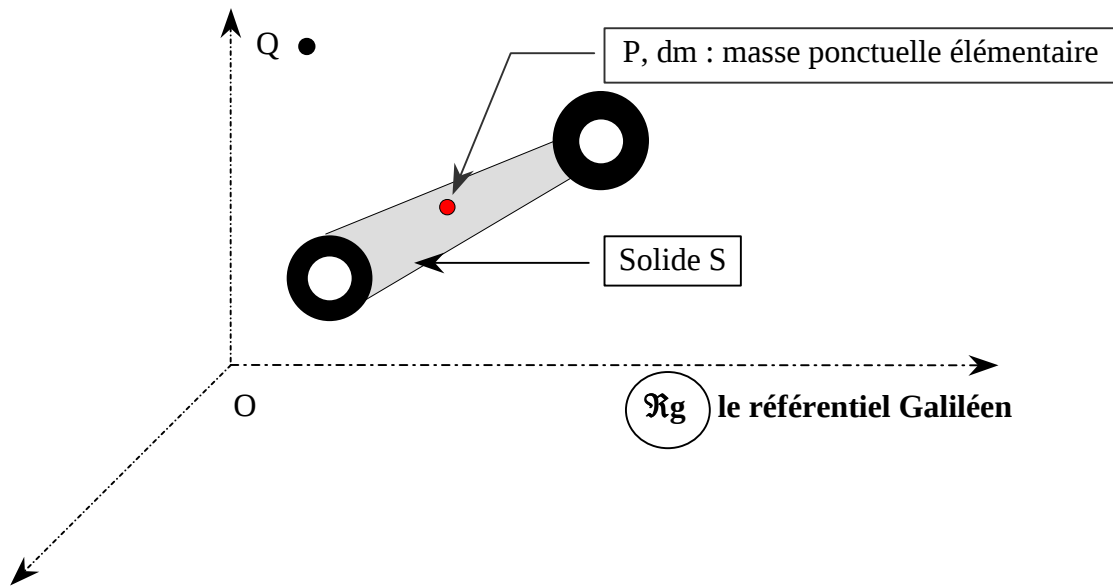
En effectuant la somme Eq a + Eq b - Eq c nous obtenons :

LA LOI DE L'ACTION ET DE LA REACTION

$$\Sigma \vec{F}_{P_2 \rightarrow P_1} + \Sigma \vec{F}_{P_1 \rightarrow P_2} = 0 \text{ ou encore } \Sigma \vec{F}_{P_2 \rightarrow P_1} = - \Sigma \vec{F}_{P_1 \rightarrow P_2}$$

III.2 Principe Fondamental de la Dynamique, cas du Solide Rigide

III.2.i Justification en appliquant le PFD à tous les points



Si l'on isole par l'esprit un élément de volume dv du solide S possédant une masse ponctuelle dm centré au point P , il est raisonnable de considérer cet élément de matière comme un point si peu que l'on est pris soin de choisir dv suffisamment petit. Le mouvement de cet élément de matière qu'il soit à l'intérieur d'un solide ou indépendant est toujours régi par le Principe Fondamental de la Dynamique.

$$\sum_{\text{types}} \vec{f}_{\text{extérieur} \rightarrow P} dm(P) = \vec{\gamma}(P \in S/\mathcal{R}_g) dm(P), \forall \text{ le point } P \text{ du solide.}$$

Dans cette expression, la force $\vec{f}$ est exprimée par unité de masse pour des raisons de facilité de calcul (voir la suite). La sommation porte sur tous les types d'efforts qui agissent sur cet élément de volume : magnétique, attraction gravitationnelle, contact, cohésion de la matière par exemple). Le vecteur $\vec{\gamma}$ est le vecteur d'accélération du point $P \in S$. A chaque point P du solide nous avons cette égalité vectorielle qui projetée sur les trois axes d'une base associée au référentiel $\mathcal{R}_g$ conduit à trois égalités scalaires. Pour représenter le mouvement d'un solide nous avons une infinité d'équation (Le PFD en chaque point) ce qui n'est pas très facile à "manipuler mathématiquement". Il est donc nécessaire de présenter le PFD sous une forme mieux appropriée. Pour atteindre cet objectif nous allons sommer en chaque point l'égalité précédente :

$$\sum_{P_i} \sum_{\text{types}} \vec{f}_{\text{extérieur} \rightarrow P_i \rightarrow P_i} dm(P_i) = \sum_{P_i} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

et l'égalité des moments développés par les champs de force et d'accélération calculés en un point QUELCONQUE Q :

$$\sum_{P_i} \sum_{\text{types}} \vec{QP}_i \wedge \vec{f}_{\text{extérieur} \rightarrow P_i \rightarrow P_i} dm(P_i) = \sum_{P_i} \vec{QP}_i \wedge \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

Les quantités de gauche peuvent se simplifier en faisant remarquer que pour chaque point P_i considéré, les forces de l'extérieur au point P_i agissant sur le point P_i ont deux origines distinctes :

- les forces de l'extérieur du solide (noté $\vec{S}$) agissant sur le point P_i
- les forces des points (autre que P_i) du solide (noté $P_j \rightarrow P_i$) agissant sur le point P_i que l'on appelle les forces de liaison interne qui ont pour origine physique les **liaisons** qui existent entre les atomes de la matière.

Si l'on somme toutes les forces de liaison interne en tous les points P_i du solide, la résultante est nulle du fait de la loi de l'action et de la réaction :

$$\sum_{P_i} \sum_{P_j \neq P_i} \vec{f}_{P_j \rightarrow P_i} dm(P_i) = \vec{0}$$

Il en est de même pour la composante de moment :

$$\sum_{P_i} \sum_{P_j \neq P_i} \vec{QP}_i \wedge \vec{f}_{P_j \rightarrow P_i} dm(P_i) = \vec{0}$$

Comme le milieu est continu, les sommations peuvent être remplacées par des intégrales (Riemann) sur le solide si l'on fait tendre $dV \rightarrow 0$ où $dm = \rho dV$ et ρ la masse volumique. En prenant en compte la relation précédente nous obtenons les deux égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types}} \vec{f}_{\vec{S} \rightarrow P_i} dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \\ \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types}} \vec{QP}_i \wedge \vec{f}_{\vec{S} \rightarrow P_i} dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \end{array} \right.$$

L'avantage d'exprimer le Principe Fondamental de la Dynamique sous cette forme est multiple :

- Comme nous l'avons signalé précédemment le Principe Fondamental de la Dynamique s'applique sur chaque point du solide. D'un point de vue mathématique il est impossible décrire toutes les équations qui régissent le mouvement de chaque particule. En revanche avec l'écriture proposée ci dessus le mouvement est régi par deux égalités portant sur des grandeurs globales (intégrales de volume) et non des grandeurs locales (chaque point).
- Ces deux égalités sont issues de l'égalité entre deux torseurs. Effectivement pour tout champ vectoriel défini sur le solide :

$$\forall \vec{h} \in P \rightarrow \vec{h}(P), \text{ on peut construire un torseur : } \{H\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \iiint_{\text{solide}} \vec{h}(P) dm(P) \\ \vec{M}_Q = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP} \wedge \vec{h}(P) dm(P) \end{array} \right.$$

Pour démontrer que $\{H\}_Q$ est un torseur il suffit de montrer que :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_A = \iiint_{\text{solide}} \vec{AP} \wedge \vec{h}(P) dm(P) = \iiint_{\text{solide}} (\vec{AB} + \vec{BP}) \wedge \vec{h}(P) dm(P)$$

$$\vec{M}_A = \iiint_{\text{solide}} (\vec{AB} \wedge \vec{h}(P)) + (\vec{BP} \wedge \vec{h}(P)) dm(P)$$

$$\vec{M}_A = \iiint_{\text{solide}} \vec{AB} \wedge \vec{h}(P) dm(P) + \iiint_{\text{solide}} \vec{BP} \wedge \vec{h}(P) dm(P), \text{ comme } \vec{AB} \text{ est constant par rapport au}$$

domaine d'intégration :

$$\vec{M}_A = \iiint_{\text{solide}} \vec{BP} \wedge \vec{h}(P) dm(P) + \vec{AB} \wedge \iiint_{\text{solide}} \vec{h}(P) dm(P)$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}$$

- La sommation des efforts extérieurs s'appliquant sur chaque point de la matière peut se simplifier en utilisant la loi de l'action et de la réaction sur chacun des points P_i de la sommation. Les seuls efforts pris en considération sont les efforts du milieu extérieur au solide (noté $\bar{S}$) agissant sur les points P_i du solide

Remarque :

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à un SOLIDE peut s'écrire sous la forme d'une égalité de deux torseurs. Toutefois pour pouvoir effectuer ce passage, il faut supposer que les champs d'effort et d'accélération soient intégrables au sens de Riemann, mais on peut élargir cette restriction.

III.2.ii Énoncé du PFD , cas du solide rigide

PRINCIPE FONDAMENTAL de la DYNAMIQUE (PFD) – Cas des solides rigides

Le Torseur résultant en un point Q quelconque des forces de l'extérieur (au solide) agissant sur le solide est égal au Torseur dynamique en Q du solide S en mouvement par rapport au repère Galiléen $\mathcal{R}_g$:

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q = \{D(S/\mathcal{R}_g)\}_Q$$

- Le torseur résultant des efforts de l'extérieur du solide S agissant sur le solide S est défini

$$\text{formellement par : } \{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q = \begin{cases} \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types d'effort}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} dm(P_i) \\ \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types d'effort}} \vec{QP}_i \wedge \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} dm(P_i) \end{cases}$$

que l'on écrit de manière plus courante : $\{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q = \begin{cases} \vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} \\ \vec{M}(Q, \bar{S} \rightarrow S) \end{cases}$ où les composantes sont la résultante et le moment au point Q des efforts de l'extérieur à S agissant sur S.

- Le torseur dynamique du solide S en mouvement par rapport au repère Galiléen est défini par :

$$\{D(S/\mathcal{R}_g)\}_Q = \begin{cases} \iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \\ \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \end{cases}$$

où le terme $\iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$ est appelé résultante dynamique du solide S en mouvement

dans le référentiel Galiléen $\mathcal{R}_g$, et le terme $\iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$ est appelé le moment dynamique du solide S en mouvement par rapport au repère Galiléen $\mathcal{R}_g$, écrit au point Q que l'on note $\vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_g)$.

L'égalité entre les deux torseurs dynamique et des efforts résultants appliqués sur le solide S, nous conduit naturellement au deux théorèmes suivants :

THEOREME de la RESULTANTE

La résultante des efforts de l'extérieur agissant sur S est égale à la résultante dynamique du mouvement du solide S dans le repère Galiléen $\mathcal{R}_g$.

$$\iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types}} \vec{f}_{\vec{s} \rightarrow P_i} dm(P_i) = \vec{R}_{\vec{s} \rightarrow S}$$

THEOREME du MOMENT en Q

Le moment des efforts de l'extérieur agissants sur S est égal au moment dynamique du mouvement du solide S dans le repère Galiléen $\mathcal{R}_g$ exprimés au même point.

$$\vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types}} \vec{QP}_i \wedge \vec{f}_{\vec{s} \rightarrow P_i} dm(P_i) = \vec{M}(Q, \vec{s} \rightarrow S)$$

III.2.iii Discussion sur le torseur des efforts résultants

Remarque : la présentation du torseur des efforts extérieurs est très formelle. De manière plus simple, on exprime pour tous les types d'effort le torseur résultant au point Q et l'on somme ces torseurs pour obtenir le torseur résultant.

Par exemple :

- une force ponctuelle $\vec{F}$ appliquée en un point A :

$$\{F(\vec{F} \rightarrow S)\}_Q = \begin{cases} \vec{R}_{\vec{F} \rightarrow S} = \vec{F} \\ \vec{M}(Q, \vec{F} \rightarrow S) = \vec{QA} \wedge \vec{F} \end{cases}$$

- une pression constante p appliquée sur une surface plane ∂S de normale $\vec{n}$:

$$\{F(\vec{p} \rightarrow S)\}_Q = \begin{cases} \vec{R}_{\vec{p} \rightarrow S} = p S \vec{n} \\ \vec{M}(Q, \vec{p} \rightarrow S) = \vec{QG}_{\partial S} \wedge p S \vec{n} \end{cases}$$

où $G_{\partial S}$ est le centre géométrique de la surface ∂S plane.

- la pesanteur appliquée au solide S de masse m :

$$\{F(\vec{g} \rightarrow S)\}_Q = \begin{cases} \vec{R}_{\vec{g} \rightarrow S} = m \vec{g} \\ \vec{M}(Q, \vec{g} \rightarrow S) = \vec{QG}_g \wedge m \vec{g} \end{cases}$$

où G_g est le centre de gravité du solide S.

Exercice : en déduire la définition du centre d'inertie, on notera ρ la masse volumique.

III.2.iv Calcul du torseur dynamique ; torseur cinétique

III.2.iv.a Résultante dynamique

La résultante dynamique du mouvement de S dans le référentiel $\mathcal{R}_g$ définie par : $\iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$ peut être exprimée autrement en faisant appel à la notion de centre d'inertie :

Définition du centre d'inertie:

Le centre d'inertie du solide S de masse m_S est le point noté G_S défini par la relation :

$$m_S \vec{QG}_S = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i dm(P_i)$$

où Q est un point quelconque. Par souci de simplicité on choisit $Q \equiv O$ (l'observateur).

Si l'on dérive par rapport au temps cette égalité nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} [m_S \vec{OG}_S]_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\text{solide}} \vec{OP}_i dm(P_i) \right]_{\mathcal{R}_g}$$

Comme **la frontière du solide ne se déforme pas au cours du temps** (solide rigide) il est permis d'échanger les opérateurs dérivée et intégrale, ce qui conduit à :

$$m_S \frac{d}{dt} [\vec{OG}_S]_{\mathcal{R}_g} = \iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} [\vec{OP}_i]_{\mathcal{R}_g} dm(P_i)$$

ou encore écrit autrement :

$$m_S \vec{V}(G_S \in S/\mathcal{R}_g) = m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

Comme G_S est le centre d'inertie qui est un point appartenant au solide nous oublierons pour ce point UNIQUEMENT l'écriture $G_S \in S$. Si l'on dérive une seconde fois cette expression nous obtenons :

$$m_S \frac{d}{dt} [\vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g)]_{\mathcal{R}_g} = \iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} [\vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g)]_{\mathcal{R}_g} dm(P_i)$$

ou encore écrit autrement :

$$m_S \vec{\Gamma}(G_S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

Finalement nous avons démontré que la résultante dynamique est égale à :

$$m_S \vec{\Gamma}(G_S/\mathcal{R}_g)$$

III.2.iv.b Moment dynamique

Rappelons l'expression du moment dynamique écrit en un point Q :

$$\vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

$$\vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \frac{d}{dt} [\vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g)]_{\mathcal{R}_g} dm(P_i)$$

Cette expression peut se transformer de la manière suivante :

$$\vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} \left[\vec{QP}_i \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right]_{\mathcal{R}_g} dm(P_i) - \iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} \left[\vec{QP}_i \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

puisque

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{QP}_i \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right]_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt} \left[\vec{QP}_i \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{QP}_i \wedge \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right]_{\mathcal{R}_g}$$

En remarquant que la solide ne se déforme pas, nous obtenons :

$$\vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \right] - \iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} \left[\vec{QP}_i \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

On appelle Moment Cinétique du solide S en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$ le terme :

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

que l'on note généralement $\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g)$. Du fait de sa structure on remarque que ce champ de vecteur est un champ de moment de torseur appelé torseur cinétique noté $\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g)\}_Q$:

$$\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R}_g)\}_Q = \begin{cases} \iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \\ \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \end{cases}$$

Remarquons que la résultante du torseur cinétique n'est rien d'autre que : $m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g)$
Transformation de l'intégrale :

$$\iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} \left[\vec{QP}_i \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

Nous pouvons écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} \left[\vec{QP}_i \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \\ &= \iiint_{\text{solide}} \left[-\vec{V}(Q/\mathcal{R}_g) + \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right] \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \\ &= \iiint_{\text{solide}} \left[-\vec{V}(Q/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right] dm(P_i) + \left[\vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right] dm(P_i) \end{aligned}$$

Comme le second terme est nul nous obtenons :

$$= \iiint_{\text{solide}} \left[-\vec{V}(Q/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right] dm(P_i)$$

Comme la vitesse du point Q est indépendante de la position du point courant P_i dans le solide on peut aussi sortir ce terme de l'intégrale :

$$= -\vec{V}(Q/\mathcal{R}_g) \wedge \iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

On reconnaît le terme: $m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$ que nous avons défini précédemment.

Finalement il en résulte la relation suivante :



$$\iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} [\vec{QP}_i]_{\mathcal{R}g} \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}g) dm(P_i) = - \vec{V}(Q/\mathcal{R}g) \wedge m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}g)$$

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}g) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}g)]_{\mathcal{R}g} + \vec{V}(Q/\mathcal{R}g) \wedge m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}g)$$

Finalement nous pouvons proposer une relation permettant de calculer le moment dynamique à partir du moment cinétique du mouvement du solide S par rapport à $\mathcal{R}g$:

III.2.iv.c Moment cinétique

Nous avons montré précédemment que le moment dynamique peut être calculé à partir du moment cinétique dont la définition est :

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}g) dm(P_i)$$

Pour calculer ce terme, on transforme cette intégrale en utilisant un point particulier **A du solide** et la formule de changement de point à chaque point P_i :

$$\begin{aligned} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}g) &= \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}g) - \vec{A}_S P_i \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g) \\ \vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}g) &= \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}g) dm(P_i) - \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i \wedge (\vec{A}_S P_i \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g)) dm(P_i) \end{aligned}$$

Comme $\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}g)$ est constante par rapport aux variables d'intégration et en décomposant le vecteur

$\vec{QP}_i = \vec{QA}_S + \vec{A}_S P_i$ nous obtenons :

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}g) = \iiint_{\text{solide}} \vec{QP}_i dm(P_i) \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}g) - \iiint_{\text{solide}} [\vec{QA}_S + \vec{A}_S P_i] \wedge (\vec{A}_S P_i \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g)) dm(P_i)$$

La première intégrale n'est rien d'autre que la définition du centre d'inertie. En distribuant le produit vectoriel dans la seconde intégrale, et sortant de l'intégrale les termes indépendants des variables d'intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}g) &= m_S \vec{QG}_S \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}g) - \vec{QA}_S \wedge \iiint_{\text{solide}} \vec{A}_S P_i dm(P_i) \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g) \\ &\quad - \iiint_{\text{solide}} \vec{A}_S P_i \wedge (\vec{A}_S P_i \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g)) dm(P_i) \end{aligned}$$

Vous montrerez facilement que $\iiint_{\text{solide}} \vec{A}_S P_i dm(P_i) = m_S \vec{A}_S G_S$

La dernière intégrale peut être écrite sous la forme d'un opérateur qui au vecteur vitesse de rotation du solide S en mouvement par rapport à $\mathcal{R}g$ fait correspondre le vecteur :

$$\begin{aligned} & - \iiint_{\text{solide}} \vec{A}_S P_i \wedge (\vec{A}_S P_i \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g)) dm(P_i) \\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g) & \longrightarrow - \iiint_{\text{solide}} \vec{A}_S P_i \wedge \vec{A}_S P_i \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}g) dm(P_i) \end{aligned}$$

Cette opérateur est appelé OPÉRATEUR D'INERTIE défini au point A_S noté $\langle \mathbf{J}_{A_S}(S) \rangle(.)$. Si on construit une base ORTHONORMÉE $\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, il correspond à cet opérateur une matrice appelée MATRICE

D'INERTIE $[\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$ telle que la transformée du vecteur soit égale au produit de la matrice avec le vecteur vitesse de rotation :

$$- \iiint_{\text{solide}} \vec{A}_S \vec{P}_i \wedge (\vec{A}_S \vec{P}_i \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)) \, dm(P_i) = \langle \mathbf{J}_{A_S}(S) \rangle (\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)) = [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)$$

Dans la suite nous détaillerons l'opérateur d'inertie et nous présenterons comment calculer la matrice d'inertie pour un solide. Mais avant cela nous pouvons déjà conclure sur la manière de calculer $\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g)$ en proposant la relation GÉNÉRALE suivante qui est la somme de trois termes :

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g) = m_S \vec{Q} \vec{G}_S \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}_g) - m_S \vec{Q} \vec{A}_S \wedge (\vec{A}_S \vec{G}_S \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)) + [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)$$

Au final, si l'on construit la matrice d'inertie, il est possible de calculer simplement (pas d'intégrale, juste des calculs de vitesses d'accélération avec quelques produits vectoriels.

➤ En résumé :

En appliquant le Principe Fondamental à chaque point du solide :

$$\sum \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} = m(P) \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R})$$

par intégration nous obtenons une égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts résultants appliqués sur le solide S par l'extérieur (à S):

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q = \{D(S/\mathcal{R}_g)\}_Q$$

avec le torseur des efforts résultants appliqués sur le solide par l'extérieur:

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q = \begin{cases} \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types d'effort}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} \, dm(P_i) \\ \iiint_{\text{solide}} \sum_{\text{types d'effort}} \vec{Q} \vec{P}_i \wedge \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} \, dm(P_i) \end{cases} = \begin{cases} \vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} \\ \vec{M}(Q, \bar{S} \rightarrow S) \end{cases}$$

$$\text{et le torseur dynamique } \{D(S/\mathcal{R}_g)\}_Q = \begin{cases} \iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \, dm(P_i) \\ \iiint_{\text{solide}} \vec{Q} \vec{P}_i \wedge \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \, dm(P_i) \end{cases}$$

Les composantes du torseur dynamique sont égales à :

$$\{D(S/\mathcal{R}_g)\}_Q = \begin{cases} m_S \vec{\Gamma}(G_S/\mathcal{R}_g) \\ \vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g)]_{\mathcal{R}_g} - \vec{V}(Q/\mathcal{R}_g) \wedge m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g) \end{cases}$$

Pour déterminer ce torseur nous avons besoin du torseur cinétique :

$$\{C(S/\mathcal{R}_g)\}_Q = \begin{cases} \iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \, dm(P_i) \\ \iiint_{\text{solide}} \vec{Q} \vec{P}_i \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \, dm(P_i) \end{cases}$$

Les composantes du torseur dynamique sont égales à :

$$\{\mathcal{C}(S/\mathcal{Rg})\}_Q = \begin{cases} m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{Rg}) \\ \vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{Rg}) = m_S \vec{QG}_S \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{Rg}) - m_S \vec{QA}_S \wedge (\vec{A}_S \vec{G}_S \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})) \\ + [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg}) \end{cases}$$

➤ Quelques identités à CONNAITRE pour calculer σ et δ :

Moment dynamique

$$\text{Si } Q \equiv G_S \text{ alors } \vec{\delta}(G_S, S/\mathcal{Rg}) = \frac{d}{dt} \left[\vec{\sigma}(G_S, S/\mathcal{Rg}) \right]_{\mathcal{Rg}}$$

$$\text{Si } Q \text{ est un point géométrique fixe : } \vec{V}(Q/\mathcal{Rg}) = \vec{0} \text{ alors } \vec{\delta}(Q, S/\mathcal{Rg}) = \frac{d}{dt} \left[\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{Rg}) \right]_{\mathcal{Rg}}$$

De plus il ne **FAUT PAS OUBLIER** que le moment dynamique est un champ de moment de torseur c'est à dire qu'en deux points différents les moments dynamiques sont reliés par la relation suivante :

$$\vec{\delta}(P, S/\mathcal{Rg}) = \vec{\delta}(Q, S/\mathcal{Rg}) + \vec{PQ} \wedge m_S \vec{\Gamma}(G_S/\mathcal{Rg})$$

Ce sont exclusivement ces trois relations dans le cas du solide que l'on utilise pour calculer le moment dynamique.

Moment cinétique

Pour calculer le moment cinétique nous avons la relation :

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{Rg}) = m_S \vec{QG}_S \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{Rg}) - m_S \vec{QA}_S \wedge (\vec{A}_S \vec{G}_S \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})) + [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})$$

ou bien écrit légèrement différemment :

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{Rg}) = m_S \vec{QG}_S \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{Rg}) + m_S \vec{QA}_S \wedge (\vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg}) \wedge \vec{A}_S \vec{G}_S) + [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})$$

o Quelques cas particuliers à connaître :

Si $Q \equiv A \in S$ (noté A_S)

$$\vec{\sigma}(A_S, S/\mathcal{Rg}) = m_S \vec{A}_S \vec{G}_S \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{Rg}) + [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})$$

Si $A \in S$ (noté A_S) $\equiv G_S$

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{Rg}) = m_S \vec{QG}_S \wedge \vec{V}(G_S/\mathcal{Rg}) + [\mathbf{I}(S)]_{\{G_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})$$

Si $Q \equiv A \in S$ (noté A_S) $\equiv G_S$

$$\vec{\sigma}(G_S, S/\mathcal{Rg}) = [\mathbf{I}(S)]_{\{G_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})$$

Si $Q \equiv A \in S$ (noté A_S) et A_S est un point fixe dans $\mathcal{Rg}$

$$\vec{\sigma}(A_S, S/\mathcal{Rg}) = [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg})$$

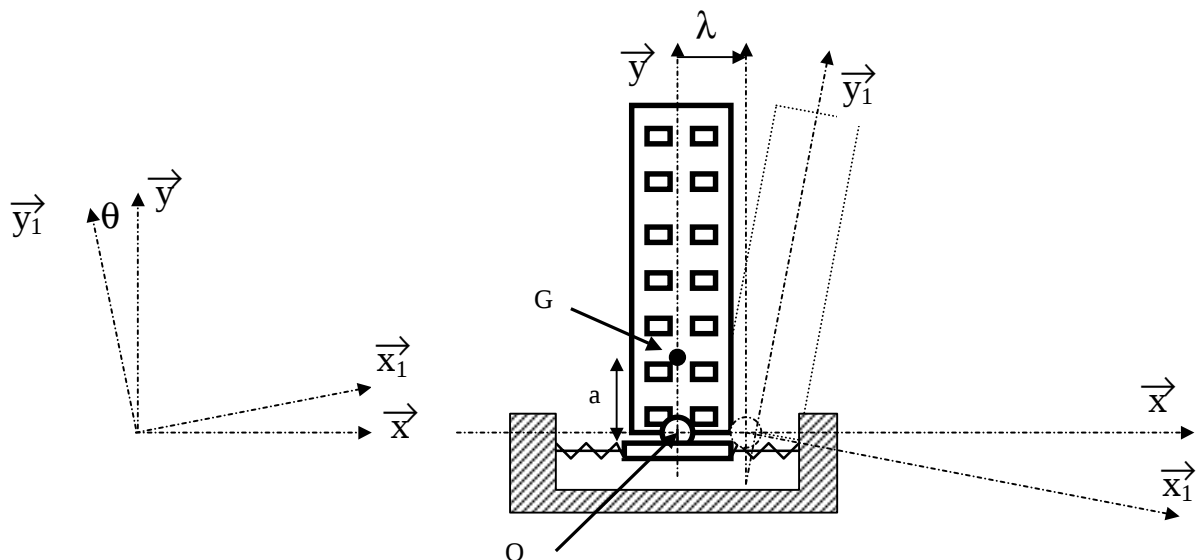
Il ne faut pas oublier que le moment cinétique est un champ de moment de torseur c'est à dire qu'en deux points différents les moments cinétiques sont reliés par la relation suivante :

$$\vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_g) = \vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g) + \vec{PQ} \wedge m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g)$$

Ce sont presque exclusivement ces dernières relations dans le cas du solide que l'on utilise pour déterminer le moment cinétique.

III.2.v Exemple d'utilisation du PFD

On veut connaître le mouvement d'un bâtiment d'habitation lors d'un séisme. On se réduit au mouvement dans un plan $\{O, \vec{x}, \vec{y}\}$. La liaison entre le sol et les fondations est modélisée par une liaison pivot parfaite (d'axe $\vec{z}$ orthogonal au plan d'étude et de centre O) associé à une liaison glissière parfaite. Les forces d'interaction entre le sol et les fondations sont représentées par des ressorts : un en tension-compression de raideur k et l'autre en torsion de raideur c. Ces ressorts traduisent l'élasticité du sol.



La position de l'immeuble est repéré par deux variables qui dépendent du temps λ : le déplacement horizontal de l'immeuble et θ l'angle entre $\vec{y}$ et $\vec{y}_1$. La masse de l'immeuble est notée m. Le centre d'inertie est située à une hauteur h de la liaison pivot. La matrice d'inertie se présente sous la forme :

$$[\mathbf{I}(S)]_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = [\mathbf{I}(S)]_{\{O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'accélération de pesanteur est dirigé suivant les $\vec{y}$ négatifs.

Les équations d'équilibre sont obtenues grâce au PFD appliqué à l'immeuble. On procède de la façon suivante :

- Recenser les efforts extérieurs et exprimer le torseur associé :
- Calculer le torseur dynamique :
- Appliquer le PFD judicieusement en fonction de ce que l'on souhaite obtenir.

III.2.vi Application du PFD à un SYSTÈME de Solides

Si nous sommes en présence d'un système de solides S_i avec $i=1,n$, pour chacun d'entre eux le Principe Fondamental de la Dynamique est vérifié :

$$\{F(\bar{S}_i \rightarrow S_i)\}_Q = \{D(S_i/\mathcal{R}_g)\}_Q$$

Remarquons que le torseur des efforts extérieurs à S_i se décompose en deux parties. Les efforts de l'extérieur au système Σ comprenant tous les solides ($\Sigma \equiv \cup S_i$) et les efforts entre les différents solides appelés inter efforts.

$$\{F(\bar{S}_i \rightarrow S_i)\}_Q = \{F(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i)\}_Q + \{F(S_{j(j \neq i)} \rightarrow S_i)\}_Q$$

En appliquant le Théorème de l'Action et de la Réaction on obtient la relation suivante :

$$\{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q = - \{F(S_i \rightarrow S_j)\}_Q \quad \forall (j \neq i)$$

En sommant toutes les égalités établies pour chaque solide et en utilisant la propriété précédente de l'Action et de la Réaction :

$$\{F(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i)\}_Q = \{D(S_1/\mathcal{R}_g)\}_Q + \{D(S_2/\mathcal{R}_g)\}_Q + \dots + \{D(S_n/\mathcal{R}_g)\}_Q$$

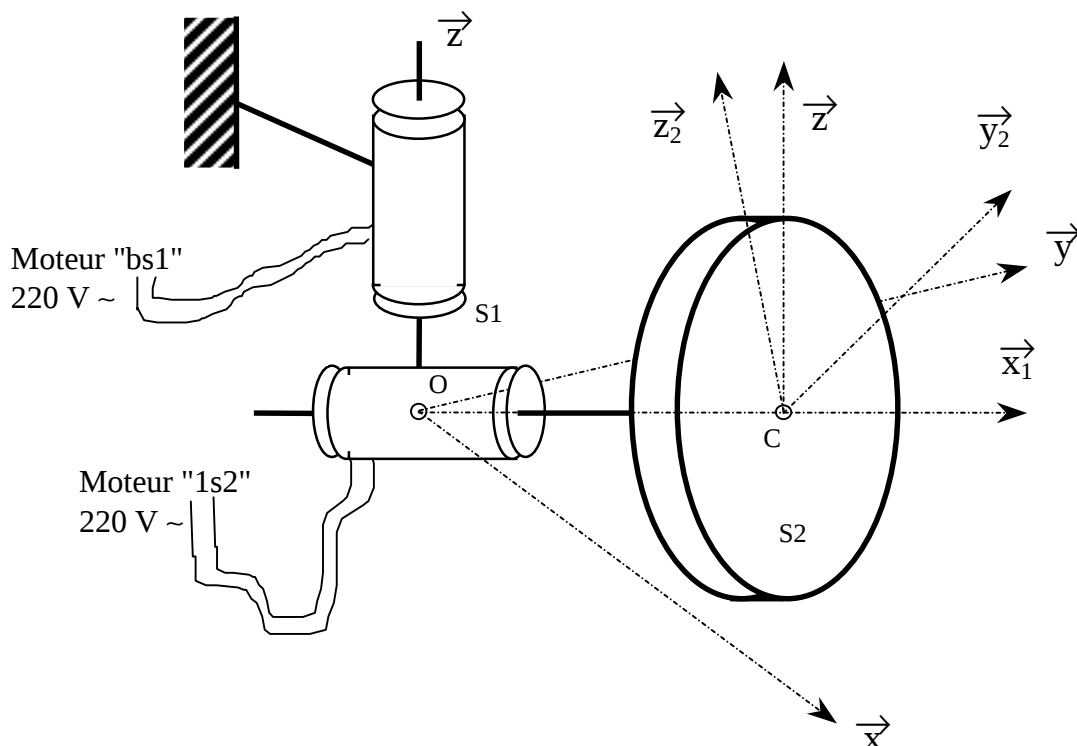
où l'on note

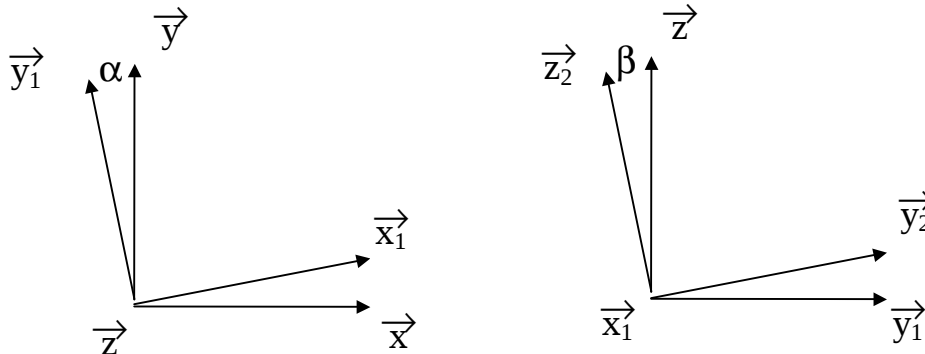
$$\{D(\Sigma/\mathcal{R}_g)\}_Q = \{D(S_1/\mathcal{R}_g)\}_Q + \{D(S_2/\mathcal{R}_g)\}_Q + \dots + \{D(S_n/\mathcal{R}_g)\}_Q$$

le torseur dynamique du système Σ constitué des n solides S_i .

III.2.vii Un exemple :

Equilibreuse de véhicule :





$\mathcal{R}_g$: repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

S_1 : repère $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}_g$ suivant l'axe $(0, \vec{z})$

S_2 : repère $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en rotation par rapport à S_1 suivant l'axe $(0, \vec{x}_1)$

III.2.viii Géométrie des masses - matrice d'inertie

III.2.viii.a Opérateur d'inertie et matrice d'inertie

Les propriétés de l'opérateur d'inertie $\langle \mathbf{J}_{\mathbf{A}\mathbf{S}}(\mathbf{S}) \rangle(\cdot)$ sont la linéarité et la symétrie :

➤ Linéarité :

$\forall$ les scalaires λ et μ et quelque soit les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ nous avons la relation :

$$\langle \mathbf{J}_{\mathbf{A}\mathbf{S}}(\mathbf{S}) \rangle(\lambda \vec{U} + \mu \vec{V}) = \lambda \langle \mathbf{J}_{\mathbf{A}\mathbf{S}}(\mathbf{S}) \rangle(\vec{U}) + \mu \langle \mathbf{J}_{\mathbf{A}\mathbf{S}}(\mathbf{S}) \rangle(\vec{V})$$

➤ Symétrie : $\vec{V} \langle \mathbf{J}_{\mathbf{A}\mathbf{S}}(\mathbf{S}) \rangle(\vec{U}) = \vec{U} \langle \mathbf{J}_{\mathbf{A}\mathbf{S}}(\mathbf{S}) \rangle(\vec{V})$

Cet opérateur est une application linéaire :

$$\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J}_{\mathbf{A}\mathbf{S}}(\mathbf{S}) \rangle(\vec{U}) = - \iiint_{\text{solide}} \vec{A}_S \mathbf{P}_i \wedge (\vec{A}_S \mathbf{P}_i \wedge \vec{U}) \, dm(\mathbf{P}_i)$$

Cette application est issue d'une application linéaire plus simple :

$$\vec{U} \rightarrow \langle \vec{A}_S \mathbf{P} \wedge \rangle(\vec{U}) = \vec{A}_S \mathbf{P} \wedge \vec{U}$$

Dans une base orthonormée $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, cette application linéaire est représentée par une matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} \text{ où } X, Y, Z \text{ sont les coordonnées de } \vec{A}_S \mathbf{P} \text{ dans la base } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$$

En composant cette application avec elle-même nous obtenons une seconde application linéaire :

$$\vec{U} \rightarrow \langle \vec{A}_S \mathbf{P} \wedge \vec{A}_S \mathbf{P} \wedge \rangle(\vec{U}) = \vec{A}_S \mathbf{P} \wedge \vec{A}_S \mathbf{P} \wedge \vec{U}$$

dont la matrice associée est le produit de la précédente avec elle-même :

$$\begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y^2-Z^2 & XY & XZ \\ XY & -X^2-Z^2 & YZ \\ XZ & YZ & -X^2-Y^2 \end{bmatrix}$$

Finalement il en est déduit l'application linéaire:

$$\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J}_{As}(S) \rangle (\vec{U}) = - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S P_i} \wedge (\vec{A_S P_i} \wedge \vec{U}) \, dm(P_i) \text{ (qui n'est définie que pour les solides indéformable).}$$

Dans la base orthonormée $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ la matrice associée à l'opérateur

$\langle \mathbf{J}_{As}(S) \rangle (\cdot)$ est appelée matrice d'inertie notée : $[\mathbf{I}(S)]_{\{As, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$.

Par conséquent $\langle \mathbf{J}_{As}(S) \rangle (\vec{U}) = [\mathbf{I}(S)]_{\{As, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{U}$. Le sigle $\cdot$ représente le produit de la matrice avec le vecteur. Remarquons que **le vecteur doit être exprimé dans la base $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ ou dit autrement la même base où l'on a exprimé la matrice d'inertie**. La matrice d'inertie en A_S du solide S exprimée dans la base $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ se présente sous la forme :

$$[\mathbf{I}(S)]_{\{As, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} \iiint_{\text{solide}} Y^2 + Z^2 \, dm(P_i) & - \iiint_{\text{solide}} XY \, dm(P_i) & - \iiint_{\text{solide}} XZ \, dm(P_i) \\ - \iiint_{\text{solide}} XY \, dm(P_i) & \iiint_{\text{solide}} X^2 + Z^2 \, dm(P_i) & - \iiint_{\text{solide}} YZ \, dm(P_i) \\ - \iiint_{\text{solide}} XZ \, dm(P_i) & - \iiint_{\text{solide}} YZ \, dm(P_i) & \iiint_{\text{solide}} X^2 + Y^2 \, dm(P_i) \end{bmatrix}$$

où X, Y, Z sont les coordonnées du point P_i dans le repère $\{As, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$. Cette matrice est couramment notée :

$$[\mathbf{I}(S)]_{\{As, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Si la base est constituée des vecteurs, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ alors les termes de la matrice s'appellent :

A : moment d'inertie par rapport à l'axe $(As, \vec{x})$

B : moment d'inertie par rapport à l'axe $(As, \vec{y})$

C : moment d'inertie par rapport à l'axe $(As, \vec{z})$

D : produit d'inertie par rapport au plan $(As, \vec{y}, \vec{z})$

E : produit d'inertie par rapport au plan $(As, \vec{x}, \vec{z})$

F : produit d'inertie par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$

III.2.viii.b Changement de point d'une matrice d'inertie

La relation qui existe entre les opérateurs exprimés en un point quelconque et le centre d'inertie s'établit simplement à partir de la définition de l'opérateur :

$$\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J}_{As}(S) \rangle (\vec{U}) = - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S P_i} \wedge (\vec{A_S P_i} \wedge \vec{U}) \, dm(P_i)$$

En introduisant l'égalité vectorielle $\vec{A_S P_i} = \vec{A_S G_S} + \vec{G_S P_i}$, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) &= - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S P_i} \wedge [(\vec{A_S G_S} + \vec{G_S P_i}) \wedge \vec{U}] dm(P_i) \\ \vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) &= - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S P_i} \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) dm(P_i) + \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S P_i} \wedge (\vec{G_S P_i} \wedge \vec{U}) dm(P_i) \\ \vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) &= - \iiint_{\text{solide}} (\vec{A_S G_S} + \vec{G_S P_i}) \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) dm(P_i) \\ &\quad - \iiint_{\text{solide}} (\vec{A_S G_S} + \vec{G_S P_i}) \wedge (\vec{G_S P_i} \wedge \vec{U}) dm(P_i) \\ \vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) &= - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S G_S} \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) dm(P_i) - \iiint_{\text{solide}} \vec{G_S P_i} \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) dm(P_i) \\ &\quad - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S G_S} \wedge (\vec{G_S P_i} \wedge \vec{U}) dm(P_i) - \iiint_{\text{solide}} \vec{G_S P_i} \wedge (\vec{G_S P_i} \wedge \vec{U}) dm(P_i)\end{aligned}$$

La deuxième et la troisième intégrale sont identiques et de SIGNE opposé ; par conséquent il subsiste :

$$\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) = - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S G_S} \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) dm(P_i) - \iiint_{\text{solide}} \vec{G_S P_i} \wedge (\vec{G_S P_i} \wedge \vec{U}) dm(P_i)$$

que l'on peut encore écrire

$$\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) = - \vec{A_S G_S} \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) \iiint_{\text{solide}} dm(P_i) + \langle \mathbf{J_{G_S}}(S) \rangle(\vec{U})$$

$$\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) = - m(S) \vec{A_S G_S} \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) + \langle \mathbf{J_{G_S}}(S) \rangle(\vec{U})$$

La première quantité n'est rien d'autre que l'inertie d'une masse ponctuelle de masse $m = m(S)$ située au point particulier G_S .

Finalement la même quantité $\langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U})$ s'exprime de deux façons :

$$\begin{aligned}\vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) &= - \iiint_{\text{solide}} \vec{A_S P_i} \wedge (\vec{A_S P_i} \wedge \vec{U}) dm(P_i) \\ \vec{U} \rightarrow \langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(\vec{U}) &= - m(S) \vec{A_S G_S} \wedge (\vec{A_S G_S} \wedge \vec{U}) + \langle \mathbf{J_{G_S}}(S) \rangle(\vec{U})\end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons une relation entre les opérateurs. Elle se présente sous la forme :

$$\langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(.) = \langle \mathbf{J_{A_S}}(\{G_S, m(S)\}) \rangle(.) + \langle \mathbf{J_{G_S}}(S) \rangle(.)$$

avec :

$\langle \mathbf{J_{A_S}}(S) \rangle(.)$: l'opérateur d'inertie du solide S exprimé en A_S

$\langle \mathbf{J_{A_S}}(\{G_S, m(S)\}) \rangle(.)$: opérateur d'inertie d'une **masse $m(S)$** ponctuelle (identique à la masse du solide étudié S) **située en G_S** exprimé en A_S . On note le solide constitué de cette seule masse ponctuelle $\{G_S, m(S)\}$:

$\langle \mathbf{J_{G_S}}(S) \rangle(.)$: l'opérateur d'inertie du solide S exprimé en G_S

Évidemment il existe une relation équivalente entre les matrices d'inertie associées :

$$[\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = [\mathbf{I}(\{G_S, m(S)\})]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} + [\mathbf{I}(S)]_{\{G_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

Si l'on note le vecteur $\vec{A_S G_S} = X_{G_S} \vec{x} + Y_{G_S} \vec{y} + Z_{G_S} \vec{z}$ dans la base d'écriture commune des matrices alors :

$$[\mathbf{I}(\{G_S, m(S)\})]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = m(s) \begin{bmatrix} Y_{G_S}^2 + Z_{G_S}^2 & -X_{G_S} Y_{G_S} & -X_{G_S} Z_{G_S} \\ -X_{G_S} Y_{G_S} & X_{G_S}^2 + Z_{G_S}^2 & -Y_{G_S} Z_{G_S} \\ -X_{G_S} Z_{G_S} & -Y_{G_S} Z_{G_S} & X_{G_S}^2 + Y_{G_S}^2 \end{bmatrix}$$

Pour relier deux points différents quelconques B_S et A_S , il suffit d'appliquer deux fois la relation précédente :

$$[\mathbf{I}(S)]_{\{B_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} + [\mathbf{I}(\{G_S, m(S)\})]_{\{B_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} - [\mathbf{I}(\{G_S, m(S)\})]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

III.2.viii.c Inertie par rapport à une droite quelconque :

On connaît déjà les inerties par rapport aux axes de la base $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ et on peut remarquer par exemple

$$\text{que } A = \vec{x}^T \cdot [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{x}, B = \vec{y}^T \cdot [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{y}$$

$$\text{et } C = \vec{z}^T \cdot [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{z}. \text{ L'exposant T indique la transposée du vecteur.}$$

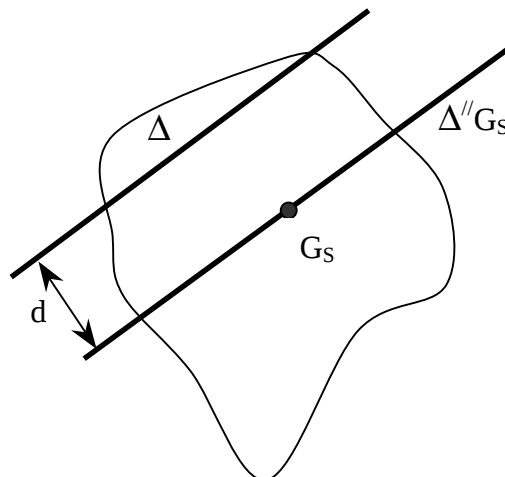
On définit l'inertie du solide S par rapport à une droite $\Delta(A_S, \vec{U})$ le scalaire:

$$I_{\Delta}(S) = \vec{U}^T \cdot [\mathbf{I}(S)]_{\{A_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{U}$$

La formule de changement de point qui relie l'inertie du solide S par rapport à la droite $\Delta(A_S, \vec{U})$ l'inertie du solide S par rapport à la droite parallèle $\Delta''(G_S)$ porte le nom de théorème de Huyghens :

$$I_{\Delta}(S) = I_{\Delta''G_S}(S) + m(S) d^2$$

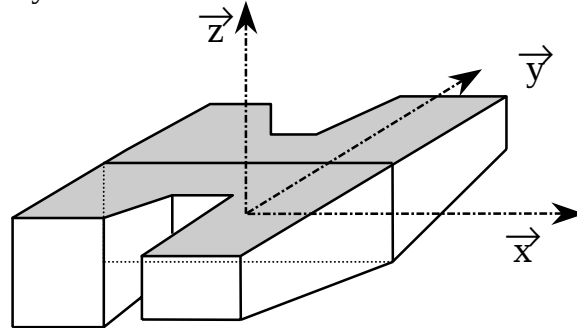
avec $I_{\Delta''G_S}$ l'inertie du solide S par rapport à la droite Δ'' à G_S et d la distance entre ces deux droites.



III.2.viii.d Quelques propriétés à connaître

- Cas d'un solide homogène ayant un plan de symétrie :

Par exemple le plan $\{\vec{z}, \vec{x}\}$



$$F = \iiint_{\text{solide}} X Y \, dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} X Y \rho \, dv = \iiint_{\text{solide}} X Y \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \iint_{\text{solide}} X \left[\int_{-\alpha(x,z)}^{\alpha(x,z)} Y \, dy \right] dx \, dz$$

$$F = \rho \iint_{\text{solide}} X \left[\frac{Y^2}{2} dy \right]_{-\alpha(x,z)}^{\alpha(x,z)} dx \, dz = 0$$

On montre de même que $D=0$. Finalement la matrice d'inertie s'écrit :

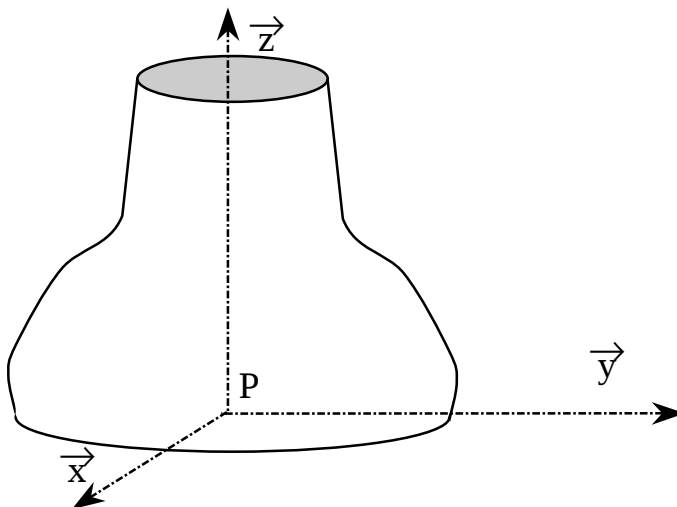
$$[\mathbf{I}(S)]_{\{A_s, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix} \text{ avec } A_s \in \text{Plan de symétrie}$$

Si le solide présente une symétrie par rapport au plan $\{\vec{z}, \vec{x}\}$: $F=0$ et $D=0$.

Si le solide présente une symétrie par rapport au plan $\{\vec{x}, \vec{y}\}$: $E=0$ et $D=0$.

Si le solide présente une symétrie par rapport au plan $\{\vec{y}, \vec{z}\}$: $E=0$ et $F=0$.

- Cas d'un solide homogène ayant un axe de révolution :

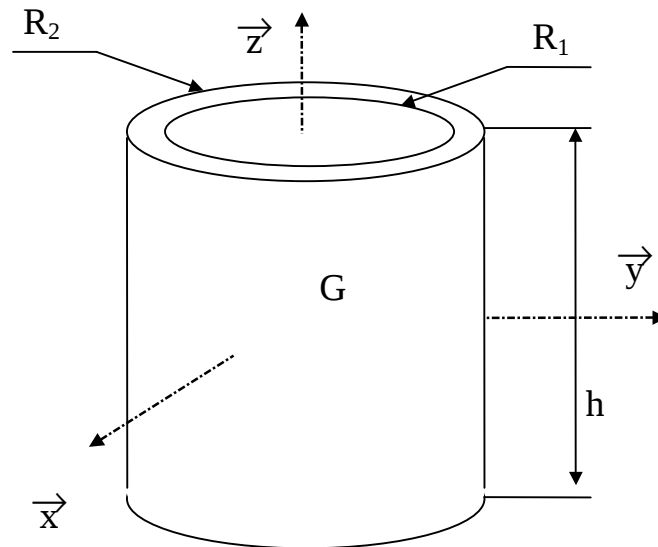


Pour tout A_s qui appartient à l'axe et pour toute base orthonormée qui contient l'axe $\vec{z}$

la matrice d'inertie possède la forme suivante :

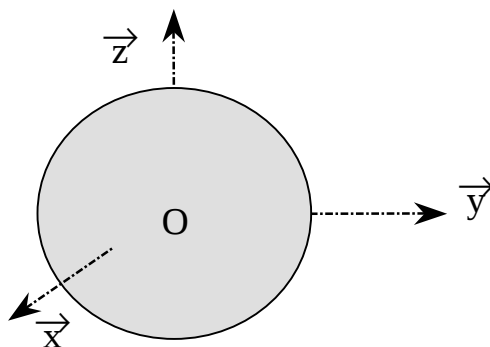
$$[\mathbf{I}(S)]_{\{A_s, -, -, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\{A_s, -, -, \vec{z}\}}$$

- Exemple le cylindre homogène de masse m:



$$[\mathbf{I}(\mathbf{S})]_{\{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{4} [R_1^2 + R_2^2 + \frac{h^2}{3}] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4} [R_1^2 + R_2^2 + \frac{h^2}{3}] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} [R_1^2 + R_2^2] \end{bmatrix}_{\{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

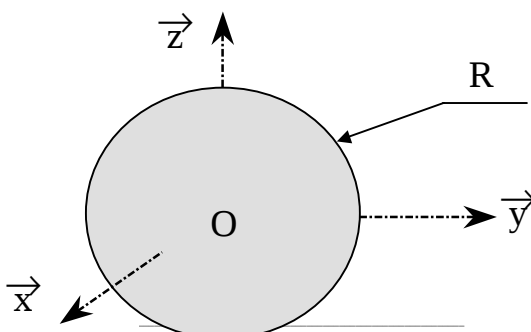
- Cas d'un solide homogène ayant un point de révolution



Au centre du solide et pour tout base orthonormée, la matrice d'inertie possède la forme suivante :

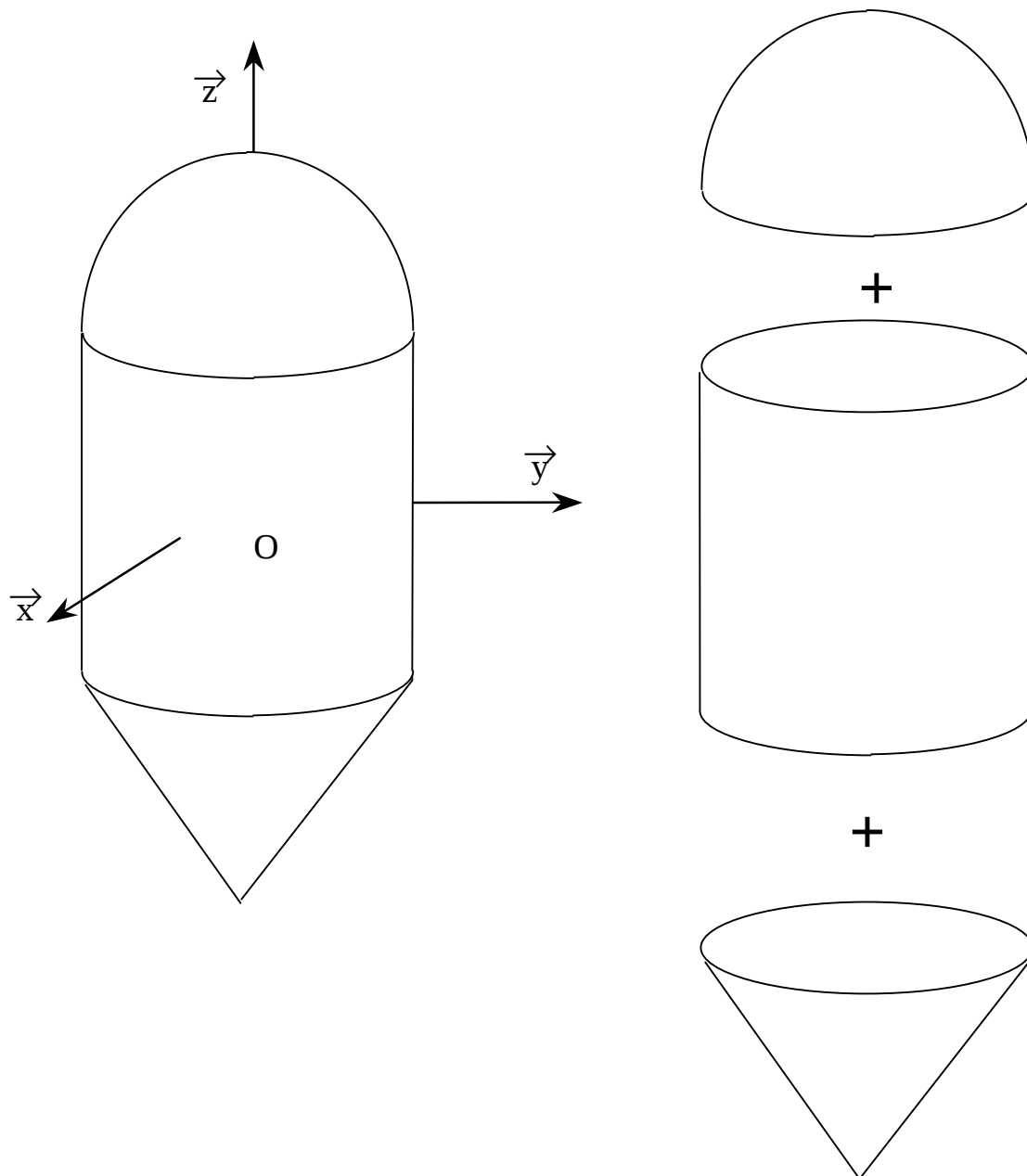
$$[\mathbf{I}(\mathbf{S})]_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

- Exemple d'une sphère pleine homogène de masse m :



$$[\mathbf{I}(\mathbf{S})]_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m R^2 \end{bmatrix}_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

- Cas d'un solide homogène constitué de formes "simples" :



$$[\mathbf{I}(\mathbf{S})]_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} = [\mathbf{I}(\text{Demi sphère})]_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} + [\mathbf{I}(\text{Cylindre})]_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} + [\mathbf{I}(\text{Cône})]_{\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

III.2.ix Liaisons et Lois de Coulomb pour un Contact Ponctuel

III.2.ix.a *Liaisons Parfaites*

Pour schématiser **simplement** les liaisons parfaites on utilise la notion de puissance des inter efforts transmises par la liaison (ou puissance dissipée par les actions de liaison).

$$P_d(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_Q \otimes \{V(S_2/S_1)\}_Q$$

Définition : Soit deux solides S_1 et S_2 reliés par une liaison cinématique, la puissance développée par les interefforts transmis par la liaison est le comoment du torseur des interactions transmises par la liaison (action de S_1 sur S_2) avec le torseur cinématique du mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 .

Remarque : On note $\otimes$ le comoment entre deux torseurs.

$$\{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_Q \otimes \{V(S_2/S_1)\}_Q = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ \vec{M}(Q, S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(Q \in S_2/S_1) \end{array} \right\}$$

et il est calculé de la manière suivante :

$$\{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_Q \otimes \{V(S_2/S_1)\}_Q = \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{V}(Q \in S_2/S_1) + \vec{M}(Q, S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{\Omega}(S_2/S_1)$$

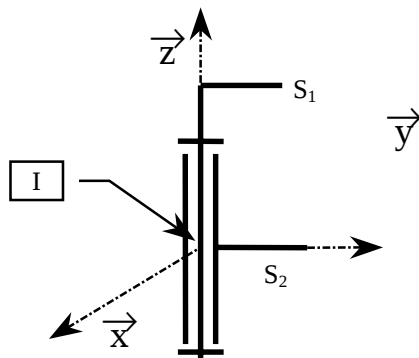
Les deux torseurs doivent être écrits au même point.

Définition : Une liaison est dite parfaite si la puissance dissipée par les actions de contact est nulle. C'est à dire $\{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_Q \otimes \{V(S_2/S_1)\}_Q = 0$ ou encore

$$\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{V}(Q \in S_2/S_1) + \vec{M}(Q, S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{\Omega}(S_2/S_1) = 0$$

Dans le cas d'une liaison parfaite si l'on connaît le torseur cinématique du mouvement relatif entre les solides on en déduit la forme du torseur des efforts transmissibles par la liaison qui est complémentaire.

III.2.ix.b Exemple de la liaison Pivot Parfaite



$$\{V(S_2/S_1)\}_I = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \omega_z(S_2/S_1) \vec{Z} \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Si le torseur des interefforts se présente sous la forme suivante :

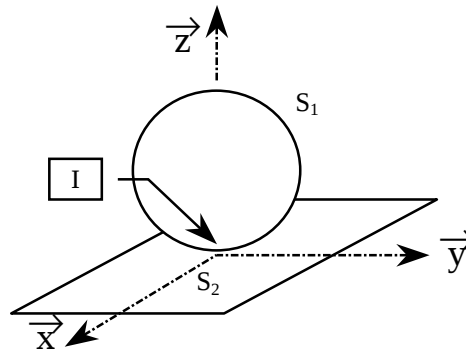
$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = X\vec{X} + Y\vec{Y} + Z\vec{Z} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = L\vec{X} + M\vec{Y} \end{array} \right\}_{\{I, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}} \quad \text{alors la puissance dissipée par les interefforts est}$$

bien nulle. Si l'on utilise l'écriture des torseurs sous la forme des colonnes nous avons :

$$\{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_I = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}_{\{I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \text{ et } \{V(S_2/S_1)\}_I = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z(S_2/S_1) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\{I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

Comme seul $\vec{\Omega}(S_2/S_1) \cdot \vec{z}$ est non nul, uniquement $\vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{z}$ est nul.

III.2.ix.c Exemple de la liaison Ponctuelle Parfaite



$$\{V(S_2/S_1)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \omega_x(S_2/S_1) \vec{x} + \omega_y(S_2/S_1) \vec{y} + \omega_z(S_2/S_1) \vec{z} \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) = V_x(I, S_2/S_1) \vec{x} + V_y(I, S_2/S_1) \vec{y} \end{Bmatrix}$$

Si le torseur des intefforts se présente sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = Z \vec{z} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{Bmatrix}_{\{I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \text{ alors la puissance dissipée par les intefforts est bien}$$

nulle. Si l'on utilise l'écriture des torseurs sous la forme des colonnes nous avons :

$$\{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_I = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\{I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \text{ et } \{V(S_2/S_1)\}_I = \begin{Bmatrix} \omega_x(S_2/S_1) \\ \omega_y(S_2/S_1) \\ \omega_z(S_2/S_1) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_x(I, S_2/S_1) \\ V_y(I, S_2/S_1) \\ 0 \end{Bmatrix}_{\{I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

Comme seul $\vec{V}(I \in S_2/S_1) \cdot \vec{z}$ est nul, uniquement $\vec{R}(I, S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{z}$ est non nul.

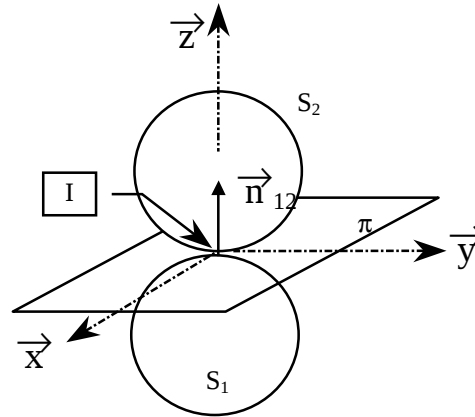
Exercice : Ecrivez ces torseurs pour différentes liaisons.

III.2.ix.d Liaisons non Parfaites

Quelles que soit les solutions technologiques choisies les liaisons dissipent toujours plus ou moins de la chaleur, dit autrement que la puissance dissipée par la liaison est différente de zéro. La schématisation précédente est erronée. Si dans certains cas nous pouvons nous en contenter, il existe des situations où il est nécessaire d'améliorer cette modélisation des liaisons parfaites. Ce n'est pas simple car les mécanismes physiques conduisant à cette dissipation se situe à l'échelle microscopique. Il est difficilement envisageable d'extraire à partir de modèles microscopiques des informations macroscopiques sur les torseurs. Par conséquent il faut aborder le problème à l'échelle macroscopique et procéder comme en rhéologie, c'est à dire extraire des lois simples à partir d'une série d'essais. La loi de Coulomb en est un bel exemple.

III.2.ix.e Lois de Coulomb dans le cas du Contact Ponctuel

On se place dans le cas où un plan tangent existe au point de contact entre les deux solides (notés S_1 et S_2). Le cas du contact entre les deux pointes de cônes est exclu. La normale à ce plan noté π orienté du solide S_1 vers le solide S_2 est notée $\vec{n}_{12}$.



LOIS DE COULOMB

On suppose que le torseur des efforts transmissibles de $S_1 \rightarrow S_2$ au point de contact I se présente sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = N_{12} \vec{n}_{12} + \vec{T}_{12} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Si le contact existe, c'est à dire si $N_{12} > 0$ alors :

Soit le coefficient f traduisant le frottement

- Si $f = 0$ la liaison est parfaite et $\vec{T}_{12} = \vec{0}$
- Si $f \neq 0$ deux cas se présentent :
 - quand le vecteur glissement entre les deux solides est nul (roulement sans glissement) alors :
 $\vec{V}(I, S_2/S_1) = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{T}_{12}\| \leq f |N_{12}|$ la résultante est dans un cône, mais elle est indéterminée.
 - quand le vecteur glissement entre les deux solides est non nulle, alors le torseur des actions transmises par la liaison est complètement déterminé :

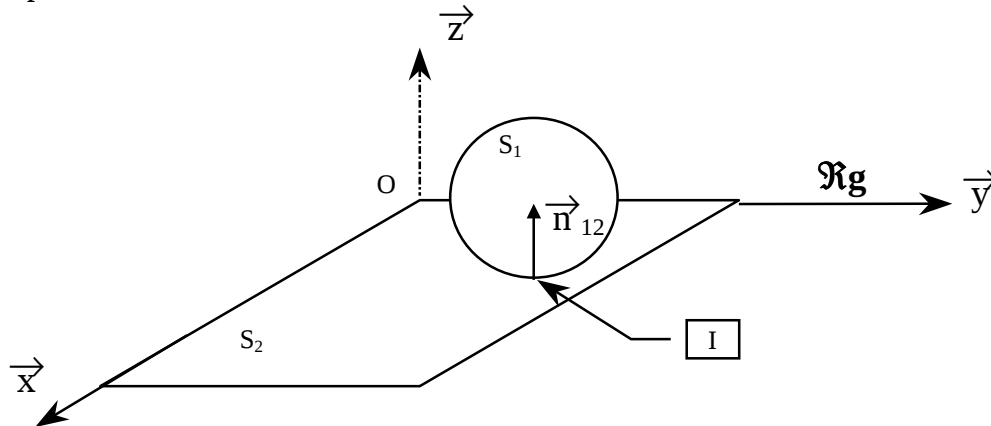
$$\vec{V}(I, S_2/S_1) \neq \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{T}_{12}\| = f |N_{12}| \\ \vec{V}(I, S_2/S_1) \wedge \vec{T}_{12} = \vec{0} \\ \vec{V}(I, S_2/S_1) \cdot \vec{T}_{12} < 0 \end{array} \right.$$

La première relation nous donne une information sur la norme, la deuxième sur la direction et la dernière sur le sens. La résultante est sur le cône.

Il est possible d'améliorer ce schéma en introduisant des moments transmissibles par la liaison. Par exemple pour des liaisons plus complètes les lois de Coulomb peuvent être appliquées localement sur un champ de pression de contact estimé et par intégration nous pouvons calculer les efforts transmissibles.

III.2.ix.f Discussion

Dans le cas d'une liaison avec frottement, les lois de Coulomb sont des relations qui traduisent la physique du contact. Elles sont indispensables pour résoudre les problèmes de dynamique où les liaisons ne sont pas parfaites. Pour illustrer ce fait, discutons sur le nombre d'inconnu et d'équation dans le cas d'une sphère qui roule sur un plan.



Les paramètres de position sont par exemple les coordonnées du point I de contact dans le plan $\{O, \vec{x}, \vec{y}\}$ que l'on note λ suivant $\vec{x}$ et μ suivant $\vec{y}$, et les trois angles d'Euler (θ, ϕ, Ψ) qui définissent complètement la position angulaire de la sphère. Les inconnues cinématiques sont au nombre de cinq.

- Si la liaison est parfaite, les inconnues de liaison sont au nombre de un. Comme $\mathbf{f} = 0$, le torseur des actions du solide S_2 sur S_1 se réduit à :

$$\{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_I = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = N_{12} \vec{n}_{12} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Au total nous avons 6 inconnues et 6 équations qui sont issues du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la sphère.

- Si la liaison est non parfaite, les inconnues de liaison sont au nombre de 3. Le torseur des actions du solide S_2 sur S_1 s'écrit :

$$\{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_I = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = N_{12} \vec{n}_{12} + \vec{T}_{12} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Au total nous avons 8 inconnues et 6 équations qui sont toujours issues du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la sphère. On voit bien qu'il est nécessaire de deux équations supplémentaires. Elles sont issues des lois de Coulomb :

quand le vecteur glissement entre les deux solides est nul (roulement sans glissement) alors :

$\vec{V}(I, S_2/S_1) = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{T}_{12}\| \leq f |N_{12}|$ la résultante est dans un cône, mais elle est indéterminée. Les deux équations supplémentaires proviennent de la condition de roulement

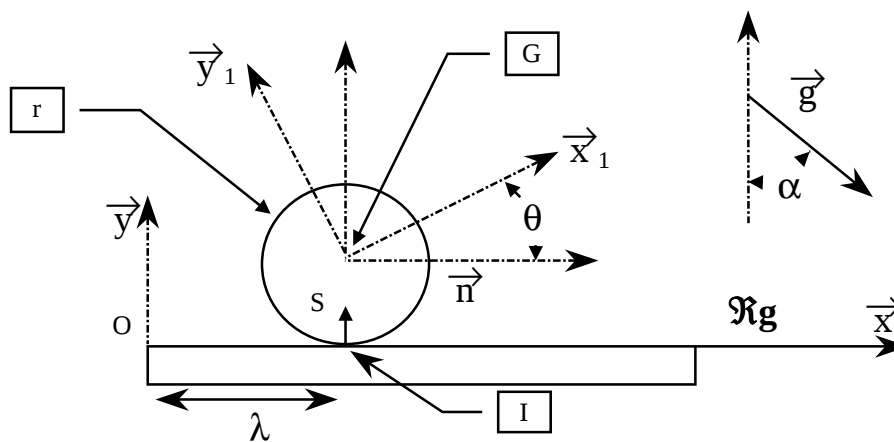
sans glissement $\vec{V}(I, S_1/S_2) = \vec{0}$ que l'on projette sur les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Pour avoir roulement sans glissement les paramètres de position doivent être liés.

quand le vecteur glissement entre les deux solides est non nulle, alors le torseur des actions transmises par la liaison est complètement déterminé :

$$\vec{V}(I, S_2/S_1) \neq \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{T}_{12}\| = f |N_{12}| \\ \vec{V}(I, S_2/S_1) \wedge \vec{T}_{12} = \vec{0} \\ \vec{V}(I, S_2/S_1) \cdot \vec{T}_{12} < 0 \end{cases}$$

La première relation nous donne une information sur la norme de $\vec{T}_{12}$, la deuxième sur la direction de $\vec{T}_{12}$ et la dernière sur le sens de $\vec{T}_{12}$. Par conséquent $\vec{T}_{12}$ est entièrement déterminé par les lois de Coulomb. Tout ce raisonnement est valable sous condition que le contact subsiste, c'est à dire que $N_{12} > 0$

III.2.ix.g Exemple : Disque en mouvement sur un plan



Les grandeurs dynamiques sont le vecteur accélération et le moment dynamique :

$$\vec{\Gamma}(G \in S/\mathcal{R}_g) = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \quad \vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_g) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ C \ddot{\theta} \end{vmatrix}_{\{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

Les actions extérieures qui agissent sur le solide sont:

la pesanteur dont le vecteur accélération s'écrit : $\vec{g}(G, S/\mathcal{R}_g) = \begin{vmatrix} g \cos \alpha \\ -g \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{\{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$

et l'action du plan sur le disque :

➤ si la liaison est parfaite : $\{\vec{F}(\text{Plan} \rightarrow S)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = N \vec{y} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{Bmatrix}$

➤ si la liaison est non parfaite (frottement) :

$$\{\vec{F}(\text{Plan} \rightarrow S)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = N \vec{y} + T \vec{x} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{Bmatrix}$$



IV Énergétique

IV.1 Théorème de l'énergie cinétique appliqué au point

Le Principe Fondamental de la dynamique appliqué au point conduit à une égalité vectorielle entre la résultante des efforts et le vecteur accélération multiplié par sa masse. Cette égalité est vérifiée quelque soit l'instant t :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} = m(P) \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R})$$

Si l'on projette cette égalité sur le vecteur vitesse nous obtenons :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R}) = m(P) \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R})$$

que l'on peut détailler sous la forme suivante :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R}) = m(P) \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(P/\mathcal{R}) \right]_{\mathcal{R}} \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R})$$

ou encore :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m(P) \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(P/\mathcal{R})^2 \right]$$

pour obtenir finalement la relation suivante (lorsque la masse du point est constante au cours du temps) :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(P) \vec{V}(P/\mathcal{R})^2 \right]$$

Définitions :

- La quantité scalaire $\left[\frac{1}{2} m(P) \vec{V}(P/\mathcal{R})^2 \right]$ est appelée Énergie Cinétique du point P en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. On la note habituellement $T(P/\mathcal{R})$.
- La quantité scalaire $\Sigma \vec{F}_{\text{extérieur} \rightarrow P} \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R})$ est la puissance développée par les efforts extérieurs agissant sur le point P dans le mouvement de P par rapport à $\mathcal{R}$. On la note : $P(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R})$

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE APPLIQUÉ A UN POINT :

$$\frac{d}{dt} T(P/\mathcal{R}) = P(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R})$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du mouvement du point P par rapport au référentiel Galiléen $\mathcal{R}$ est égale à la puissance développée par les efforts qui agissent sur le point dans le mouvement du point P par rapport au référentiel Galiléen $\mathcal{R}$.

Si l'on intègre entre deux instants t_1 et t_2 l'égalité issue du théorème de l'énergie cinétique nous obtenons l'égalité suivante :



$$T(P/\mathcal{R}_g)(t_2) - T(P/\mathcal{R}_g)(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P}(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g) dt = \mathbf{W}_{t_1}^{t_2}(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g)$$

qui traduit le fait que la différence des énergies cinétiques entre l'instant t_2 et l'instant t_1 est égale aux travaux développés par les forces extérieures que l'on note $\mathbf{W}_{t_1}^{t_2}(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g)$ et qui sont

$$\text{définis par : } \mathbf{W}_{t_1}^{t_2}(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P}(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g) dt$$

Pour certains types d'efforts, il est possible de leur associer une Énergie Potentielle notée : $\mathbf{E}_p(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g)$ qui est telle que : $\mathbf{P}(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g) = - \left[\frac{d\mathbf{E}_p}{dt} \right]$

Par exemple dans le cas de la pesanteur (près de la surface de la terre) :

$$\mathbf{E}_p(\vec{OP}) = -m \vec{g} \cdot \vec{OP}$$

$$\mathbf{P}(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g) = - \left[\frac{d\mathbf{E}_p}{d\vec{OP}} \right]_{\mathcal{R}_g} \cdot \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_g} = m \vec{g} \cdot \vec{V}(P/\mathcal{R}_g)$$

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE :

Si à tous les efforts on peut associer une Énergie Potentielle, le théorème de l'Énergie cinétique se réduit au théorème de l'Énergie mécanique :

$$\frac{d}{dt} \left[T(P/\mathcal{R}_g) + \mathbf{E}_p(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g) \right] = 0 \text{ ou } T(P/\mathcal{R}_g) + \mathbf{E}_p(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g) = \text{constante}$$

$T(P/\mathcal{R}_g) + \mathbf{E}_p(\bar{P} \rightarrow P/\mathcal{R}_g)$ est appelée l'Énergie mécanique du point en P en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$ et elle se conserve au cours du temps.

IV.2 Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un solide rigide

En sommant les égalités vectorielles traduisant le Principe Fondamental exprimé en chaque point du solide nous avons obtenu la relation suivante :

$$\iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\vec{s} \rightarrow P_i} dm(P_i)$$

Nous en déduisons rapidement l'égalité suivante :

$$\iiint_{\text{solide}} \vec{\gamma}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\vec{s} \rightarrow P_i} \cdot \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

En introduisant la définition de l'accélération :



$$\iiint_{\text{solide}} \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \right]_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) = \iiint_{\text{solide}} \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} \cdot \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

en rappelant que le solide est rigide nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \right] = \iiint_{\text{solide}} \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} \cdot \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i)$$

On exprime les vitesses de chaque point $P_i \in S/\mathcal{R}_g$ en fonction d'un point $Q \in S/\mathcal{R}_g$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \cdot (\vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{P_i Q} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)) dm(P_i) \right] \\ = \iiint_{\text{solide}} \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} \cdot (\vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{P_i Q} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)) dm(P_i) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) \cdot (\vec{P_i Q} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)) dm(P_i) \right] \\ = \iiint_{\text{solide}} \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} \cdot \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} \cdot (\vec{P_i Q} \wedge \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)) dm(P_i) \end{aligned}$$

que l'on réécrit en transformant le produit mixte et en sortant les quantités indépendantes de l'intégration :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{\text{solide}} \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \cdot \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \iiint_{\text{solide}} \vec{Q P_i} \wedge \vec{V}(P_i \in S/\mathcal{R}_g) dm(P_i) \right] \\ = \iiint_{\text{solide}} \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} dm(P_i) \cdot \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \iiint_{\text{solide}} \vec{Q P_i} \wedge \sum_{d'effort}^{\text{types}} \vec{f}_{\bar{S} \rightarrow P_i} dm(P_i) \end{aligned}$$

On connaît déjà toutes ces quantités :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g) \right] \\ = \\ \vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} \cdot \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{M}(Q, \bar{S} \rightarrow S) \end{aligned}$$

On écrit cette égalité SCALAIRE sous une forme plus compacte en introduisant l'opérateur comoment $\otimes$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \{C(S/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S} \otimes \{V(S/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S} \right] = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_{Q_S} \otimes \{V(S/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S}$$

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE APPLIQUÉ A UN SOLIDE RIGIDE :

$$\frac{d}{dt} T(S/\mathcal{R}_g) = P(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g)$$

T a dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du mouvement du solide par rapport au



référentiel Galiléen $\mathcal{R}_g$ est égale à la puissance développée par les efforts qui agissent sur le solide dans le mouvement du solide par rapport au référentiel Galiléen $\mathcal{R}_g$.

- L'ÉNERGIE CINÉTIQUE du solide dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$ est définie par :

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \{C(S/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S} \otimes \{V(S/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S}$$

le comoment du torseur cinétique avec le torseur cinématique multiplié par $\frac{1}{2}$.

La puissance développée par les efforts qui agissent sur le solide dans le mouvement du solide par rapport au référentiel Galiléen $\mathcal{R}_g$ est définie par :

$$P(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_{Q_S} \otimes \{V(S/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S}$$

Si l'on intègre entre deux instants t_1 et t_2 l'égalité issue du théorème de l'énergie cinétique nous obtenons l'égalité suivante :

$$T(S/\mathcal{R}_g)(t_2) - T(S/\mathcal{R}_g)(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) dt = W_{t_1}^{t_2}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g)$$

qui traduit le fait que la différence des énergies cinétiques entre l'instant t_2 et l'instant t_1 est égale aux travaux développés par les forces extérieures agissant sur le solide que l'on note $W_{t_1}^{t_2}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g)$ et qui sont définis par :

$$W_{t_1}^{t_2}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \int_{t_1}^{t_2} P(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) dt$$

Remarques et propriétés à connaître :

Nous avons montré que l'énergie cinétique est égale à :

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{V}(Q \in S/\mathcal{R}_g) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g)$$

Si l'on choisit comme point $Q \in S$ le point G_S alors :

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \langle J_{G_S}(S) \rangle \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)$$

qui s'écrit dans une base orthonormée :

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m_S \vec{V}(G_S/\mathcal{R}_g)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot [I(S)]_{\{G_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)$$

Si l'on choisit comme point $Q \in S$, un point qui est fixe (s'il en existe) alors dans une base orthonormée :

$$T(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g) \cdot [I(S)]_{\{Q_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}} \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_g)$$

Pour effectuer le produit de comoment, les torseurs doivent être écrits au même point.



L'opérateur comoment est commutatif avec l'opérateur somme. Cette propriété est utile pour calculer les puissances développées par les efforts extérieurs. En effet si le solide subit plusieurs types d'efforts (pesanteur, ponctuels, pression réparties) la puissance développée par ces efforts est la somme des puissances développées par chaque type d'efforts :

$$\mathbf{P}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{Rg}) = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_{Q_S} \otimes \{V(S/\mathcal{Rg})\}_{Q_S}$$

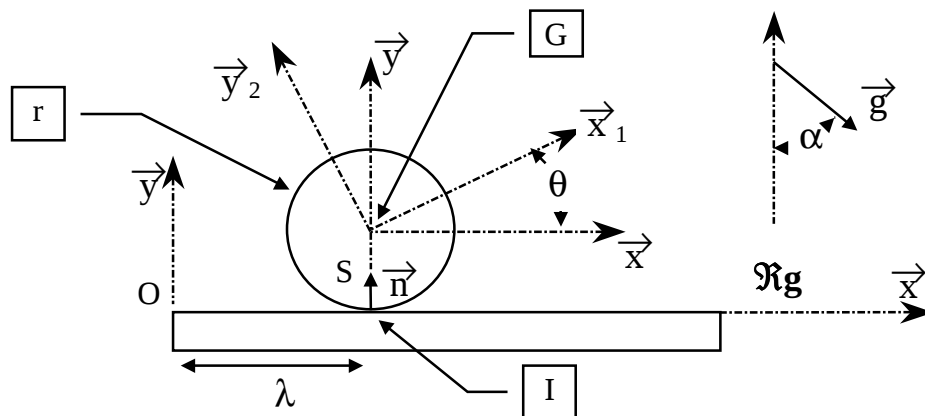
types

$$\mathbf{P}(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{Rg}) = \sum_{\text{d'effort}} \{F^k(\bar{S} \rightarrow S)\}_{Q_S} \otimes \{V(S/\mathcal{Rg})\}_{Q_S} = \sum_{\text{types}} \mathbf{P}^k(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{Rg})$$

où $\mathbf{P}^k(\bar{S} \rightarrow S/\mathcal{Rg})$ est la puissance développée par le type d'effort n°k dans le mouvement de S par rapport à $\mathcal{Rg}$.

Si pour effectuer les comoments les torseurs doivent être écrits au même point, en revanche les puissances et l'énergie cinétique sont INDÉPENDANTES du point d'écriture des torseurs. Pour calculer les puissances développées par des efforts de types différents on peut utiliser des points différents:

IV.2.i L'exemple du Disque en mouvement sur un plan



Les grandeurs cinétiques et cinématiques sont :

$$\vec{V}(G \in S/\mathcal{Rg}) = \dot{\lambda} \vec{x} + \vec{\sigma}(G, S/\mathcal{Rg}) = C \dot{\theta} \vec{z}$$

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg}) = \dot{\theta} \vec{z}$$

$$\mathbf{T}(S/\mathcal{Rg}) = \frac{1}{2} \{C(S/\mathcal{Rg})\}_{G_S} \otimes \{V(S/\mathcal{Rg})\}_{G_S}$$

$$\mathbf{T}(S/\mathcal{Rg}) = \frac{1}{2} m_s \vec{V}(G_S/\mathcal{Rg}) \cdot \vec{V}(G_S/\mathcal{Rg}) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/\mathcal{Rg}) \cdot \vec{\sigma}(G_S, S/\mathcal{Rg})$$

$$\mathbf{T}(S/\mathcal{Rg}) = \frac{1}{2} m_s \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\theta}^2$$

Les actions extérieures qui agissent sur le solide sont:



Premier type d'effort : la pesanteur dont le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{g}(G, S/\mathcal{R}_g) = \begin{vmatrix} g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{\{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

$\mathbf{P}^g(\vec{g} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \{F(\vec{g} \rightarrow S)\}_{Q_S} \otimes \{V(S/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S}$ avec les torseurs écrit en G_S par souci de simplification

$$\mathbf{P}^g(\vec{g} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \dot{\lambda} m g \sin \alpha$$

Second type d'effort : l'action du plan sur le disque au niveau du contact:

$$\text{➤ si la liaison est parfaite : } \{F(\text{Plan} \rightarrow S)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = N \vec{y} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{P}^c(\text{Plan} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \{F(\text{Plan} \rightarrow S)\}_{I_S} \otimes \{V(S/\mathcal{R}_g)\}_{I_S}$ avec les torseurs écrit en I_S par souci de simplification nous obtenons que :

$$\mathbf{P}^c(\text{Plan} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = 0$$

➤ si la liaison est non parfaite (frottement) :

$$\{F(\text{Plan} \rightarrow S)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = N \vec{y} + T \vec{x} \\ \vec{M}(I, S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{P}^c(\vec{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \{F(\text{Plan} \rightarrow S)\}_{I_S} \otimes \{V(S/\mathcal{R}_g)\}_{I_S}$ avec les torseurs écrit en I_S par souci de simplification nous obtenons la puissance :

$$\mathbf{P}^c(\text{Plan} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = (\dot{\lambda} + r \dot{\theta}) T$$

qui est non nulle et correspond à la puissance dissipée par la liaison. Effectivement d'après Coulomb cette quantité est soit nulle (roulement sans glissement) soit négative puisque :

$$\vec{V}(I, S/\text{Plan} \equiv \mathcal{R}_g) \cdot T \vec{x} < 0$$

ou encore $(\dot{\lambda} + r \dot{\theta}) T < 0$ qui n'est rien d'autre que la puissance développée par les efforts de contact dans le mouvement de $S/\mathcal{R}_g$.

Finalement nous obtenons en appliquant le Théorème de l'Énergie Cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(S/\mathcal{R}_g) &= \mathbf{P}(\vec{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) = \sum_{\text{types d'effort}} \mathbf{P}^k(\vec{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) \\ \frac{d}{dt} T(S/\mathcal{R}_g) &= \mathbf{P}^g(\vec{g} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) + \mathbf{P}^c(\text{Plan} \rightarrow S/\mathcal{R}_g) \end{aligned}$$

➤ si la liaison est parfaite :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_S \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\theta}^2 \right) = \dot{\lambda} g \sin \alpha \text{ qui nous donne } m_S \ddot{\lambda} \dot{\lambda} + C \ddot{\theta} \dot{\theta} = \dot{\lambda} g \sin \alpha$$



ou sous la forme d'une Intégrale Première : $\frac{1}{2} m_s \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\theta}^2 = \dot{\lambda} g \sin \alpha + \text{constante}$

si la liaison est non parfaite (frottement) :

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_s \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\theta}^2 \right) = \dot{\lambda} g \sin \alpha + (\dot{\lambda} + r \dot{\theta}) T$ qui tout calcul fait nous conduit à :

$$m_s \ddot{\lambda} \dot{\lambda} + C \ddot{\theta} \dot{\theta} = \dot{\lambda} g \sin \alpha + (\dot{\lambda} + r \dot{\theta}) T$$

IV.2.ii Intérêt du Théorème de l'énergie cinétique appliquée à un solide

Dans certains problèmes compliqués, il nous permet d'obtenir une équation du mouvement.

Dans d'autres problèmes il peut nous informer directement sur les puissances que doivent développer les moteurs pour créer une cinématique particulière.

Par une mesure des différences d'énergie cinétique entre deux instants, on peut estimer les efforts dissipatifs de frottement.

IV.3 Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système de solide

Nous sommes en présence de n solides notés $S_1, \dots, S_n$.

Appliquons le théorème de l'Énergie Cinétique à chacun d'entre eux, nous aurons n équations de la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} T(S_i/\mathcal{R}_g) = P(\bar{S}_i \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$$

où i varie de 1 à n. Sommons ces n équations nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} T(S_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}_i \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n T(S_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}_i \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$$

en distinguant les efforts qui sont appliqués de l'extérieur au système de solide et ceux qui sont la conséquence des interactions nous pouvons écrire :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n T(S_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n P(S_j \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$$

➤ La quantité $\sum_{i=1}^n T(S_i/\mathcal{R}_g)$ est l'énergie cinétique du système composé de n solides rigides, elle

est notée $T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n T(S_i/\mathcal{R}_g)$



- La quantité $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$ est la puissance développée par les efforts de l'extérieur agissant sur le système dans le mouvement du système par rapport à $\mathcal{R}_g$. On la note $\mathbf{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$.
- La dernière quantité $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{P}(S_j \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$ est appelée la puissance des interefforts et elle est notée $\mathbf{P}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{P}(S_j \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$.

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE
APPLIQUE A UN SYSTEME DE SOLIDES RIGIDES :

$$\frac{d}{dt} T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \mathbf{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g) + \mathbf{P}(\Sigma)$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du mouvement du système de solide par rapport au référentiel Galiléen $\mathcal{R}_g$ est égale à la puissance développée par les efforts de l'extérieur qui agissent sur le système dans le mouvement du solide par rapport au référentiel Galiléen $\mathcal{R}_g$ plus la puissance des interefforts.

- L'ÉNERGIE CINÉTIQUE du solide dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$ est définie par :

$$T(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n T(S_i/\mathcal{R}_g)$$

- La puissance développée par les efforts de l'extérieur qui agissent sur le solide dans le mouvement du solide par rapport au référentiel Galiléen $\mathcal{R}_g$ est définie par :

$$\mathbf{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g).$$

- la puissance des interefforts est définie par :

$$\mathbf{P}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{P}(S_j \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$$



IV.3.i Remarques sur la puissance des interefforts

Comme nous venons de le définir la puissance des interefforts est définie par la double sommation :

$$P(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n P(S_j \rightarrow S_i / \mathcal{R}_g)$$

que l'on peut écrire sous une autre forme :

$$P(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n P(S_j \rightarrow S_i / \mathcal{R}_g) + P(S_i \rightarrow S_j / \mathcal{R}_g)$$

Chaque quantité $P(S_j \rightarrow S_i / \mathcal{R}_g) + P(S_i \rightarrow S_j / \mathcal{R}_g)$ se note $P(S_j \leftrightarrow S_i)$, elle est appelée puissance développée par les interefforts entre les solides S_j et S_i .

Cette puissance se calcule de la manière suivante :

$$P(S_j \leftrightarrow S_i) = P(S_j \rightarrow S_i / \mathcal{R}_g) + P(S_i \rightarrow S_j / \mathcal{R}_g)$$

$$P(S_j \leftrightarrow S_i) = \{F^k(S_j \rightarrow S_i)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_i / \mathcal{R}_g)\}_{Q_S} + \{F^k(S_i \rightarrow S_j)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_j / \mathcal{R}_g)\}_{Q_S}$$

comme $\{F^k(S_i \rightarrow S_j)\}_{Q_S} = - \{F^k(S_j \rightarrow S_i)\}_{Q_S}$ alors :

$$P(S_j \leftrightarrow S_i) = \{F^k(S_j \rightarrow S_i)\}_{Q_S} \otimes [\{V(S_i / \mathcal{R}_g)\}_{Q_S} - \{V(S_j / \mathcal{R}_g)\}_{Q_S}]$$

$$P(S_j \leftrightarrow S_i) = \{F^k(S_j \rightarrow S_i)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_i / S_j)\}_{Q_S}$$

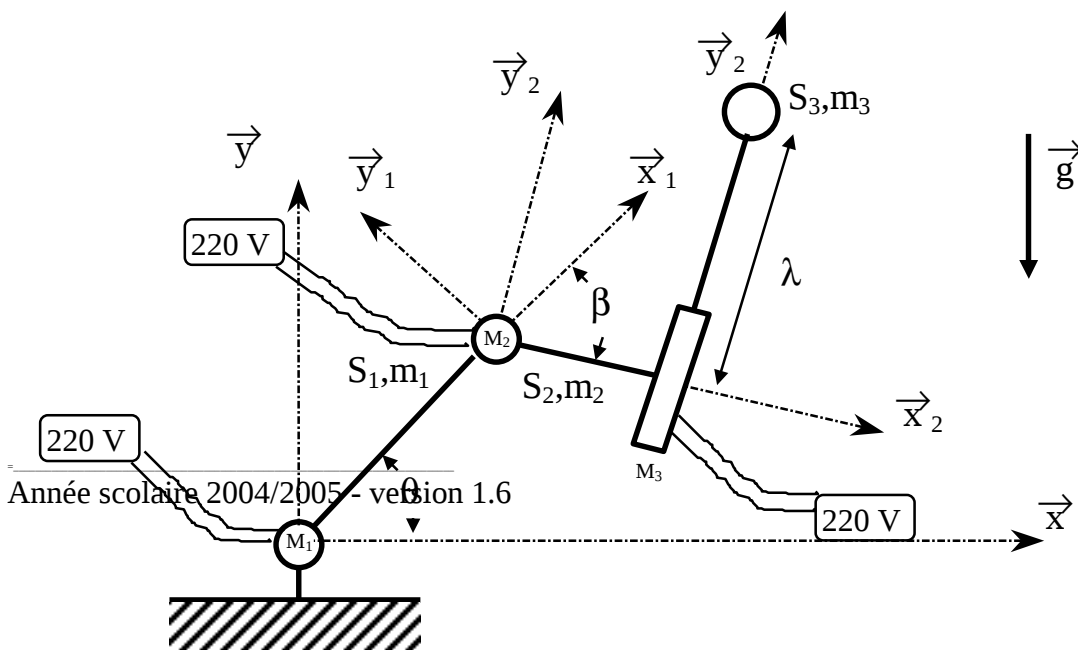
La puissance des interefforts développées au sein d'un système de solide est la puissance développée par les interactions entre les solides dans leurs mouvements relatifs les uns par rapport aux autres. Cette puissance est indépendante du référentiel.

Si les interactions entre les solides se réduisent aux actions de liaisons et si ces liaisons sont parfaites alors la Puissance des Interefforts est nulle.

La Puissance des Interefforts développée par les actions de liaison d'une liaison parfaite est nulle.

ATTENTION : La puissance des efforts extérieurs au système générée par une liaison parfaite peut être non nulle voir l'exemple ci dessous.

IV.3.ii Exemple





Les trois moteurs M_1 M_2 M_3 sont intégrés dans les liaisons. Ils sont considérés être sans masse. Les liaisons sont supposées parfaites.

➤ Système $\Sigma = \{S_3\}$

$$\frac{d}{dt} T(S_3/\mathcal{Rg}) = P(\bar{S}_3 \rightarrow S_3/\mathcal{Rg})$$

$$\frac{d}{dt} T(S_3/\mathcal{Rg}) = P(\vec{g} \rightarrow S_3/\mathcal{Rg}) + P(S_2 \rightarrow S_3/\mathcal{Rg}) + P(M_3 \rightarrow S_3/\mathcal{Rg})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(S_3/\mathcal{Rg}) = \{F(\vec{g} \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(S_2 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} \\ + \{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} \end{aligned}$$

Dans ce cas précis, la puissance des actions de liaison $S_2 \rightarrow S_3$ développe une puissance non nulle dans le mouvement de S_3 par rapport à $\mathcal{Rg}$.

➤ Système $\Sigma = \{S_3 \cup S_2\}$

$$\frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{Rg}) + T(S_2/\mathcal{Rg})] = P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_3/\mathcal{Rg}) + P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(S_2 \leftrightarrow S_3)$$

$$\frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{Rg}) + T(S_2/\mathcal{Rg})] = P(\vec{g} \rightarrow S_3/\mathcal{Rg}) + P(\vec{g} \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(M_3 \rightarrow S_3/\mathcal{Rg}) + P(M_3 \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(M_2 \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(S_2 \leftrightarrow S_3)$$

Comme la liaison entre S_2 et S_3 est parfaite nous pouvons écrire (et vous pouvez le vérifier que) : $P(S_2 \leftrightarrow S_3) = 0$. En revanche bien que la liaison soit parfaite la puissance $P(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{Rg})$ est non nulle, car le champ cinématique n'est pas le champ relatif tout simplement. Finalement nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{Rg}) + T(S_2/\mathcal{Rg})] = \{F(\vec{g} \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(\vec{g} \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} \\ + \{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(M_3 \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} \\ + \{F(M_2 \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + 0. \end{aligned}$$

On peut aussi inclure le moteur. Lorsque ce dernier est sans masse nous exprimons le Théorème de l'énergie cinétique sous la forme suivante :

➤ Système $\Sigma = \{S_3 \cup S_2 \cup M_3\}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{Rg}) + T(S_2/\mathcal{Rg})] = P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_3/\mathcal{Rg}) + P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) \\ + P(S_2 \leftrightarrow S_3) + P(S_2 \leftarrow M_3 \rightarrow S_3) \end{aligned}$$



Par rapport à la situation précédente la puissance développée par les moteurs fait partie des interefforts, nous allons exprimer ces quantités

$$\frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{Rg}) + T(S_2/\mathcal{Rg})] = P(\vec{g} \rightarrow S_3/\mathcal{Rg}) + P(\vec{g} \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(M_2 \rightarrow S_2/\mathcal{Rg}) + P(S_2 \leftrightarrow S_3) + P(S_2 \leftarrow M_3 \rightarrow S_3)$$

Comme la liaison est parfaite $P(S_2 \leftrightarrow S_3) = 0$. La puissance des interefforts développée par le moteur qui prend appui sur S_2 et qui agit sur S_3 s'exprime de la manière suivante :

$$P(S_2 \leftarrow M_3 \rightarrow S_3) = \{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/S_2)\}_{Qs} \text{ ou de manière équivalente}$$

$$P(S_2 \leftarrow M_3 \rightarrow S_3) = \{F(M_3 \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/S_3)\}_{Qs}$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{Rg}) + T(S_2/\mathcal{Rg})] = \{F(\vec{g} \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(\vec{g} \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \mathbf{0} + \{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/S_2)\}_{Qs}.$$

Remarquons que le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système $\{S_3 \cup S_2 \cup M_3\}$ est équivalent à celui appliqué au système $\{S_3 \cup S_2\}$. Pour s'en persuader il suffit de comparer les différences :

* dans le cas $\{S_3 \cup S_2 \cup M_3\}$ la puissance développée par le moteur est classée dans les interefforts et s'écrit par exemple : $\{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/S_2)\}_{Qs}$

* dans le cas $\{S_3 \cup S_2\}$ la puissance développée par le moteur est classée dans les efforts extérieurs et s'écrit :

$$\{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(M_3 \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs}.$$

Comme le moteur est SANS MASSE :

$$\{F(M_3 \rightarrow S_2)\}_{Qs} = -\{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs}$$

donc :

$$\{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} + \{F(M_3 \rightarrow S_2)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} =$$

$$\{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} - \{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs} =$$

$$\{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes [\{V(S_3/\mathcal{Rg})\}_{Qs} - \{V(S_2/\mathcal{Rg})\}_{Qs}] =$$

$$\{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Qs} \otimes \{V(S_3/S_2)\}_{Qs} \text{ qui n'est rien d'autre que } P(S_2 \leftarrow M_3 \rightarrow S_3)$$

On peut inclure ou non les moteurs dans le système, l'important est de les classer dans les efforts extérieurs s'ils n'appartiennent pas au système ou dans les interefforts s'ils appartiennent au système. La dernière solution nécessite moins de calcul.

➤ Système $\Sigma = \{S_3 \cup S_2 \cup S_1 \cup M_3 \cup M_2\}$



$$\frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{R}_g) + T(S_2/\mathcal{R}_g) + T(S_1/\mathcal{R}_g)] =$$

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_3/\mathcal{R}_g) + P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_g) + P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_g) \\ + P(S_2 \leftrightarrow S_3) + P(S_1 \leftrightarrow S_2) + P(S_2 \leftarrow M_3 \rightarrow S_3) + P(S_1 \leftarrow M_2 \rightarrow S_2)$$

plus détaillé nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{R}_g) + T(S_2/\mathcal{R}_g) + T(S_1/\mathcal{R}_g)] =$$

$$P(\vec{g} \rightarrow S_3/\mathcal{R}_g) + P(\vec{g} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_g) + P(\vec{g} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_g) + P(Bati \rightarrow S_1/\mathcal{R}_g) + P(M_1 \rightarrow S_1/\mathcal{R}_g) \\ + P(S_2 \leftrightarrow S_3) + P(S_1 \leftrightarrow S_2) + P(S_2 \leftarrow M_3 \rightarrow S_3) + P(S_1 \leftarrow M_2 \rightarrow S_2)$$

Comme les liaisons sont parfaites :

$$P(S_2 \leftrightarrow S_3) = 0 \text{ et } P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$$

mais aussi $P(Bati \rightarrow S_1/\mathcal{R}_g) = \{F(Bati \rightarrow S_1)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_1/Bati \equiv \mathcal{R}_g)\}_{Q_S}$ puisque dans ce cas particulier le torseur cinématique $\{V(S_1/Bati \equiv \mathcal{R}_g)\}_{Q_{S0}}$ est le torseur du mouvement relatif de la liaison :

$$\frac{d}{dt} [T(S_3/\mathcal{R}_g) + T(S_2/\mathcal{R}_g) + T(S_1/\mathcal{R}_g)] =$$

$$\{F(\vec{g} \rightarrow S_1)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_3/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S} + \{F(\vec{g} \rightarrow S_2)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_2/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S} + \{F(\vec{g} \rightarrow S_3)\}_{Q_S} \otimes \\ \{V(S_3/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S} + \mathbf{0} + \{F(M_1 \rightarrow S_1)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_1/\mathcal{R}_g)\}_{Q_S} \\ + \mathbf{0} + \{F(M_3 \rightarrow S_3)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_3/S_2)\}_{Q_S} + \{F(M_2 \rightarrow S_2)\}_{Q_S} \otimes \{V(S_2/S_1)\}_{Q_S}.$$



V Principe des Puissances Virtuelles "PPV"

V.1 Cas d'un Solide

Rappelons le Principe Fondamental de la dynamique dans le cas du solide:

Torseur des efforts résultants extérieurs au solide en Q est égal Torseur dynamique en Q.

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q = \{D(S/\mathfrak{R}_g)\}_Q$$

Cette égalité est toujours vérifiée si l'on multiplie chaque terme par le même torseur. Plus particulièrement nous multiplions cette égalité par un champ de moment de "vitesse" rigidifiant. Un champ rigidifiant est un champ qui vérifie l'hypothèse de solide rigide. Ce champ virtuel ne possède aucune réalité physique et aucune dimension. On le nomme champ de vitesse car les termes obtenus dans chaque membre de l'égalité s'apparente à des puissances. On pourrait les nommer plus judicieusement torseurs tests puisque l'intérêt du PPV outre l'aspect fondamental réside dans le choix de ces torseurs qui peut faciliter la mise en équation.

Le PPV s'énonce de la façon suivante :

QUEL QUE SOIT le champ virtuel : $\{V^*(S)\}_Q$

$$\{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q \otimes \{V^*(S)\}_Q = \{D(S/\mathfrak{R}_g)\}_Q \otimes \{V^*(S)\}_Q$$

Le terme $\{F(\bar{S} \rightarrow S)\}_Q \otimes \{V^*(S)\}_Q$ est baptisé Puissance Virtuelle des efforts extérieurs notée :

$$\mathbf{P}^*(\bar{S} \rightarrow S)$$

et le terme $\{D(S/\mathfrak{R}_g)\}_Q \otimes \{V^*(S)\}_Q$ Puissance Virtuelle des accélérations notée $\mathbf{P}_{acc}^*(S/\mathfrak{R}_g)$

$$\forall \{V^*(S)\}_Q \quad \mathbf{P}_{acc}^*(S/\mathfrak{R}_g) = \mathbf{P}^*(\bar{S} \rightarrow S)$$

C'est une égalité simple entre des scalaires dont L'INTERET ESSENTIEL tient dans le :

$$\forall \{V^*(S)\}_Q .$$

Par conséquent, il est possible en choisissant un champ de générer une égalité scalaire. Par conséquent une 'infinité' d'égalité scalaire peut être construite. Evidemment l'intérêt ne réside pas dans l'infinité d'égalité, mais dans le choix de torseur test qui conduise aux équations scalaires recherchées.

**V.2 Cas d'un Système de Solide :**

Soit un système de n solides $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ **pour chaque solide** il est possible d'appliquer le PPV :

$$\forall \{V^*(S_i)\}_Q$$

$$\mathbf{P}_{\text{acc}}^*(S_i/\mathfrak{Rg}) = \mathbf{P}^*(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i) + \mathbf{P}^*(S_1 \rightarrow S_i) + \mathbf{P}^*(S_2 \rightarrow S_i) + \dots + \mathbf{P}^*(S_n \rightarrow S_i)$$

Nous obtenons ainsi n équations. Pour formuler le PPV sur le système, il suffit de sommer ces équations :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{\text{acc}}^*(S_i/\mathfrak{Rg}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^*(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{P}^*(S_j \rightarrow S_i)$$

Cette double sommation peut se simplifier en remarquant que $\{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q = -\{F(S_i \rightarrow S_j)\}_Q$ donc :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{P}^*(S_j \rightarrow S_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V^*(S_i)\}_Q$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{P}^*(S_j \rightarrow S_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V^*(S_i) - V^*(S_j)\}_Q$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{P}^*(S_j \rightarrow S_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V^*(S_i/S_j)\}_Q$$

Ce terme n'est rien d'autre que la puissance virtuelle des inter efforts notée $\mathbf{P}_{\text{interefforts}}^*(\Sigma)$.

Le PPV pour un système de solide s'énonce de la façon suivante :

$$\forall \{V^*(\Sigma)\}_Q \text{ rigidifiant sur chaque solide}$$

$$\mathbf{P}_{\text{acc}}^*(\Sigma) = \mathbf{P}^*(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow \Sigma) + \mathbf{P}_{\text{interefforts}}^*(\Sigma)$$



VI Equations de Lagrange

Les équations de Lagrange sont issues du PPV lorsque l'on choisit un champ virtuel particulier. Ce champ se définit de la façon suivante sur le solide S_i :

$$\{V^*(S_i)\}_Q = \{V_{q_k}(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q$$

Torseur cinématique du solide S_i en mouvement par rapport à $\mathfrak{Rg}$ relatif au paramètre q_k

Avec ce champ pour chaque solide, le champ virtuel des mouvements relatifs $\{V^*(S_i/S_j)\}_Q$ est égal à $\{V_{q_k}(S_i/S_j)\}_Q$

Dans ce cadre spécifique et restrictif, le PPV s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \{D(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q &= \sum_{i=1}^n \{F(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^n \{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/S_j)\}_Q \end{aligned}$$

Détaillons le terme $\sum_{i=1}^n \{D(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q$ en revenant à sa définition première, c'est à dire :

$$\{D(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q = \iiint_{\text{solide } S_i} \vec{\Gamma}_{(M \in S_i/\mathfrak{Rg})} \frac{\partial \vec{V}_{(M \in S_i/\mathfrak{Rg})}}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{\mathfrak{R}} dm(M)$$

En utilisant les relations de Lagrange l'intégrale s'exprime en fonction du déplacement :

$$\{D(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q = \iiint_{\text{solide } S_i} \vec{\Gamma}_{(M \in S_i/\mathfrak{Rg})} \frac{\partial \vec{OM}_{Si}}{\partial q_k} \Big|_{\mathfrak{R}} dm(M)$$

$$\text{où } \vec{\Gamma}_{(M/\mathfrak{R})} \frac{\partial \vec{OM}_{Si}}{\partial q_k} \Big|_{\mathfrak{R}} = \left\langle \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \right\rangle_{\text{opérateur}} \frac{1}{2} \left[\vec{V}_{(M \in S_i/\mathfrak{Rg})} \right]^2$$

donc

$$\{D(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathfrak{Rg})\}_Q = \iiint_{\text{solide } S_i} \left\langle \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \right\rangle_{\text{opérateur}} \frac{1}{2} \left[\vec{V}_{(M \in S_i/\mathfrak{Rg})} \right]^2$$



donc par conséquent comme le solide est indéformable:

$$\{D(S_i/\mathcal{R}_g)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathcal{R}_g)\}_Q = \left\langle \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial.}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial.}{\partial q_k} \right\rangle_{\text{opérateur solide } S_i} \iiint \frac{1}{2} \left[\vec{V}(M \in S_i/\mathcal{R}_g) \right]^2 dm(M)$$

Il apparaît l'énergie cinétique naturellement:

$$\{D(S_i/\mathcal{R}_g)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathcal{R}_g)\}_Q = \left\langle \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial.}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial.}{\partial q_k} \right\rangle_{\text{opérateur}} T(S_i/\mathcal{R}_g)$$

ou encore :

$$\{D(S_i/\mathcal{R}_g)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathcal{R}_g)\}_Q = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_k}$$

Ce comoment de torseur représente **l'évolution de l'énergie cinétique** par rapport au coefficient q_k .

En revenant à la formulation du PPV nous obtenons finalement :

l'EQUATION DE LAGRANGE relatif au PARAMETRE q_k

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{q_k} : \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^n \{F(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathcal{R}_g)\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/S_j)\}_Q \end{aligned}$$

Les termes de droite de l'égalité sont appelés :

Coefficients énergétiques ou Coefficients d'influences :

➤ **Coefficients énergétiques des efforts extérieurs**

$$\sum_{i=1}^n Q_{q_k}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^n \{F(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/\mathcal{R}_g)\}$$

➤ **Coefficients énergétiques des inter efforts entre les solides du système de solides**

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n Q_{q_k}(S_j \leftrightarrow S_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V_{q_k}(S_i/S_j)\}_Q$$

Ils représentent la contribution du paramètre q_k dans la puissance des efforts extérieurs et des inter efforts. Pour calculer ces coefficients deux solutions se présentent :

➤ Soit à partir de la définition précédente après avoir calculé les torseurs cinématiques relatifs au paramètre q_k .



- Soit en utilisant la Puissance Virtuelle dans le cas où **le champ virtuel est compatible avec les liaisons**:

$$\mathbf{P}^*(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i) = \{F(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V^*(S_i)\}_Q$$

$\forall S_i$ cette puissance est aussi égale à :

$$\mathbf{P}^*(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i) = \sum_{k=1}^n Q_{q_k}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathfrak{Rg}) \dot{q}_k^*$$

Il en est de même pour la puissance des inter efforts:

$$\mathbf{P}^*(S_j \leftrightarrow S_i) = \{F(S_j \rightarrow S_i)\}_Q \otimes \{V^*(S_i/S_j)\}_Q$$

s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\mathbf{P}^*(S_j \leftrightarrow S_i) = \sum_{k=1}^n Q_{q_k}(S_j \leftrightarrow S_i) \dot{q}_k^*$$

Cette méthode est rapide puisqu'on extrait directement tous les coefficients d'un seul calcul de puissance virtuelle

Remarques :

- Il ne faut jamais calculer les coefficients avec la puissance réelle, il y a des risques d'erreur.
- Dans le cas d'une liaison géométrique parfaite entre deux solides S_i et S_j si le paramétrage est compatible avec la liaison alors :

$$Q_{q_k}(S_j \leftrightarrow S_i) = 0 \quad \forall q_k$$

Le coefficient d'influence énergétique des inter efforts dans la liaison est nul. Attention cette définition met en jeu uniquement les inter efforts de la liaison. S'il y a des ressorts ou des moteurs il faut ajouter les coefficients dus aux ressorts et aux moteurs.

- Si le système est lié au bâti par une ou des liaisons parfaites et dans le cas où ce bâti est lié au repère Galiléen, nous obtenons aussi :

$$Q_{q_k}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathfrak{Rg}) = 0 \quad \forall q_k$$

FINALEMENT :



SI :

- Toutes les liaisons sont parfaites
- Les n paramètres q_i ($i=1, \dots, n$) sont indépendants et suffisent pour repérer tous les solides du système étudié
- Les paramètres de position définissant les solides sont compatibles avec les liaisons.

ALORS :

Pour obtenir les **n EQUATIONS DU MOUVEMENT**, il suffit de choisir le champ virtuel égal aux différents champs cinématiques relatifs aux paramètres q_i ($i=1, \dots, n$)

Si $\{V^*(S_i)\}_Q = \{V_{q_1}(S_i/\mathcal{R}_g)\} \forall S_i$ on obtient :

$$\mathcal{L}_{q_1} : \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_1} = \sum_{i=1}^n Q_{q_1}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Q_{q_1}(S_j \leftrightarrow S_i)$$

Si $\{V^*(S_i)\}_Q = \{V_{q_2}(S_i/\mathcal{R}_g)\} \forall S_i$ on obtient :

$$\mathcal{L}_{q_2} : \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_2} = \sum_{i=1}^n Q_{q_2}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Q_{q_2}(S_j \leftrightarrow S_i)$$

·
·
·
·
·

Si $\{V^*(S_i)\}_Q = \{V_{q_k}(S_i/\mathcal{R}_g)\} \forall S_i$ on obtient :

$$\mathcal{L}_{q_k} : \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n Q_{q_k}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Q_{q_k}(S_j \leftrightarrow S_i)$$

·
·
·

Si $\{V^*(S_i)\}_Q = \{V_{q_n}(S_i/\mathcal{R}_g)\} \forall S_i$ on obtient :

$$\mathcal{L}_{q_n} : \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_n} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_n} = \sum_{i=1}^n Q_{q_n}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Q_{q_n}(S_j \leftrightarrow S_i)$$

Ces n équations du mouvement sont équivalentes à celles obtenues avec le Principe Fondamental de la Dynamique.

Cas Particulier :



Si les paramètres repérant la position des solides du système en mouvement par rapport au repère Galiléen sont surabondants il est nécessaire de rendre compte de la relation qu'il existe entre les paramètres. Cette relation traduit généralement une liaison supplémentaire omise dans le paramétrage par souci de simplification.

1^{ère} façon de procéder :

Pour résoudre le problème c'est très simple, il suffit de supposer que tous les paramètres sont indépendants. Ensuite d'écrire toutes les équations de Lagrange et d'ajouter à ce système la ou les relations traduisant la ou les liaisons omises lors du paramétrage. Ceci est valable **quel que soit** le type de relation (holonome ou non holonome).

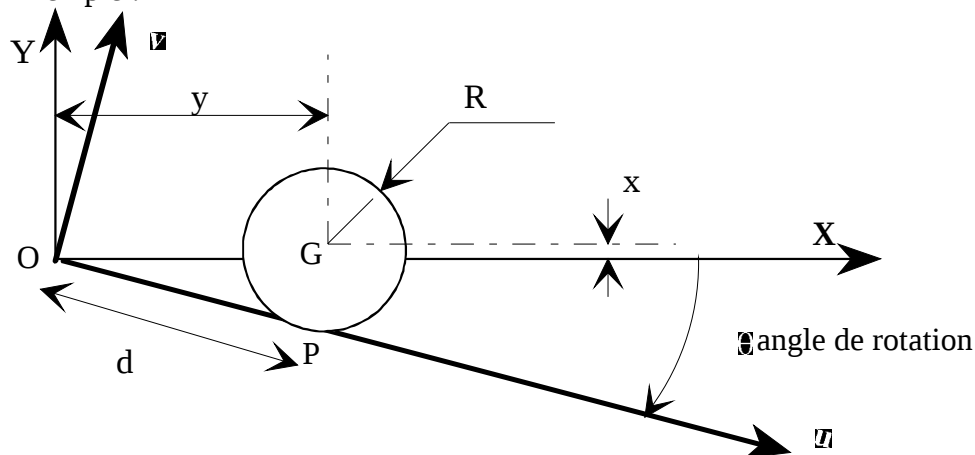
2^{nde} façon de procéder :

Il est possible d'utiliser les multiplicateurs de Lagrange. Pour cela il faut distinguer les liaisons holonomes et non holonomes :

Définitions:

Liaison Holonome ou intégrable: Une liaison est dite holonome lorsqu'elle peut s'exprimer par des conditions géométriques ne faisant pas intervenir les vitesses. Ceci peut se traduire mathématiquement par une fonction $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$

Exemple :



Sur cet exemple nous choisissons comme paramètre de position x , y position du centre d'inertie G par rapport au repère O, X, Y et θ la position angulaire. Le paramétrage est surabondant puisqu'il existe une relation entre x , y et θ . Cette relation se présente de la façon suivante :

$$R = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Nous avons une liaison holonome indépendante du temps.



Si $\theta = \omega t$ la relation précédente fait apparaître explicitement le temps la liaison est dite holonome dépendante du temps.

Liaison NON Holonome ou non intégrable: Une liaison est dite non holonome lorsqu'il est impossible de l'exprimer sous forme de conditions géométriques du type défini précédemment, mais seulement sous la forme de conditions non intégrables.

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial q_k}{\partial t} + b_k = 0 \text{ avec } a_k(q_k, t) \text{ et } b_k(q_k, t)$$

Cette relation traduit une liaison non holonome sauf si $a_k = \frac{\partial f}{\partial q_k}$ et $\sum_{k=1}^n b_k = \frac{\partial f}{\partial t}$. Alors dans ce seul cas nous avons à faire à la dérivée par rapport au temps de la relation $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$.

Remarque : Une liaison parfaite entre deux solides peut toujours s'exprimer sous la forme d'une fonction $f = 0$.

Si **toutes** les liaisons supplémentaires omises lors du paramétrage sont holonomes alors il est possible d'utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte les relations supplémentaires:

Supposons que la relation se présente sous la forme : $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$, les équations de Lagrange se présentent sous la forme :

$$\mathcal{L}_{q_k} : \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_k} = \left(\sum_{i=1}^n Q_{q_k}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n Q_{q_k}(S_j \leftrightarrow S_i) \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_k}$$

tous les efforts sauf ceux de la liaison complémentaire

λ est le multiplicateur de Lagrange il est identique aux efforts transmis par la liaison. Remarquons que ce multiplicateur est une inconnue du problème.

S'il y a plusieurs liaisons :

$$f_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

$$f_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

$$f_m(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

Les équations se présentent alors de la façon suivante :



$$\begin{aligned} \sum q_k : \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T(S_i/\mathcal{R}_g)}{\partial q_k} = & \left(\sum_{i=1}^n Q_{q_k}(\text{extérieur à } \Sigma \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n Q_{q_k}(S_j \leftrightarrow S_i) \right) \\ & \text{tous les efforts sauf ceux de la liaison complémentaire} \\ & + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_k} \end{aligned}$$



VII Stabilité et mouvements particuliers

VII.1 Introduction

Nous sommes dans le cadre où la position du système étudié $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ est repérée par n paramètres $q_1, q_2, \dots, q_n$ et la variable t . Nous avons vu au cours d'exemples précédents que les équations représentatives du mouvement sont des équations différentielles non linéaires de degré deux (dérivées secondes). La détermination de l'évolution des paramètres à partir de ces équations est très difficile. Deux méthodes sont envisageables :

- Numériques
- Analytiques.

La première est applicable à toutes les situations mais attention elle n'est pas triviale car non automatique. Il est nécessaire d'adapter la méthode à chaque situation (intégration explicite ou implicite, analyse modale, choix des amortissements,.....).

La seconde demande de l'ingéniosité et n'est possible que dans des cas simples ou plus particuliers tels que :

- la détermination de positions d'équilibre,
- la détermination au voisinage de cette position du mouvement,
- la détermination des mouvements stationnaires,
- la détermination des oscillations autour des mouvements stationnaires.

VII.2 Equilibre

Plusieurs équilibres sont définissables :

Equilibre par rapport à un paramètre :

On dit qu'il y a équilibre pour le paramètre q_j avec j fixé s'il existe des Conditions Initiales :

$$q_i(t_0) = q_{i0} ; \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0} \text{ pour } i \neq j$$

$$q_j(t_0) = q_{je} ; \dot{q}_j(t_0) = 0$$

telles que les équations du mouvement conduisent à la solution : $q_j(t) = q_{je} \forall t$.

Equilibre paramétrique :

On dit qu'il y a équilibre paramétrique s'il existe des Conditions Initiales :

$$q_i(t_0) = q_{ie} \forall i ; \dot{q}_i(t_0) = 0$$

telles que les équations du mouvement conduisent à la solution : $q_j(t) = q_{je} \forall t \forall i$.

Démarche :



Pour déterminer les équilibres paramétriques il suffit de remplacer $\ddot{q}_i(t)$ et $\ddot{q}_i(t)$ par 0 dans le système d'équations différentielles. On obtient alors un système à n équations et n inconnues $q_{1e}, q_{2e}, \dots, q_{ne}$ qui peut admettre une ou plusieurs solutions.

Si l'on obtient une position d'équilibre, les questions qu'il est naturel de se poser sont :

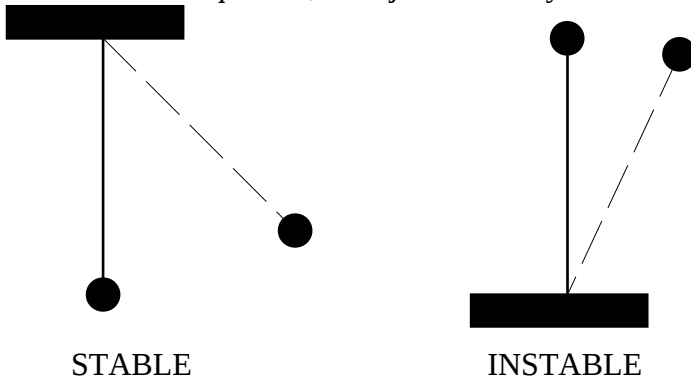
- L'équilibre est-il stable ?
- Que se passe-t-il si l'on se décale légèrement de cette position d'équilibre ?

VII.3 Stabilité d'un Equilibre Paramétrique

L'état d'équilibre paramétrique $\mathbf{q}_e (q_{1e}, q_{2e}, \dots, q_{ne})$ est dit STABLE si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0$ et $\mu > 0 \exists \eta > 0$ et $\nu > 0$ tels que pour toutes les Conditions Initiales $q_i(t_0) = q_{i0}$; $\dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}$ vérifiant $|q_{i0} - q_{ie}| \leq \eta$ et $|\dot{q}_{i0}| \leq \nu$ on ait $\forall t \geq t_0, |q_i(t) - q_{ie}| \leq \varepsilon$ et $|\dot{q}_i(t)| \leq \mu$

Si ε et μ sont "petits" la stabilité est dite Conditionnelle et si ε et μ sont ∞ la stabilité est dite globale. Autrement dit un équilibre est stable si le système étant dans des conditions initiales "voisines" de l'équilibre, la trajectoire du système reste dans un voisinage de la position d'équilibre.



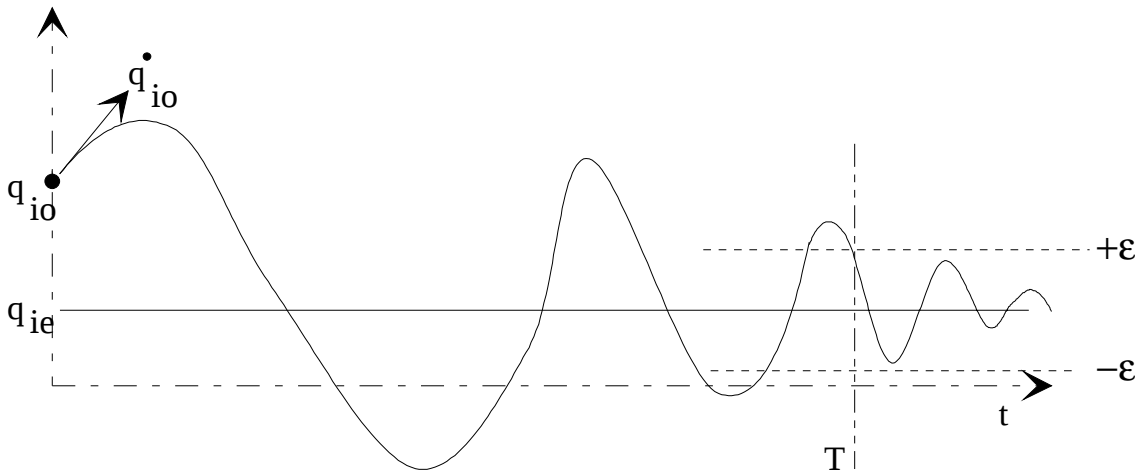
Notion d'équilibre asymptotique :

L'état d'équilibre paramétrique $\mathbf{q}_e (q_{1e}, q_{2e}, \dots, q_{ne})$ est dit ASYMPTOTIQUEMENT STABLE si et seulement si $\exists \eta > 0$ et $\nu > 0$ tels que pour toutes les conditions initiales $q_i(t_0) = q_{i0}$;

$\dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}$ vérifiant $|q_{i0} - q_{ie}| \leq \eta$ et $|\dot{q}_{i0}| \leq \nu$ on ait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |q_i(t) - q_{ie}| = 0$$

ou $\forall \varepsilon > 0 \exists T \forall t > T |q_i(t) - q_{ie}| < \varepsilon$



L'équilibre asymptotique ajoute une notion de temps à la notion de stabilité. Au bout d'un certain temps on tend vers la position d'équilibre.

Remarque : Cette définition de la stabilité nécessite la résolution des équations différentielles traduisant le mouvement autour de la position d'équilibre lorsque l'on décale le système par rapport à cette position. Ce n'est pas le cas du théorème de Lejeune Dirichlet qui fournit une condition suffisante de stabilité de l'équilibre sous certaines hypothèses.

Théorème de Lejeune Dirichlet :

Soit un système Σ dont les liaisons sont indépendantes du temps, soumis à des forces données dérivant d'un potentiel indépendant du temps. Si pour une position d'équilibre $\mathbf{q}_e$ du système, le potentiel est MINIMUM STRICT, alors $\mathbf{q}_e$ est une position d'équilibre STABLE.

Commentaires :

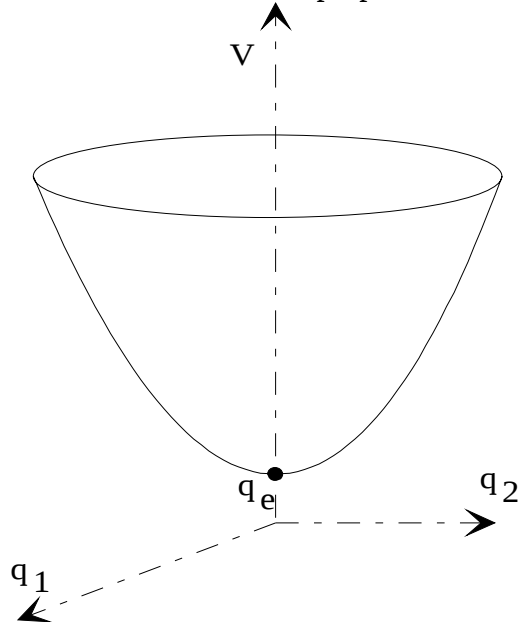
- Dans l'énergie potentielle peuvent intervenir aussi bien des actions extérieures qu'intérieures.
- Le théorème ne suppose pas des liaisons parfaites.
- La démonstration montre que le théorème s'applique à tout système dont la position est définie par un nombre fini de paramètres géométriques.
- La condition de minimum strict n'est pas nécessaire. Un corps soumis à son poids pouvant glisser avec frottement sur un plan incliné est en équilibre stable.
- La condition de minimum large n'est pas suffisante : une bille pouvant rouler sans glisser sur un plan n'est pas en équilibre stable.

Pour déterminer si le minimum est strict on étudie le signe de $\delta^2 V$ au point d'équilibre $\mathbf{q}_e$ ou la forme quadratique qui est représentée par une matrice dite de rigidité. Les composantes de cette matrice sont obtenues à partir du potentiel de la façon suivante :

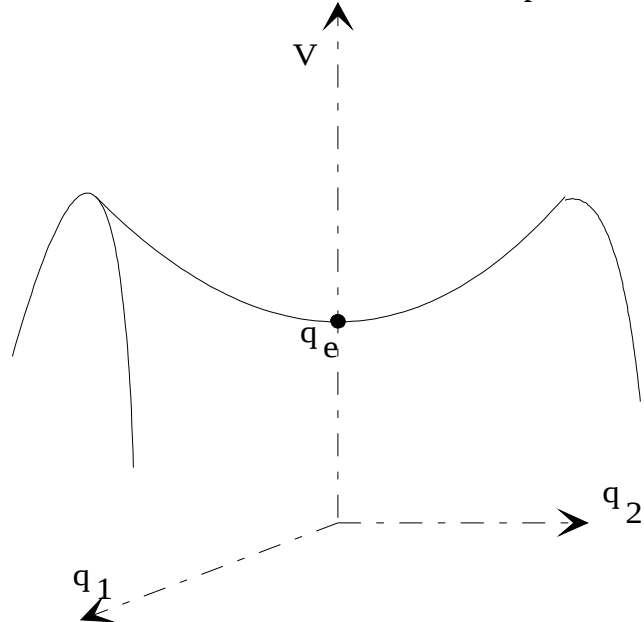
$$K_{ij} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{q}_e)}{\partial q_i \partial q_j}$$



- Si elle est définie positive ou si toutes les valeurs propres sont strictement positives $V(\mathbf{q}_e)$ est un minimum strict.
- Si elle n'est pas définie positive, des valeurs propres sont > 0 et des valeurs propres sont < 0 alors $V(\mathbf{q}_e)$ n'est pas un minimum et il est possible de montrer que l'équilibre est instable.
- Si certaines valeurs propres sont nulles, il faut considérer les dérivées d'ordre supérieures.



Cas DEFINIE POSITIVE
STABLE



Cas non DEFINIE POSITIVE
INSTABLE

L'équilibre $\mathbf{q}_e$ est stable si les valeurs propres de la matrice $[K]$ sont > 0 . Les valeurs propres λ_i de la matrice K sont racines de l'équation déterminant $\det [K - \lambda I] = 0$ où I est la matrice identité.

Dans le cas d'un système à deux paramètres :

$$K_{ij}(\mathbf{q}_e) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_1} \right)_{\mathbf{q}_e} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_{\mathbf{q}_e} \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_{\mathbf{q}_e} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_2} \right)_{\mathbf{q}_e} \end{pmatrix}$$

les racines de $\det \{[K] - \lambda [I]\} = 0$ sont > 0 si le produit des deux racines sont > 0 ainsi que leur somme.

$\det \{[K] - \lambda [I]\} = 0$ nous donne:

$$(K_{11} - \lambda)(K_{22} - \lambda) - (K_{12})^2 = 0$$

ou encore

$$\lambda^2 - (K_{11} + K_{22})\lambda + K_{11}K_{22} - (K_{12})^2 = 0$$

écrit autrement

$$\lambda^2 - S\lambda + P = 0$$



où S est la somme des deux racines et P le produit par conséquent les deux racines sont > 0 si et seulement si :

$$S > 0 \text{ ou } K_{11} + K_{22} > 0 \text{ ou } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_1} \right)_{q_e} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_2} \right)_{q_e} > 0$$

et

$$P > 0 \text{ ou } K_{11} K_{22} - (K_{12})^2 > 0 \text{ ou } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_1} \right)_{q_e} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_2} \right)_{q_e} - \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_{q_e} \right)^2 > 0$$

Intérêt de théorème de Lejeune-Dirichlet:

Le théorème ne nécessite pas l'écriture des équations du mouvement. Aucune résolution d'équations différentielles n'est nécessaire, il suffit juste de calculer le Potentiel, d'établir la matrice de rigidité $[K]$ puis étudier les valeurs propres de cette matrice.

Lacunes du Théorème :

Le théorème ne donne aucun renseignement sur la trajectoire du système écarté de sa position d'équilibre. Pour obtenir ces informations il est nécessaire de résoudre les équations différentielles traduisant le mouvement autour de la position d'équilibre. Dans la majeure partie des cas les équations sont non linéaires et il est impossible de résoudre analytiquement ces équations. Toutefois l'étude porte généralement sur les mouvements avoisinant l'équilibre et dans ce cas il est possible d'obtenir ces informations en linéarisant les équations. Nous verrons l'utilisation de cette technique de linéarisation dans un chapitre ultérieur.

VII.4 Mouvement permanent ou stationnaire

Définition :

Le mouvement d'un système matériel Σ est dit stationnaire s'il existe des Conditions Initiales :

$$q_i(t_0) = q_{is} ; \dot{q}_i(t_0) = 0 \quad \forall i=1, \dots, p$$

$$q_k(t_0) = q_{ks} ; \dot{q}_k(t_0) = \dot{q}_{ks} \quad \forall k=p+1, \dots, n$$

telles que les équations du mouvement conduisent à la solution :

$$q_i(t) = \text{constante} = q_{is} \quad \forall i=1, \dots, p.$$

$$\dot{q}_k(t) = \text{constante} = \dot{q}_{ks} \quad \forall k=p+1, \dots, n.$$

Pratiquement pour déterminer les mouvements stationnaires d'un système de solide, on remplace dans le système différentiel qui régit les mouvements

$$\dot{q}_i(t) \text{ et } \ddot{q}_i(t) \text{ par } 0 \quad \forall i=1, \dots, p$$

$$\text{et } \ddot{q}_k(t) \text{ par } 0 \quad \forall k=p+1, \dots, n$$

Remarque :

Cette définition ne nécessite pas que les liaisons du système soient holonomes et indépendantes du temps, comme cela était le cas pour la définition de l'équilibre d'un système, En particulier tous les



paramètres d'un système peuvent être constants au cours du mouvement lorsque existent des liaisons dépendantes du temps (sans qu'il y ait pour cela d'équilibre général), on dit alors que le système est en EQUILIBRE STATIONNAIRE.

Stabilité d'un mouvement Stationnaire :

Le mouvement stationnaire d'un système matériel est STABLE si :

$\forall \varepsilon > 0$ et $\mu > 0 \exists \eta > 0$ et $\nu > 0$ tels que pour toutes les Conditions Initiales $q_i(t_0)=q_{i0}$; $\dot{q}_i(t_0)=\dot{q}_{i0}$ vérifiant $|q_{i0} - q_{is}| \leq \eta$ et $|\dot{q}_{i0}| \leq \nu$ on ait $\forall t \geq t_0$, $|q_i(t) - q_{ie}| \leq \varepsilon$ et $|\dot{q}_i(t)| \leq \mu$ pour $\forall i=1, \dots, p$

L'étude de la stabilité d'un mouvement stationnaire est en général difficile car il n'existe pas d théorème aussi général que celui proposé par Lejeune-Dirichlet. Seules quelques classes particulières de problème conduisent à des théorèmes efficaces. La seule méthode qui "marche à tout coup" est d'étudier le mouvement en résolvant les équations linéarisées.

VII.5 Technique de linéarisation

VII.5.i Présentation

Pour mettre en évidence la stabilité d'une position d'équilibre l'idée est d'étudier le mouvement réel du système lorsque l'on perturbe le système avec des Conditions Initiales "voisines" de la position d'équilibre. L'étude du mouvement réel est très difficile car il faut résoudre les équations nonlinéaires du mouvement. La solution consiste à étudier un mouvement "voisin" dont les équations sont linéaires.

VII.5.ii Méthodologie

1 : On effectue un changement de variable en posant :

Cas d'un équilibre $\forall i=1, \dots, n$

$$q_i = q_{ie} + \varepsilon_i$$

$$\dot{q}_i = \dot{\varepsilon}_i$$

$$\ddot{q}_i = \ddot{\varepsilon}_i$$

Cas d'un mouvement permanent $\forall i=1, \dots, p$

$$q_i = q_{is} + \varepsilon_i$$

$$\dot{q}_i = \dot{\varepsilon}_i$$

$$\ddot{q}_i = \ddot{\varepsilon}_i$$

2 : On perturbe le système en le décalant **légèrement** de sa position d'équilibre ou de la trajectoire de son mouvement permanent. (Techniques de perturbation).

Ceci conduit à supposé que les grandeurs $\varepsilon_i(t)$, $\dot{\varepsilon}_i(t)$, $\ddot{\varepsilon}_i(t)$ sont des infiniment petits du premier ordre.

3 : La linéarisation consiste à développer (Taylor) les fonctions intervenant dans les équations à partir de la position d'équilibre ou par rapport à la position correspondant au mouvement permanent. Une fois ce développement effectué il suffit d'éliminer les termes d'ordre supérieurs à 1



(exemple de terme d'ordre 2 $(\ddot{\epsilon}_i)^2$, $\ddot{\epsilon}_i \ddot{\epsilon}_j$, exemple de terme d'ordre 3 $\ddot{\epsilon}_i (\ddot{\epsilon}_i^2)$,). Finalement nous obtenons des équations linéarisées qui traduisent un mouvement voisin du mouvement réel.

4 : Comme les équations sont linéaires il est possible de les résoudre analytiquement et d'étudier le mouvement linéarisé. Par conséquent il est envisageable de conclure quant à sa stabilité.

5 : De manière rigoureuse il est nécessaire de mettre en place des théorèmes adaptés aux diverses situations pour apporter une conclusion sur la stabilité du mouvement réel. La mise en place de cet environnement mathématique n'est pas l'objet de ce cours. Nous supposons dans les exercices traités que la stabilité du mouvement réel est identique à la stabilité du mouvement linéarisé.

VII.5.iii Présentation de la Technique de Linéarisation pour une classe particulière de système

Hypothèses :

- * Les liaisons sont indépendantes du temps
- * Les actions sont indépendantes du temps
- * Le paramétrage est strict
- * Les liaisons sont holonomes ou les actions proportionnelles aux vitesses

Dans ce cadre les équations s'expriment de la façon suivante :

$$\mathcal{L} / q_i : M_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \text{ ou } \mathbf{q}^T = (q_1, \dots, q_n) \text{ et } \dot{\mathbf{q}}^T = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

Remarquons dans le cas d'une position d'équilibre pour tout i nous avons ces relations :

$$f_i(\mathbf{q}_e, 0) = 0$$

Le changement de variable $q_i = q_{ie} + \epsilon_i$, $\dot{q}_i = \dot{\epsilon}_i$, $\ddot{q}_i = \ddot{\epsilon}_i$ conduit aux équations suivantes

$$\mathcal{L} / q_i : M_{ij}(\mathbf{q}_e + \boldsymbol{\epsilon}) \ddot{\epsilon}_j + f_i(\mathbf{q}_e + \boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = 0$$

Les composantes du vecteur $\boldsymbol{\epsilon}$ sont des infiniment petits du second ordre, il est possible de développer M_{ij} et f_i par rapport à $\boldsymbol{\epsilon}$. Le développement de Taylor donne les équations suivantes :

$$\left(M_{ij}(\mathbf{q}_e) + \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_j} \right)_{\mathbf{q}_e} \epsilon_k + \left(\frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial q_j \partial q_k} \right)_{\mathbf{q}_e} \frac{\epsilon_k^2}{2!} + \dots \right) \ddot{\epsilon}_j + f_i(\mathbf{q}_e, 0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_k} \right)_{\mathbf{q}_e} \dot{\epsilon}_k + \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \right)_{\mathbf{q}_e} \frac{\dot{\epsilon}_k \dot{\epsilon}_l}{2!} + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right)_{\mathbf{q}_e} \epsilon_k + \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial q_l} \right)_{\mathbf{q}_e} \frac{\epsilon_k \epsilon_l}{2!} + \dots = 0$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs à 2 et en simplifiant les indices muets, les équations se résument à :

$$M_{ij}(\mathbf{q}_e) \ddot{\epsilon}_j + f_i(\mathbf{q}_e, 0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{\mathbf{q}_e} \dot{\epsilon}_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right)_{\mathbf{q}_e} \epsilon_j = 0 \text{ avec la relation } f_i(\mathbf{q}_e, 0) = 0$$



on obtient les équations linéarisées suivantes :

$$M_{ij}(\mathbf{q}_e) \ddot{\varepsilon}_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \right)_{\mathbf{q}_e} \dot{\varepsilon}_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right)_{\mathbf{q}_e} \varepsilon_j = 0$$

Ce sont bien des équation linéaires puisque les termes en produit de $\ddot{\varepsilon}_j$, $\dot{\varepsilon}_j$, ε_j sont constant.

Le mouvement linéarisé autour de la position d'équilibre est décrit par les fonctions $t \rightarrow \varepsilon_j(t)$

La démarche est identique dans des cas plus compliqués ou dans les mouvements voisins de mouvement stationnaires. Il peut apparaître un second membre dépendant du temps ou au pire les coefficients peuvent eux-mêmes dépendre du temps.

ATTENTION : La trajectoire du mouvement réel est plus ou moins différent de ce dernier, cela dépend uniquement de la non linéarité du problème.