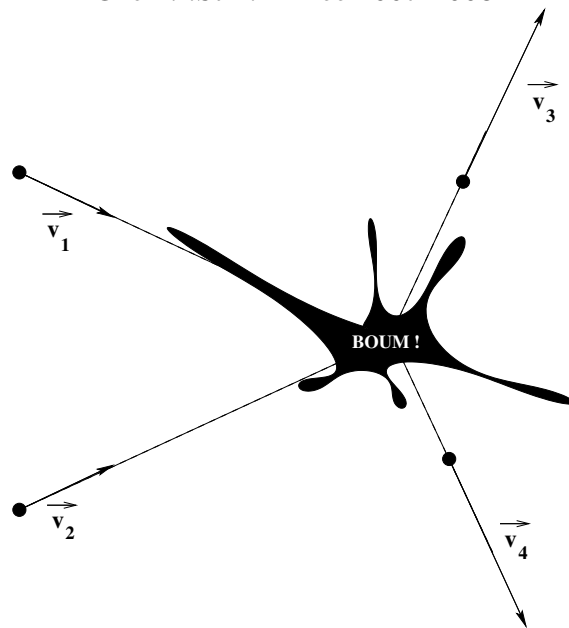


# MÉCANIQUE NEWTONIENNE

Chem.I.St-1. Année 2007-2008





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Description du mouvement d'un point</b>	<b>7</b>
1.1	Espace et temps . . . . .	7
1.1.1	L'espace . . . . .	7
1.1.2	Le temps . . . . .	7
1.1.3	Postulats newtoniens . . . . .	8
1.2	Description du mouvement . . . . .	8
1.2.1	Vecteurs position, vitesse et accélération . . . . .	8
1.2.2	Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes . . . . .	9
1.2.3	Vitesse en coordonnées cylindrique . . . . .	9
1.2.4	Vitesse et accélération en coordonnées intrinsèques . . . . .	10
1.2.5	Exemples . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Dynamique du point en référentiel galiléen</b>	<b>13</b>
2.1	Équation du mouvement . . . . .	13
2.1.1	Notion de force . . . . .	13
2.1.2	Référentiels galiléens. Lois de Newton . . . . .	15
2.1.3	Principe d'équivalence . . . . .	16
2.1.4	Cas d'un système de points . . . . .	16
2.2	Exemples d'application . . . . .	17
2.2.1	Chute libre sans frottement . . . . .	17
2.2.2	Chute libre avec résistance de l'air . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Aspects énergétiques</b>	<b>21</b>
3.1	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	21
3.1.1	Puissance et travail d'une force . . . . .	21
3.1.2	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	22
3.2	Énergies potentielles . . . . .	22
3.2.1	Forces conservatives . . . . .	22
3.2.2	Exemples . . . . .	22

3.3	Énergie mécanique . . . . .	23
3.3.1	Cas de conservation de l'énergie mécanique . . . . .	23
3.3.2	Cas de non conservation de l'énergie mécanique . . . . .	23
3.4	Problèmes à un degré de liberté . . . . .	23
3.4.1	Utilisation d'une représentation graphique . . . . .	23
3.4.2	Approche du portrait de phase . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Changements de référentiel</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1	Cinématique . . . . .	27
4.1.1	Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre . . . . .	27
4.1.2	Formule de dérivation vectorielle . . . . .	28
4.1.3	Lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation . . . . .	29
4.1.4	Lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe . . . . .	30
4.1.5	Généralisation . . . . .	31
4.2	Dynamique en référentiel non galiléen . . . . .	31
4.2.1	Principe de relativité galiléenne . . . . .	31
4.2.2	Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen . . . . .	32
4.2.3	Aspect énergétique . . . . .	32
4.2.4	Caractère galiléen de quelques référentiels . . . . .	33
4.2.5	Exemples qualitatifs . . . . .	34
4.3	Applications . . . . .	34
4.3.1	La pesanteur terrestre . . . . .	34
4.3.2	La déviation vers l'Est . . . . .	35
4.3.3	Les marées . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Oscillateurs</b> . . . . .	<b>39</b>
5.1	Oscillateurs harmoniques . . . . .	39
5.1.1	Définition . . . . .	39
5.1.2	Approximation harmonique . . . . .	39
5.1.3	Exemples . . . . .	40
5.2	Oscillations amortis . . . . .	42
5.2.1	Définition . . . . .	42
5.2.2	Solutions . . . . .	42
5.3	Oscillateur linéaire amorti en régime sinus forcé . . . . .	43
5.3.1	Mise en équation . . . . .	43
5.3.2	Solution . . . . .	44
5.3.3	Résonances . . . . .	44
5.3.4	Analogies électromécaniques . . . . .	45

---

<b>6</b>	<b>Théorème du moment cinétique</b>	<b>47</b>
6.1	Moment d'une force . . . . .	47
6.1.1	Moment d'une force par rapport à un point . . . . .	47
6.1.2	Moment d'une force par rapport à un axe orienté . . . . .	47
6.2	Moment cinétique . . . . .	48
6.2.1	Moment cinétique par rapport à un point . . . . .	48
6.2.2	Moment cinétique par rapport à un axe orienté . . . . .	48
6.3	Théorème du moment cinétique . . . . .	48
6.3.1	Énoncé . . . . .	48
6.3.2	Application au pendule simple . . . . .	49
6.3.3	Cas d'un système de points . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives</b>	<b>51</b>
7.1	Forces centrales conservatives . . . . .	51
7.1.1	Généralités . . . . .	51
7.1.2	Exemples . . . . .	51
7.2	Lois générales de conservation . . . . .	52
7.2.1	Conservation du moment cinétique . . . . .	52
7.2.2	Conservation de l'énergie . . . . .	52
7.3	Mouvement dans un champ de forces centrales newtonien . . . . .	53
7.3.1	Cas particulier du mouvement circulaire . . . . .	54
7.3.2	solution générale $r(\theta)$ . . . . .	54
7.3.3	Lois de Képler . . . . .	55
7.3.4	Vitesses cosmiques . . . . .	58
7.4	Problème à N corps . . . . .	58
7.4.1	Problème à deux corps . . . . .	58
7.4.2	Retour sur le problème de Képler . . . . .	59
7.4.3	Problème à $N > 2$ corps . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Les collisions</b>	<b>61</b>
8.1	Généralités . . . . .	61
8.1.1	Position du problème . . . . .	61
8.1.2	Relations de conservation . . . . .	62
8.2	Exemples . . . . .	63
8.2.1	Collision élastique . . . . .	63
8.2.2	Collision inélastique . . . . .	64

<b>A Outils mathématiques</b>	<b>65</b>
A.1 Systèmes de coordonnées . . . . .	65
A.2 Intégrales multiples . . . . .	67
A.3 Le Produit vectoriel . . . . .	67
A.3.1 Définition . . . . .	67
A.3.2 Propriétés . . . . .	68
A.4 Opérateur gradient . . . . .	68
<b>B Quelques portraits de phase</b>	<b>71</b>
B.1 Le pendule simple . . . . .	71
B.2 L'oscillateur linéaire amorti . . . . .	72

# Chapitre 1

## Description du mouvement d'un point

### 1.1 Espace et temps

#### 1.1.1 L'espace

**Repère d'espace** : c'est un espace métrique : Nous disposons d'instruments de mesure permettant de repérer la position des points, leur orientation ainsi que leur distance mutuelle. On peut définir un système d'axe permettant de repérer la position d'un point. L'instrument de mesure exige la connaissance d'un étalon de mesure des distances : le *mètre* du Système International.

**Étalon mètre** : (qui a connu en deux siècles quatre définitions successives) : d'abord lié à un système supposé invariable, la longueur du méridien terrestre (1795), le mètre devient en 1889 associé au prototype international, étalon matériel particulier en platine iridié ; les progrès de la spectroscopie et de la physique quantique conduisent à retenir en 1960 un multiple de la longueur d'onde d'une radiation résonante sur une transition dans l'atome de krypton. En 1983, la définition du mètre change une dernière fois : il est désormais établi à partir du phénomène de propagation de la lumière dans le vide. La distance parcourue par la lumière dans le vide pendant 1 seconde vaut, par définition du mètre,  $L = 299\,792\,458\text{ m}$ . L'étalon mètre est donc relié à l'étalon seconde.

**NB** : Initialement, le mètre était défini à partir de la longueur du méridien terrestre :  $L = 40000\text{ km}$ . Aujourd'hui, avec l'étalon mètre actuel (lié à l'étalon seconde)  $L = 40008,08\text{ km}$  ; la différence est donc imperceptible pour les utilisateurs courants.

#### 1.1.2 Le temps

**repère temporel** : Nous disposons d'instruments, appelés horloges, permettant de repérer les événements les uns par rapport aux autres avec une certaine chronologie. La mesure des durées nécessite un étalon de mesure du temps : la *seconde* du Système International.

**Étalon seconde** : La seconde est aujourd'hui réalisée avec une exactitude relative de  $10^{-14}$ , à l'aide d'une horloge atomique, matérialisant la période de transition dans l'atome de césium.  $1\text{ s}$  = durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondante à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'atome  $^{133}\text{Cs}$ .

**Référentiel** : repère d'espace + repère temporel.

**NB** : Initialement le temps était défini à partir du jour solaire moyen  $J$  par la relation  $J = 86400\text{ s}$ . Aujourd'hui, avec la définition de l'étalon seconde, on a  $J = 86400,003\text{ s}$ .

### 1.1.3 Postulats newtoniens

1. isochronisme des horloges : le temps s'écoule indépendamment de l'espace ce qui permet de définir un temps universel.
2. Notre espace est un espace euclidien à trois dimensions.
3. le temps et l'espace sont continus.
4. Notion de point matériel et de trajectoire. On appelle point matériel un système dont l'état mécanique peut être défini à l'aide de 3 coordonnées de l'espace et d'une coordonnée de temps. L'évolution de la position du point au cours du temps donne la trajectoire.

**NB** : Au 20ème siècle, trois théories ont bouleversé la physique classique :

La théorie de la relativité restreinte qui conduit à abandonner l'hypothèse d'isochronisme des horloges.

La relativité générale, menant, elle, à l'abandon de l'espace euclidien.

Enfin, la mécanique quantique qui conduit à oublier la notion de trajectoire.

## 1.2 Description du mouvement

### 1.2.1 Vecteurs position, vitesse et accélération

**vecteur position** :  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t)$ . (Unité :  $m$ )

**équation horaire** : abscisse curviligne  $s(t)$  est la distance d'arc  $M_0M(t)$  où  $M_0$  est pris pour origine.

**vecteur vitesse** : Par définition on appelle vecteur vitesse instantanée du point  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \quad (\text{m.s}^{-1})$$

Il en résulte que le *vecteur vitesse est tangent à la trajectoire*.

**vecteur accélération** : Par définition, l'accélération d'un point matériel  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  est le vecteur

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) \quad (\text{m.s}^{-2})$$

**Trajectoire** : courbe décrite par  $M$  lorsque le temps s'écoule. Dans le référentiel considéré, la trajectoire peut être :

- rectiligne : la trajectoire est une droite. ,
- circulaire : la trajectoire est un cercle ; la trajectoire est donc plane.
- curviligne : la trajectoire est une courbe.
- hélicoïdale : la trajectoire est une hélice.

Le mouvement peut être :

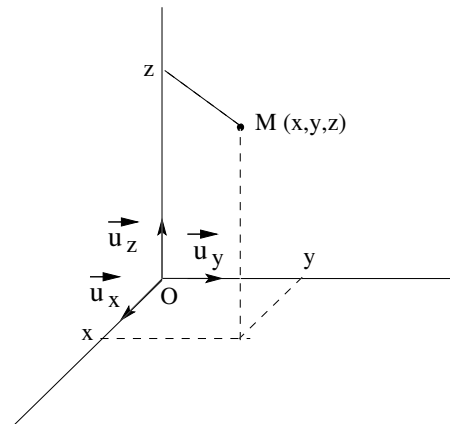
- uniforme : la *valeur algébrique* de la vitesse est constante mais le *vecteur vitesse* n'est pas forcément constant.
- uniformément varié : la valeur algébrique de l'accélération tangentielle est constante.
- accéléré : la valeur algébrique de la vitesse augmente ; la composante tangentielle de l'accélération est dans le sens du mouvement.
- ralenti : la valeur algébrique de la vitesse diminue, la composante tangentielle de l'accélération est dans le sens contraire du mouvement.

**Remarques** :

1. ATTENTION : En général  $a \neq \frac{dv}{dt}$  !!!
2. la vitesse et l'accélération sont des notions relatives à un référentiel. Une fois le référentiel choisi, la vitesse ne prend qu'une valeur à un instant  $t$ . Cependant il existe différentes façons de l'exprimer puisque l'on peut choisir différentes bases de projection. Dans tous les cas, la norme de la vitesse ne dépend pas de la base choisie.



### 1.2.2 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes



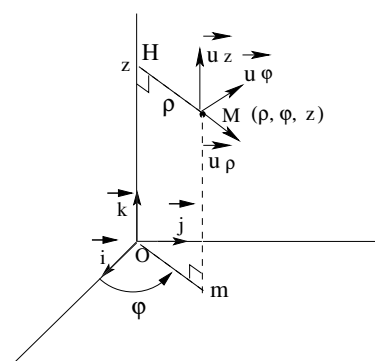
Système cartésien :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) = v_x \\ \frac{dy}{dt}(t) = v_y \\ \frac{dz}{dt}(t) = v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2}(t) = a_x \\ \frac{d^2y}{dt^2}(t) = a_y \\ \frac{d^2z}{dt^2}(t) = a_z \end{pmatrix}$$

### 1.2.3 Vitesse en coordonnées cylindrique

**coordonnées cylindriques** :  $\rho, \varphi, z$ . Le vecteur position, exprimé dans la base locale s'écrit :

$$\vec{r} = \rho(t) \vec{u}_\rho + z(t) \vec{u}_z$$



H : projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz)  
m : projeté orthogonal de M sur le plan (xOy)

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

**Dérivation** : On a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} &= \vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} &= -\vec{u}_\rho \end{aligned}$$

vitesse :

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \frac{d\rho}{dt}(t) = v_\rho \\ \rho \frac{d\varphi}{dt}(t) = v_\varphi \\ \frac{dz}{dt} = v_z \end{cases}$$

### 1.2.4 Vitesse et accélération en coordonnées intrinsèques

**Trièdre de Frenet** : on définit la base orthonormée directe  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  telle qu'à chaque instant  $\vec{T}$  soit tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens positif,  $\vec{N}$  soit normal à la trajectoire et orienté vers le centre du cercle localement tangent à la trajectoire (cercle osculateur). On montre que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= \vec{T} \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= \frac{1}{R} \vec{N} \end{aligned}$$

où  $R$  désigne le *rayon de courbure* de la trajectoire au point considéré.

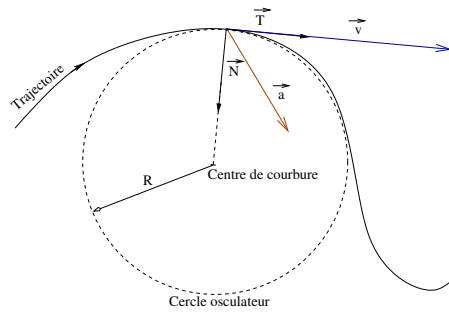


FIG. 1.1 – *Repère de Frenet.*

**Vitesse** : On obtient

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

**Accélération** : L'accélération se décompose en deux contributions : l'une dépend de la courbure de la trajectoire, l'autre dépend de la variation de la norme de la vitesse :

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

### 1.2.5 Exemples

- mouvement de vecteur accélération constant :

$$\vec{a} = \vec{C}^{te} \Rightarrow \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré on a  $\Delta v^2 = 2a\Delta s$

- mouvement circulaire de rayon  $R$  :

$$\vec{v} = R\omega\vec{e}_\varphi$$

où  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  désigne la vitesse angulaire de rotation (en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ). On notera que la vitesse peut aussi s'écrire :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

où  $O$  est un point de l'axe de rotation et  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  le vecteur unitaire associé à l'axe de rotation par la règle du tire-bouchon.  
L'accélération s'écrit

$$\vec{a} = R \frac{d\omega}{dt} \vec{T} + R\omega^2 \vec{N}$$

On retiendra que pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est perpendiculaire à la trajectoire



## Chapitre 2

# Dynamique du point en référentiel galiléen

## 2.1 Équation du mouvement

### 2.1.1 Notion de force

La dynamique relie le mouvement observé à ses causes, elle fait intervenir une caractéristique matérielle de l'objet : sa *masse inerte*. Les causes admettent une représentation vectorielle sous le nom de forces. Chaque force possède un point d'application, une droite d'action, un sens et une intensité : c'est un **vecteur lié**.

Voici quelques exemples :

#### Forces à distance :

- Force de gravitation : La force entre deux masses ponctuelles est toujours attractive. Elle s'exprime grâce à la loi de Newton :

$$\vec{F}_{1/2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1-2}$$

avec  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$  (SI) la constante de gravitation universelle.  $m_1$  et  $m_2$  désignent les masses « graves ».

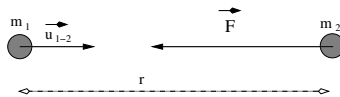


FIG. 2.1 – Force de gravitation exercée par la masse  $m_1$  sur la masse  $m_2$

- Force électrostatique : La force entre deux particules chargées électriquement est soit attractive soit répulsive. L'état électrique des particules est caractérisée par leur charge électrique  $Q$ , scalaire positif ou négatif. Deux charges de même signe se repoussent. Loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1-2}$$

avec  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  (SI).

- La force magnétique de Lorentz s'exerce sur une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse et au champ magnétique :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

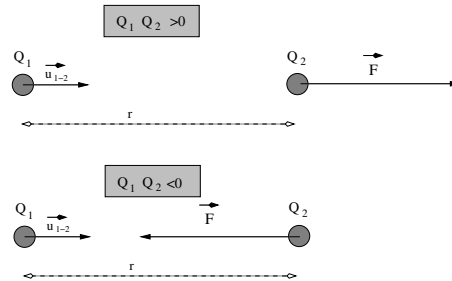


FIG. 2.2 – Force électrostatique exercée par la particule de charge électrique  $Q_1$  sur la particule de charge  $Q_2$

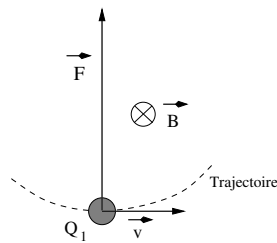


FIG. 2.3 – Force de Lorentz.

- Force de pesanteur : (cf. chapitre sur les référentiels non galiléens)

$$P = mg$$

#### Forces de contact :

- Contact solide-solide : le contact entre deux solide fait apparaître deux forces : une force  $\vec{N}$  normale au support et une force  $\vec{T}$  tangentielle au support qui s'oppose au glissement.

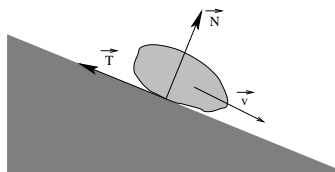


FIG. 2.4 – Forces de contact.

- Lorsqu'il y a glissement sans frottement on a  $T = 0$ .
- Lorsqu'il y a glissement avec frottement, on a  $T = \mu_d N$  où  $\mu_d$  désigne le coefficient de frottement dynamique.
- Lorsqu'il n'y a pas glissement, on dit qu'il y a adhérence et l'on a  $T < \mu_s N$  où  $\mu_s$  désigne le coefficient de frottement statique (en pratique  $\mu_s \approx \mu_d$  tout en restant supérieur).  
Ces lois phénoménologiques sont appelées **lois de Coulomb sur le frottement**.
- Contact solide-fluide : Lorsqu'un fluide s'écoule autour d'un obstacle solide, deux actions apparaissent (voir figure 2.5) :
  - la force de traînée qui pousse l'obstacle dans la direction de l'écoulement. C'est cette force qui est responsable du frottement à l'avancement des véhicules : on a

$$T = \frac{1}{2} \mu v^2 S C_x$$

où  $C_x$  désigne le coefficient de traînée,  $\mu$  la masse volumique du fluide,  $v$  la vitesse d'écoulement (loin de l'obstacle) et  $S$  la section droite maximum de l'obstacle.

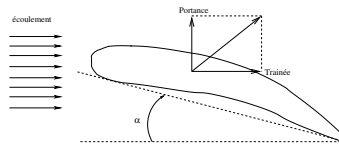


FIG. 2.5 –

- la force de portance perpendiculaire à la vitesse. Cette force apparaît dès que l'obstacle est asymétrique. C'est cette force qui est responsable du décollage des avions.

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_z$$

- Dans le cas particulier d'une bille en mouvement lent dans un fluide, la portance disparaît et la traînée devient proportionnelle à la vitesse (**loi de Stokes** ; cf. *Cours de Mécanique des Fluides 2ème Année*) :

$$T = \alpha v$$

où  $\alpha$  dépend de la viscosité du fluide et de la taille de la bille.

- o Tension élastique : lorsque l'on allonge un ressort, apparaît une force de rappel

$$\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{u}_x$$

avec  $l_0$  la longueur à vide du ressort,  $l$  la longueur du ressort et  $k$  la constante de raideur (en N/m).

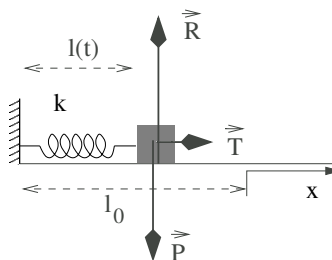


FIG. 2.6 – Le ressort élastique.

### 2.1.2 Référentiels galiléens. Lois de Newton

À tout point matériel, on peut associer un scalaire positif mesurant son inertie : il s'agit de la masse inerte  $m$ . Une particule en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , acquiert une quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

**Principe d'inertie** : Dans un *référentiel galiléen*, une particule libre conserve sa quantité de mouvement.

**Principe fondamentale** de la dynamique du point matériel (PFD) : Dans un *référentiel galiléen*, une particule soumise à une force  $\vec{f}$  voit sa quantité de mouvement varier d'autant plus vite que la force est importante. *L'équation du mouvement est donnée par :*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a} = \vec{f}$$

**Principe des actions réciproques** : les actions réciproques sont opposées et coaxiales.

**Remarques** : À ce stade on considère que le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen dans la plupart des expériences usuelles.

En dynamique classique, force et masse sont invariantes par changement de référentiel .

### 2.1.3 Principe d'équivalence

Principe d'équivalence :

masse inerte = masse grave

Ce principe est le point de départ de la Relativité Générale (EINSTEIN 1917).

On adopte alors une seule unité pour la masse grave et inerte : le kilogramme qui reste défini par le biais d'un prototype international<sup>1</sup> dont les copies peuvent être étalonnées à quelques  $10^{-9}$  près.

**Conséquence** : la chute libre dans le vide est universelle !

L'observation du mouvement de la Lune autour de la Terre permet de tester le principe d'équivalence. Les compositions internes de la Terre et de la Lune étant différents (la Terre a un noyau à base de fer et nickel, alors que la Lune est principalement formée de silicates), la Terre et la Lune devraient être accélérées différemment vers le Soleil en cas de violation du principe d'équivalence. Il en résulterait un effet de polarisation vers le Soleil de l'orbite relative de la Lune autour de la Terre. En mars 2005, des chercheurs du Jet Propulsion Laboratory (JPL) ont réalisé une expérience permettant de confirmer le principe d'équivalence, selon lequel tous les objets se comportent de la même manière dans un champ de gravitation, principe dont Einstein a fait la pierre angulaire de sa théorie de la relativité générale. L'équipe du JPL a envoyé des faisceaux lasers des observatoires du Texas et de la Côte d'Azur vers des réflecteurs installés sur la Lune lors des missions Apollo. Mesurant le temps de parcours du signal, ils ont pu démontrer avec une précision jusque là inégalée que les deux corps tombaient vers le Soleil à la même vitesse. Les résultats obtenus sont deux fois plus précis que les derniers résultats publiés. Une des dernières expériences réalisées, le projet STEP, avait permis d'atteindre une précision de  $10^{-18}$ . [JPL 04/03/2005]

### 2.1.4 Cas d'un système de points

On considère un système mécanique  $\mathcal{S}$  formé de  $N$  points matériels de masse  $m_i$  situés en  $M_i$ . On note  $m$  la masse totale.

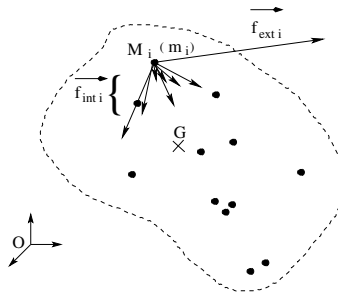


FIG. 2.7 – Système de points.

**Centre d'inertie** : Le centre d'inertie  $G$  du système vérifie

$$\sum_{i=1}^{i=N} m_i \overrightarrow{OM_i} = m \overrightarrow{OG}$$

Cette définition peut faire croire que la position de  $G$  dépend du choix de  $O$  ; en fait il n'en est rien. Une autre façon de définir  $G$  consiste à prendre  $O = G$  :

$$\sum_{i=1}^{i=N} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

<sup>1</sup>conservé au pavillon de Breteuil (Sèvres)



**Quantité de mouvement** : du système de points ne dépend que du mouvement de  $G$  :

$$\vec{P}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = m \frac{d\vec{OG}}{dt} = m\vec{v}_G$$

**Théorème** : lorsque l'on applique le PFD à chaque particule on obtient

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_{\text{ext}i} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}$$

avec  $\vec{f}_{\text{ext}i}$  la force d'origine externe au système qui s'exerce sur la particule (pesanteur par exemple) et  $\vec{f}_{j \rightarrow i}$  la force d'interaction entre la particule  $j$  et la particule  $i$  (force interne). Or d'après le principe des actions réciproques, les forces internes se compensent deux à deux. Ainsi, si l'on somme toutes les équations du mouvement de chaque particule, on obtient :

$$\frac{d\vec{P}(\mathcal{S})}{dt} = m \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où  $\vec{F}_{\text{ext}}$  désigne la résultante des forces extérieures.

## 2.2 Exemples d'application

### 2.2.1 Chute libre sans frottement

Considérons un point matériel de masse  $m$  en chute libre dans un champ de pesanteur uniforme sans résistance de l'air. Le principe fondamental de la dynamique nous dit que

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Le mouvement est donc uniformément accéléré.

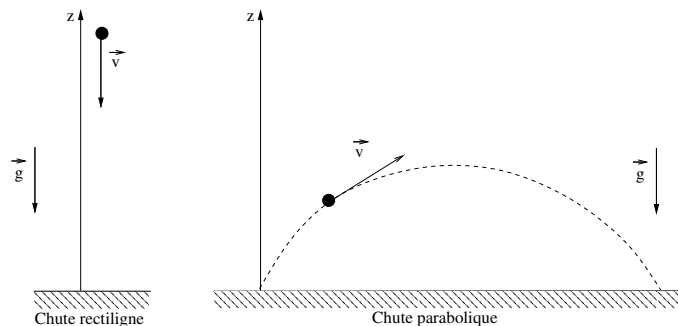


FIG. 2.8 –

**cas unidimensionnel** : si à  $t = 0$  on a  $z = h$  et  $v = 0$ , l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

aboutit à :

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Le mouvement étant rectiligne uniformément accéléré, on peut aussi utiliser la loi  $\Delta v^2 = 2a\Delta s$  pour trouver la vitesse de chute en fonction de  $h$  :

$$v^2 = 2gh$$

**cas tridimensionnel** : si à  $t = 0$  on a  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  et une vitesse initiale dans le plan  $yOz$  et faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $Oy$ . l'intégration du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g\end{aligned}$$

aboutit à :

- $x = 0$ . Le mouvement est donc plan.
- $y = vt \cos \alpha$ . Le mouvement suivant  $Oy$  est uniforme.
- $z = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$
- L'élimination du temps permet de trouver l'équation de la trajectoire :

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v^2 \cos^2 \alpha} y^2 + \tan \alpha y$$

La trajectoire est donc parabolique.

## 2.2.2 Chute libre avec résistance de l'air

Considérons une chute rectiligne en considérant l'action de l'air.

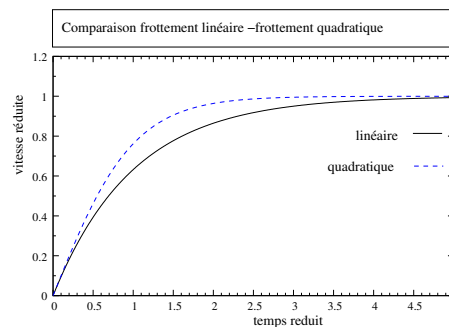


FIG. 2.9 – Courbes  $v(t)$ . On remarque que la vitesse limite est atteinte plus rapidement dans le cas quadratique (à constante de temps égale)

**Cas linéaire** : traînée visqueuse linéaire  $\vec{T} = -\alpha \vec{v}$ . Le PFD donne

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v$$

d'où, par intégration

$$v = v_l [1 - \exp(-t/\tau)]$$

où  $\tau = \frac{m}{\alpha}$  est le temps de relaxation et  $v_l = g\tau$  est la vitesse limite. Plus la masse est importante et plus la vitesse limite est grande.

**Cas quadratique** : traînée visqueuse proportionnelle à la vitesse au carré :  $\vec{T} = -\beta v \vec{v}$ , où  $\beta = \frac{1}{2} \mu_{\text{fluide}} S C_x$ .  
Lorsque la vitesse limite est atteinte, on a égalité entre le poids et la traînée :  $v_{lim}^2 = \frac{mg}{\beta}$ .

- L'équation du mouvement donne

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m} v^2$$

On montre que la solution s'écrit :

$$v(t) = v_{lim} \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

où  $\tau = \frac{v_{lim}}{g}$  représente le temps de relaxation.

- En remarquant que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

on obtient

$$v(z) = v_{lim} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{z}{h}\right)}$$

où  $h = \frac{1}{2} v_{lim} \tau$  représente la distance caractéristique sur laquelle la particule est accélérée.

- ordre de grandeur : pour une bille de diamètre 1cm et de masse  $m = 5g$  dans l'air ( $\mu = 1,2 kg/m^3$ ) en prenant  $C_x \approx 1$  on obtient :  $v_{lim} = 32 m.s^{-1}$ ,  $h = 50 m$ ,  $\tau \approx 3s$



# Chapitre 3

## Aspects énergétiques

### 3.1 Théorème de l'énergie cinétique

#### 3.1.1 Puissance et travail d'une force

**Travail** : une force qui déplace son point d'application entre deux points A et B, produit un travail :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Pour une force uniforme et pour un déplacement  $\vec{AB}$  on obtient :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \vec{f} \cdot \vec{AB}$$

Le travail est une énergie et s'exprime en Joule (symbole : J). Une analyse dimensionnelle donne

$$1\text{J} = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

**Puissance** : une force qui déplace son point d'application, développe une puissance :

$$P(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

où  $\vec{v}(t)$  est la vitesse du point d'application. On remarque que le travail peut s'écrire :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

et si la puissance est constante, on a :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = P \cdot (t_2 - t_1)$$

$P$  s'exprime en Watt, en hommage à JAMES WATT (symbole : W). La dernière formule montre que

$$1\text{W} = 1\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$$

### 3.1.2 Théorème de l'énergie cinétique

**Énergie cinétique** : Par définition, l'énergie cinétique d'un point matériel animé d'une vitesse  $v$  vaut

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

L'analyse dimensionnelle donne :

$$[E_c] = ML^2T^{-2}$$

ce qui correspond bien à la dimension « Énergie ».  $E_c$  s'exprime donc en Joule comme le travail. Remarquez que l'énergie cinétique dépend du référentiel choisi.

**Théorème** (démonstration au tableau) : À partir du PFD, on montre qu'entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , dans un référentiel galiléen,

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_{t_1 \rightarrow t_2}$$

## 3.2 Énergies potentielles

### 3.2.1 Forces conservatives

**Définition** : Une *force conservative* est une force qui dérive d'une énergie potentielle (cf Annexe pour la définition de l'opérateur  $\vec{\nabla}$ ) :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

$E_p$  a la dimension d'une énergie et s'exprime donc en joule.

**Propriétés** : Une force conservative produit un travail qui ne dépend pas du chemin suivi par le point d'application.

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = - \int_{M_1}^{M_2} \vec{\nabla} E_p \cdot \vec{dl} = \int_{M_1}^{M_2} dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

L'énergie potentielle est définie à une constante près. C'est la variation d'énergie potentielle qui se mesure (c'est un travail). Parfois, on pose une origine des énergies potentielles de façon arbitraire.

### 3.2.2 Exemples

À l'aide de la relation  $W_{t_1 \rightarrow t_2} = -\Delta E_p = E_p(M_1) - E_p(M_2)$  on obtient pour

- la pesanteur uniforme :

$$E_p = mgz + C^{te}$$

(attention axe Oz ascendant)

- la force élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C^{te}$$

- la gravitation :

$$E_p = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} + C^{te}$$

## 3.3 Énergie mécanique

### 3.3.1 Cas de conservation de l'énergie mécanique

Supposons un point matériel subissant des forces conservatives et/ou des forces ne travaillant pas. On note  $E_p$  l'énergie potentielle associée à la résultante des forces. Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire

$$\Delta E_c = W_{t_1 \rightarrow t_2} = -\Delta E_p$$

d'où

$$\Delta(E_c + E_p) = 0$$

Par définition, la quantité  $E_c + E_p = E_m$  est une énergie appelée *énergie mécanique*. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique lorsque le système est conservatif. Cette relation de conservation est souvent appelée *intégrale première de l'énergie*.

**exemple** : Traitons le cas du pendule simple : La tension ne travaille pas et la pesanteur est une force conservative, donc le système est conservatif et l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2 \frac{d\theta^2}{dt} - mgl \cos \theta = E_m(0)$$

en dérivant par rapport au temps on obtient l'équa-diff que vérifie  $\theta(t)$  soit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

### 3.3.2 Cas de non conservation de l'énergie mécanique

Si le système n'est pas conservatif, c'est à dire qu'il existe au moins une force dont le travail dépend du trajet du point d'application (cas des forces de frottements), alors l'énergie mécanique ne se conserve pas. On obtient, si l'on note  $W_{nc}$  le travail des forces non conservatives :

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

Les forces de frottements sont des forces non conservatives qui résistent au mouvement  $\Rightarrow W_{nc} < 0$  et l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

## 3.4 Problèmes à un degré de liberté

### 3.4.1 Utilisation d'une représentation graphique

Considérons un point matériel à un degré de liberté conservatif. on pose  $q(t)$  le degré de liberté (position, angle, etc...) et l'on suppose que l'énergie cinétique s'écrit de la forme

$$E_c = \frac{1}{2}I \left( \frac{dq}{dt}(t) \right)^2$$

où  $I$  représente l'inertie (masse, moment d'inertie etc.)

Supposons enfin que l'énergie potentielle soit fonction de  $q$  :

$$E_p = f(q)$$

Ainsi, suivant la valeur de l'énergie mécanique initiale, on peut qualitativement décrire le mouvement. Comme  $E_c > 0$ , on a forcément

$$E_p < E_m(t = 0)$$

ce qui permet de trouver les valeurs possibles de  $q$ . De plus dériver l'équation

$$E_C + E_p = \text{Constante}$$

permet de trouver l'équation différentielle du mouvement.

**Positions d'équilibre** : les points pour lesquels  $E_p$  admet un extremum sont les *points stationnaires* (ou *position d'équilibre mécanique*). Considérons les petits mouvements au voisinage d'un extremum.  $E_p(q) \approx E_{p\text{eq}} + \frac{1}{2}K(q - q_{\text{eq}})^2$

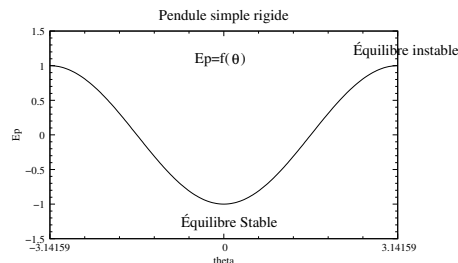
- si l'extremum est un minimum on a un *équilibre stable* : au voisinage de l'équilibre on obtient des oscillations de pulsation propre

$$\omega^2 = \frac{K}{I}$$

- si l'extremum est un maximum on a un *équilibre instable* : au voisinage de l'équilibre on obtient des solutions divergentes.

**Exemple** : le pendule simple rigide est un système à un degré de liberté ( $\theta$ ). L'énergie potentielle de pesanteur vaut

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta)$$



$$E_p = -mgl \cos \theta$$

On remarque donc une position d'équilibre stable ( $\theta = 0$ ) et une position d'équilibre instable ( $\theta = \pi$ ). De plus, le puits de potentiel étant symétrique, les oscillations autour de la position d'équilibre seront symétriques.

### 3.4.2 Approche du portrait de phase

**Définition** : On peut représenter l'état du système à un degré de liberté par un point  $P(q(t), \frac{dq}{dt})$  dans un plan  $(q, \frac{dq}{dt})$  appelé *plan de phase*. Au cours du temps  $P(t)$  décrit une trajectoire de phase. Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires de phase du système en considérant différentes conditions initiales.

**Propriétés** :

- deux trajectoires de phase ne peuvent se couper (sauf en des points singuliers) à cause du déterminisme ( pour un jeu de condition initiale  $\{q_0, \frac{dq}{dt}(0)\}$  la solution  $q(t)$  est unique)
- lorsque l'évolution devient périodique on a  $q(t + T) = q(t)$  la trajectoire se ferme et forme un cycle.
- les positions d'équilibres correspondent à  $\frac{dq}{dt} = 0$  et  $\frac{d^2q}{dt^2} = 0$ . Ces points sont appelés points singuliers sur un portrait de phase.
- lorsque le processus est réversible (invariant par changement du sens du temps  $t/ - t \Rightarrow v/ - v$ ) le portrait de phase est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



**Exemple** : présentation du portrait de phase du pendule simple. On remarque la présence de cycles centrés autour de la position d'équilibre stable ; il s'agit d'oscillations. On remarque également une trajectoire de phase non fermée ; il s'agit du mouvement révolatif.

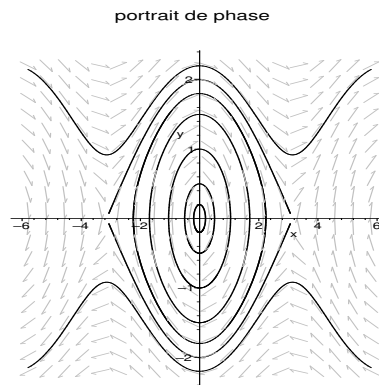


FIG. 3.1 – *Portrait de phase du pendule simple rigide.*



# Chapitre 4

## Changements de référentiel

### 4.1 Cinématique

#### 4.1.1 Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

Considérons un référentiel  $\mathcal{R}$  de système d'axes  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  de système d'axes  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ . Cherchons à caractériser le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

- Cas du mouvement de *translation* :  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{e}'_{k=1..3}$  conservent la même direction et le même sens au cours du temps, par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans ce cas

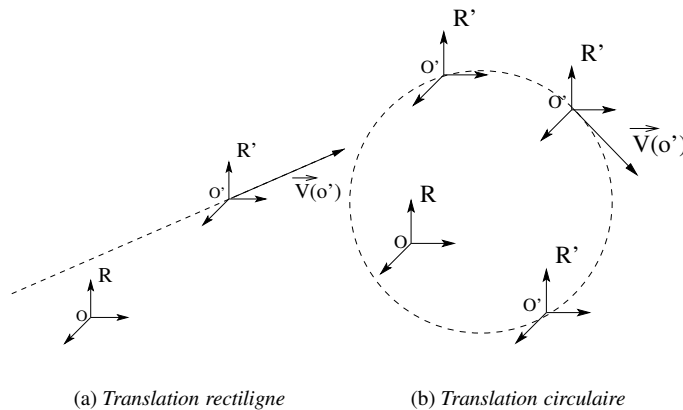


FIG. 4.1 – *Mouvements de translation.*

on a :

$$\left. \frac{d\vec{e}'_{k=1..3}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

- Si  $O'$  décrit une droite, on parle alors de *translation rectiligne*.
- Si  $O'$  décrit un cercle, on parle de *translation circulaire* (grande roue d'une foire).
- Si  $O'$  décrit une courbe quelconque, on parle de *translation curviligne*.
- Cas du mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) :  $\mathcal{R}'$  est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ . Plaçons l'axe  $\vec{e}'_3$  suivant l'axe de rotation et  $O'$  sur l'axe : l'extrémité du vecteur  $\vec{e}'_1$

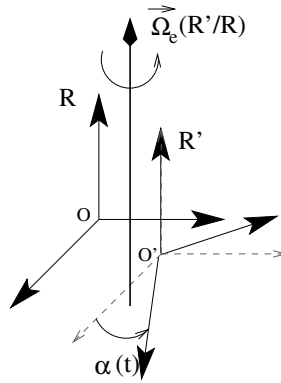


FIG. 4.2 – Mouvement de rotation par rapport à un axe.

ou  $\vec{e}_2^j$  décrit alors un cercle de centre  $O'$  et de rayon unité. La vitesse de l'extrémité du vecteur  $\vec{e}_1^j$  ou  $\vec{e}_2^j$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{e}_1^j}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \frac{d\alpha}{dt} \vec{e}_2^j \\ \left. \frac{d\vec{e}_2^j}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= -\frac{d\alpha}{dt} \vec{e}_1^j \\ \left. \frac{d\vec{e}_3^j}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  désigne l'angle de rotation autour de l'axe. On définit le vecteur rotation instantané de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  le vecteur dirigé suivant l'axe orienté par  $\alpha$  (règle du tire-bouchon) et de norme la vitesse angulaire  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  :

$$\vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega(t) \vec{e}_3^j$$

Les relations ci dessus peuvent se récrire :

$$\left. \frac{d\vec{e}_k^j}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{e}_k^j \quad k = 1, 2, 3$$

C'est la définition générale du *vecteur rotation instantané*.

- Cas général : Pour caractériser le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre il suffit de connaître le mouvement de  $O'$  ainsi que le vecteur rotation instantané qui donne l'axe orienté ainsi que la vitesse angulaire. Le vecteur rotation peut varier en norme (rotation fixe avec une vitesse angulaire variable) mais aussi en direction (l'axe n'est alors plus fixe). On a de plus

$$\vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -\vec{\Omega}_e(\mathcal{R}/\mathcal{R}')$$

#### 4.1.2 Formule de dérivation vectorielle

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}}$$

**Démonstration :**

Dans  $\mathcal{R}'$ , on peut écrire :

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}'_1 + A_2 \vec{e}'_2 + A_3 \vec{e}'_3$$

Donc :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\frac{dA_1}{dt} \vec{e}'_1 + \frac{dA_2}{dt} \vec{e}'_2 + \frac{dA_3}{dt} \vec{e}'_3}_{\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}} + A_1 \frac{d\vec{e}'_1}{dt} + A_2 \frac{d\vec{e}'_2}{dt} + A_3 \frac{d\vec{e}'_3}{dt}$$

Or par définition du *vecteur rotation instantanée*  $\vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}_0)(t)$ , on a :

$$\left. \frac{d\vec{e}'_k}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{e}'_k \quad k = 1, 2, 3$$

Ainsi on obtient :  $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{A}$ .

### 4.1.3 Lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation

Considérons le référentiel  $\mathcal{R}'$  en *translation* par rapport à  $\mathcal{R}$  : les axes de  $\mathcal{R}'$  sont fixes et l'on note  $\vec{V}(O')$  la vitesse de translation de  $O'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Un point  $M(t)$  se déplace au cours du temps dans l'espace.

**Composition des vitesses** On définit :

- La vitesse absolue de  $M$  comme étant la vitesse du point  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  (appelé improprement référentiel absolu). On notera cette vitesse  $\vec{V}_a(M)$ .
- La vitesse relative de  $M$  comme étant la vitesse du point  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$  (appelé improprement référentiel relatif). On notera cette vitesse  $\vec{V}_r(M)$ .
- À l'aide de la formule de dérivation vectorielle, on a

$$\vec{V}_a(M) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

c'est à dire

$$\underbrace{\vec{V}(M/\mathcal{R})}_{\vec{V}_a(M)} = \underbrace{\vec{V}(M/\mathcal{R}')}_{\vec{V}_r(M)} + \underbrace{\vec{V}(O')}_{\vec{V}_e(M)}$$

Le premier terme s'identifie à la *vitesse relative de  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$* , notée  $\vec{V}_r(M)$ . Si l'on contraint le point  $M$  à être fixe à l'instant  $t$  dans  $\mathcal{R}'$  (on parle alors de point  $M^*$  fixe coïncidant en  $M$  à l'instant  $t$ ), la vitesse s'identifie alors au dernier terme qui représente donc la *vitesse d'entraînement de  $M$  liée au déplacement de  $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$* . Cette vitesse est notée  $\vec{V}_e(M)$  et vaut  $\vec{V}(O')$  dans le cas de deux référentiels en translation.

**Loi de composition des accélérations**

- Dérivons la formule de composition des vitesses en utilisant la formule de dérivation vectorielle :

$$\left. \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

$$\underbrace{\left. \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_a(M)} = \underbrace{\left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}}_{\vec{a}_r(M)} + \underbrace{\left. \frac{d^2\vec{OO}'}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_e(M)}$$

où  $\vec{a}_a(M)$  représente l'accélération absolue du point  $M$  par rapport au référentiel "absolu".

$\vec{a}_r(M)$  représente l'accélération du point  $M$  par rapport au référentiel "relatif".

$\vec{a}_e(M)$  représente l'accélération d'entraînement du point  $M$ . Ainsi, le dernier terme représente l'accélération du point coïncidant  $M^*$ , c'est à dire l'accélération d'entraînement. ici on a

$$\vec{a}_e(M) = \left. \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}.$$

#### 4.1.4 Lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe

Considérons un référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation autour d'un axe fixe  $(\Delta)$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On note  $\vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}_0)(t)$  le vecteur rotation instantané (de direction fixe). On place  $O'$  en  $O$ .

##### Loi de composition des vitesses

- À l'aide de la formule de dérivation vectorielle, on a

$$\vec{V}_a(M) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{O'M}$$

où l'on reconnaît la vitesse relative  $\vec{V}_r(M) = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$ .

Le dernier terme étant la vitesse d'entraînement : On note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe  $(\Delta)$ .

La vitesse d'entraînement s'écrit  $\vec{V}_e = \vec{\Omega}_e \wedge \vec{O'M} = \vec{\Omega}_e \wedge \vec{HM}$  ce qui correspond à la vitesse d'un point  $M$  en rotation autour de l'axe  $(\Delta)$ . Là aussi la vitesse d'entraînement correspond à la vitesse du point coïncidant  $M^*$ .

##### Loi de composition des accélérations

- Dérivons la formule de composition des vitesses en utilisant la formule de dérivation vectorielle :

$$\left. \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}_r(M) + \left. \frac{d\vec{\Omega}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_e \wedge (\vec{V}_r(M) + \vec{\Omega}_e \wedge \vec{O'M})$$

expression qui se simplifie en notant  $\vec{O'M} = \vec{O'H} + \vec{HM}$  et en remarquant qu'ici, le vecteur rotation est colinéaire à  $\vec{O'H}$ . Ainsi

$$\vec{\Omega}_e \wedge (\vec{\Omega}_e \wedge \vec{O'M}) = \vec{\Omega}_e \wedge (\vec{\Omega}_e \wedge \vec{HM}) = (\vec{\Omega}_e \cdot \vec{HM}) \vec{\Omega}_e - \Omega_e^2 \vec{HM} = -\Omega_e^2 \vec{HM}$$

$$\underbrace{\left. \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}_{\vec{a}_a(M)} = \underbrace{\left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}}_{\vec{a}_r(M)} + \underbrace{\left. \frac{d\vec{\Omega}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{HM} - \Omega_e^2 \vec{HM}}_{\vec{a}_e(M)} + \underbrace{2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}_r(M)}_{\vec{a}_c(M)}$$

$\vec{a}_a(M)$  représente l'accélération absolue du point  $M$  par rapport au référentiel "absolu".

$\vec{a}_r(M)$  représente l'accélération du point  $M$  par rapport au référentiel "relatif".

$\vec{a}_c(M)$  représente l'accélération de CORIOLIS.  $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}_r(M)$

$\vec{a}_e(M)$  représente l'accélération d'entraînement du point  $M$ . En effet si  $M = M^*$ , l'accélération relative et de CORIOLIS s'annulent.

- NB : Ici on a  $\vec{a}_e(M) \neq \left. \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$

### 4.1.5 Généralisation

Ces lois se généralisent dans le cas où le mouvement d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  est quelconque c'est-à-dire composé d'un mouvement de translation et d'une rotation (d'axe non fixe à priori). On retiendra les formules de l'encadré (où  $M^*$  désigne le point fixe dans  $\mathcal{R}'$  qui coïncide à l'instant  $t$  avec  $M$ ).

$$\underbrace{\vec{V}(M/\mathcal{R})}_{\vec{V}_a(M)} = \underbrace{\vec{V}(M/\mathcal{R}')}_{\vec{V}_r(M)} + \underbrace{\vec{V}(M^*/\mathcal{R})}_{\vec{V}_e(M)}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/\mathcal{R}) &= \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}(M^*/\mathcal{R}) + 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}_r(M) \\ \vec{a}_a(M) &= \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) \end{aligned}$$

**Exemple :**

1. Expression de la vitesse en coordonnées sphérique.

Considérons un point  $M(r(t), \theta(t), \varphi(t))$  repéré par ses coordonnées sphériques dans un repère cartésien. On définit les référentiels  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  et  $\mathcal{R}'(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ . On cherche à exprimer la vitesse de  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  mais dans la base sphérique.  $\mathcal{R}'$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  : le vecteur rotation s'écrit  $\vec{\Omega}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{u}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{u}_z$ .

Le mouvement relatif est un mouvement rectiligne suivant  $\vec{u}_r$  paramétré par  $r(t)$ . La vitesse relative est donc  $\vec{V}_r(M) = \dot{r}\vec{u}_r$ .

Le mouvement d'entraînement est la composition de deux rotations : une rotation d'axe fixe Oz de vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  l'autre d'axe fixe Ox et de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  :  $\vec{V}_e(M) = r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ . D'où

$$\vec{V}_a(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

On aurait pu utiliser la formule de dérivation vectorielle : En utilisant  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  et  $\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_e \wedge \vec{u}_r$  on obtient la formule donnant la vitesse en coordonnées sphériques.

2. Mouvement d'un point d'une roue, roulant sans glissement sur un plan horizontal à vitesse constante.  
**FAIT AU TABLEAU**

## 4.2 Dynamique en référentiel non galiléen

### 4.2.1 Principe de relativité galiléenne

D'après le principe d'inertie : il existe au moins un référentiel  $\mathcal{R}_g$  dit galiléen dans lequel une particule isolée a un mouvement rectiligne uniforme. Considérons  $\mathcal{R}'$  un référentiel en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ . Ce référentiel peut-il être galiléen ; si oui, à quelle condition ?

On sait que

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}_r(M) + \vec{a}_e(M)$$

Or la particule étant isolée on a  $\vec{a}_a(M) = \vec{0}$ . Si l'on veut que le référentiel relatif soit galiléen, il faut  $\vec{a}_r(M) = \vec{0}$  : un observateur lié au référentiel relatif validera donc le principe d'inertie. Ainsi il faut donc

$$2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}_r(M) + \vec{a}_e(M) = \vec{0} \quad \forall M, \vec{V}_r(M)$$

condition qui implique :

- $\vec{\Omega}_e = \vec{0}$ . Le référentiel est en translation par rapport au référentiel galiléen.

- $\vec{V}(O') = \vec{C}^{te}$ . Le référentiel est en translation uniforme.

Ainsi tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

**Transformation de Galilée** La transformation de Galilée permet de relier les coordonnées spatio-temporelles dans  $\mathcal{R}(O, x, y, z, t)$  et  $\mathcal{R}'(O, x', y', z', t')$ , deux référentiels galiléens. Si l'on suppose que  $\mathcal{R}'$  est en translation uniforme suivant l'axe  $(Ox)$  on obtient :

$$\begin{aligned}x &= x' + vt' \\y &= y' \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned}$$

### 4.2.2 Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen

Une expérience de mécanique ne permet pas de faire la différence entre deux référentiels galiléens. Par contre une expérience de mécanique permet de différencier un référentiel galiléen d'un référentiel non galiléen.

Écrivons la RFD dans le référentiel galiléen :

$$\vec{F} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}) = m \vec{a}(M/\mathcal{R}') + m \vec{a}_e(M) + m \vec{a}_c(M)$$

d'où :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{F} - m \vec{a}_e(M) - m \vec{a}_c(M)$$

Dans le référentiel non galiléen, tout se passe comme si dans le bilan des forces deux termes supplémentaires intervenaient : ces termes sont homogènes à des forces, on les appelle pseudo-forces ou **forces d'inertie** :

$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$  est la force d'inertie d'entraînement.

$\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}')$  est la force d'inertie de Coriolis.

### 4.2.3 Aspect énergétique

On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , référentiel en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. Le théorème de l'énergie cinétique reste valide à condition de tenir compte des forces d'inertie. On peut cependant préciser le travail de chacune des forces :

- La force de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}')$  étant perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas ! cette force peut cependant courber la trajectoire mais ne peut pas faire varier l'énergie cinétique.

$$W(\vec{f}_{ic}) = 0$$



- o La force d'entraînement travaille à priori. Dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en *rotation uniforme* autour d'un *axe fixe* ( $\Delta$ ), la force est dite "force centrifuge d'inertie" et dérive d'une énergie potentielle : En effet dans ce cas l'accélération d'entraînement est l'accélération centripète dirigée vers le projeté H du point M sur l'axe ( $\Delta$ ) et vaut :

$$\vec{a}_e = -\Omega_e^2 \overline{HM}$$

d'où

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega_e^2 \overline{HM} = m\Omega_e^2 \rho \vec{e}_\rho$$

force centrifuge qui dérive de l'énergie potentielle

$$E_{P_{ie}} = -\frac{1}{2}m\Omega_e^2 \rho^2$$

#### 4.2.4 Caractère galiléen de quelques référentiels

Le caractère galiléen d'un référentiel est lié à la validité du principe d'inertie. Le critère de validité dépend de la précision que l'on exige. C'est pourquoi, certains référentiels sont approximativement galiléens sur une certaine échelle de temps.

Donnons quelques référentiels classiques :

- o Référentiel de COPERNIC : repère d'origine le centre d'inertie du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles dites "fixes" + repère temporel. Il est utilisé en tant que référentiel galiléen lorsque l'on considère des expériences terrestres "longues" où la rotation de la Terre autour du Soleil ne peut être négligée.
- o Référentiel géocentrique : origine au centre de la Terre. Référentiel en translation quasi-circulaire (excentricité faible) par rapport au référentiel de COPERNIC. Ce référentiel peut être considéré comme galiléen sur des expériences terrestres "peu longues" (une journée maximum), car la rotation de la Terre autour du Soleil n'est alors pas prise en compte.
- o Référentiel lié à la Terre : Repère d'origine un point de la surface terrestre et d'axes liés à la Terre

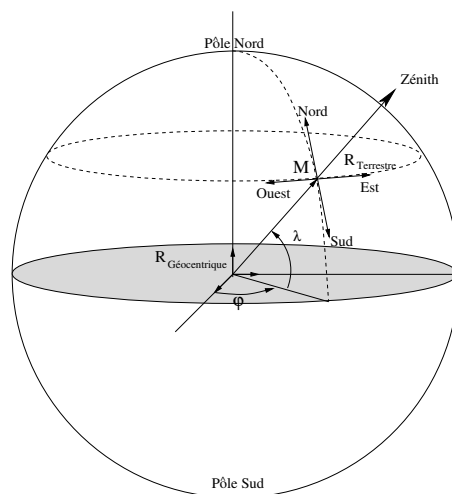


FIG. 4.3 – Référentiel terrestre et le référentiel géocentrique.

(cf. figure 4.4). Par rapport au référentiel géocentrique, ce référentiel est en rotation (période sidérale  $T = 23h56min04s$  et vitesse angulaire  $\omega = \frac{2\pi}{T_{sidérale}} = 7,3.10^{-5} rad.s^{-1}$ ) autour de l'axe des pôles. Ce référentiel bien que rigoureusement non galiléen est souvent traité comme un référentiel galiléen car les effets de la rotation terrestre sont souvent négligeables dans les expériences courantes.

### 4.2.5 Exemples qualitatifs

**L'impesanteur ou l'apesanteur** : tout corps dans un référentiel en chute libre est en apesanteur. La force d'inertie d'entraînement compense le poids (conséquence du principe d'équivalence). On peut aussi simuler une chute lors d'un vol parabolique en avion.

**le fluide en rotation** : lorsqu'un fluide est mis en rotation dans un récipient, il y a ascension du fluide sur les bords à cause de la force centrifuge. Elle est aussi responsable de l'augmentation de la concentration en élément dense sur les bords ; c'est la principe de la centrifugation.

**Le pendule de Foucault (1852)** : Lorsque l'on entretient le mouvement d'un pendule simple on s'aperçoit que son plan d'oscillation tourne. Ce phénomène est la manifestation de la rotation terrestre qui produit une force de Coriolis provoquant la rotation du plan d'oscillation. Il fait un tour en 24H si l'expérience est effectuée aux pôles. Cette expérience fut entreprise pour la première fois en 1852 à Paris par Léon Foucault.

## 4.3 Applications

### 4.3.1 La pesanteur terrestre

**Définition de la pesanteur terrestre** : On appelle poids d'un corps en un point donné, l'opposé de la force de tension du fil qui maintient ce corps à l'équilibre dans le référentiel considéré.

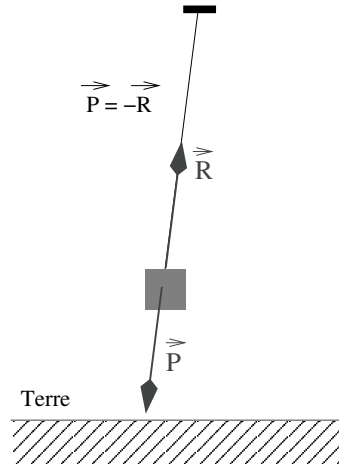


FIG. 4.4 – Notion de pesanteur terrestre.

- Si l'on considère le référentiel terrestre galiléen on a

$$\overrightarrow{P}(M) = m \overrightarrow{g}(M)$$

où  $\overrightarrow{g}(M)$  est le champ d'attraction gravitationnelle exercée en M.

- Si de plus on ne tient compte que de l'attraction terrestre et en supposant la Terre à symétrie sphérique, on a

$$\overrightarrow{P}(M) = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r^2} \overrightarrow{e}_r(M) = m \overrightarrow{g}_T$$

- Si l'on considère le référentiel terrestre non galiléen, on a :

$$\overrightarrow{P}(M) = m \overrightarrow{g}(M) - m \overrightarrow{a}_e(M) = m \overrightarrow{g}_p$$

où  $\overrightarrow{g}_p$  désigne le champ de pesanteur.

- Dans le cas où le référentiel géocentrique est considéré galiléen on a :

$$\overrightarrow{P}(M) = m(\overrightarrow{g}_T(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM})$$

la pesanteur dépend donc de la latitude. En fait il faut aussi tenir compte de la non sphéricité de la terre pour trouver une valeur précise du champ de pesanteur moyen en un lieu (moyen parce que le relief joue un rôle). Sur l'ellipsoïde terrestre, la gravité de référence pour un point de latitude est (formule acceptée depuis 1967 par l'Union International de Géologie et de Géophysique (I.U.G.G.)) :

$$g(\lambda) = 9,7803(1 + 5.2789.10^{-3} \sin^2 \lambda + 23,462.10^{-6} \sin^4 \lambda)$$

- De manière générale, le champ de pesanteur terrestre vaut

$$\overrightarrow{g}_p(M) = \overrightarrow{g}(M) - \overrightarrow{a}_e(M)$$

### 4.3.2 La déviation vers l'Est

Quelle est l'effet de la rotation terrestre sur la chute libre ?

**Première analyse** : Analysons le phénomène dans le référentiel terrestre non galiléen en supposant le référentiel géocentrique galiléen. Lâchons un corps de masse  $m$  d'une hauteur  $h$  et faisons quelques calculs d'ordre de grandeur en prenant  $h \approx 100 \text{ m}$  et  $m = 1 \text{ kg}$ . la vitesse de chute vaut  $v \approx \sqrt{2gh} \approx 50 \text{ m.s}^{-1}$  d'où un temps de chute de l'ordre de  $\tau \approx \frac{v}{g} \approx 5 \text{ s}$ . La pesanteur vaut  $P \approx 10 \text{ N}$  et la force de Coriolis  $f_{ic} \approx 2m\omega v \approx 0.007 \text{ N}$ . La force de Coriolis est donc très faible ce qui justifie que l'on néglige dans la plupart des cas son effet mais intéressons à l'effet de cette force de Coriolis en la considérant comme une perturbation de la chute libre classique :

- La RFD donne dans le référentiel terrestre :

$$m \overrightarrow{a} = m \overrightarrow{g}_p - 2m \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

équation vectorielle qui donne un système d'équations différentielles linéaires couplées solubles analytiquement.

- Traitons cette équation par la *méthode des perturbations*. On ne fait pas une grosse erreur si l'on remplace  $\overrightarrow{v}$  par  $\overrightarrow{g}_p t$ . On obtient alors

$$\ddot{y} = 2\omega \cos \lambda g_p t$$

où  $y$  désigne le déplacement vers l'est et  $\lambda$  la latitude du lieu. Ainsi l'intégration de l'équation précédente donne

$$y(t) = \frac{1}{3} \omega \cos \lambda g_p t^3$$

la trajectoire est donc déviée vers l'Est quelque soit l'hémisphère où l'on se trouve et l'effet est d'autant plus important que le temps de chute est important.

- L'expérience menée par Flammarion en 1903 du haut de la coupole du panthéon ( $h = 68 \text{ m}$  et  $\lambda = 48^\circ 51'$ ) a donné une déviation de 7,6 mm (valeur théorique 8 mm).

NB : la théorie prévoit également une déviation vers le sud de l'ordre du micromètre et donc non mesurable.

**deuxième analyse** (à lire après avoir vu le chapitre 7) : Analysons le phénomène dans le référentiel géocentrique : le corps n'est soumis qu'à la gravitation de la Terre (en négligeant les autres de forces de gravitation) et est lancé avec une vitesse initiale  $\overrightarrow{v}_0 = (R+h) \cos \lambda \omega \overrightarrow{e}_\theta$  à cause de la rotation terrestre. l'observateur possède quant à lui une vitesse orthoradiale  $\overrightarrow{v}_0 = R \cos \lambda \omega \overrightarrow{e}_\theta$ . Le corps décrit donc une ellipse de foyer, le centre de la Terre, dans le plan formé par  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{v}_0$ . Par conservation du moment cinétique on a  $r^2 \dot{\theta} = (R+h)^2 \omega \cos \lambda$ . Ainsi au début le projectile a une vitesse angulaire identique à celle de l'observateur terrestre ( $\omega \cos \lambda$ ) mais au fur et à mesure que le projectile chute,  $r$  diminue et  $\dot{\theta}$  augmente. Le projectile tourne donc plus vite que l'observateur.

### 4.3.3 Les marées

Le phénomène des marées océaniques s'observe sur plusieurs heures. Pour décrire correctement ce phénomène, il faut donc tenir compte du mouvement de la terre dans le système solaire, c'est-à-dire, traiter le problème dans le référentiel de Copernic que l'on considèrera galiléen.

Le point de départ est l'expression général du champ de pesanteur :

$$\vec{g}_p(M) = \vec{g}(M) - \vec{a}_e(M)$$

Tout d'abord, le champ d'attraction est essentiellement dû à la Terre mais aussi aux autres astres :

$$\vec{g}(M) = \vec{g}_T(M) + \vec{g}_A(M)$$

où  $\vec{g}_A(M)$  est le champ d'attraction créé par les autres astres.

Le référentiel terrestre est par rapport au référentiel géocentrique en rotation autour de l'axe des pôles. le référentiel géocentrique est quant à lui en translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic. Ainsi :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_C - \omega^2 \overline{HM}$$

Enfin, d'après le théorème de la résultante cinétique, on a ( $M_T$  désigne la masse de la Terre) :

$$M_T \vec{a}_C = M_T \vec{g}_A(C)$$

Ainsi

$$\vec{g}_p(M) = \vec{g}_T(M) + \omega^2 \overline{HM} + \vec{g}_A(M) - \vec{g}_A(C)$$

Le terme  $\vec{C} = \vec{g}_A(M) - \vec{g}_A(C)$  représente le champ de marée (dit "terme différentiel de gravitation") dû à la présence des autres astres.

Si l'on considère la Terre en rotation autour d'un astre se masse  $M_A$  et distant de  $r \gg R_T$  on obtient :

$$\vec{C}(M) = \frac{2GR_T M_A}{r^3} \vec{u}$$

pour le point de la surface terrestre le plus proche de l'astre attracteur ( $\vec{u}$  est dirigé vers l'astre) et

$$\vec{C}(M) = -\frac{2GR_T M_A}{r^3} \vec{u}$$

pour le point de la surface terrestre le plus éloigné de l'astre attracteur. Cette formule appelle plusieurs commentaires :

- l'effet varie comme  $\frac{M_A}{r^3}$ . Le champ de marée dû à la lune est 2 fois plus importante que le champ de marée dû au Soleil.
- Ce champ est faible : En considérant uniquement l'action de la Lune, le champ de marée vaut  $C \approx 10^{-6} m.s^{-2} \ll g_p$ .
- Ce champ n'est pas de révolution. Il tend à étirer la terre suivant la direction Terre-Astre. La croûte étant peu déformable subit peu ce champ, par contre l'effet est visible pour l'océan : apparaît alors un bulbe océanique. Lorsque la terre tourne un observateur voit en une journée les deux extrémités du bulbes ; il y a deux marées hautes par jour et deux marées basses par jour.
- L'action conjuguée de la lune et du soleil explique qu'il existe des marées de vives eaux (forts coefficients) lors des pleines lunes et nouvelles lunes ainsi que des marées de mortes eaux (faibles coefficients) lors des quartiers de lune.
- Le modèle est un modèle statique : on s'intéresse à la forme d'équilibre de l'océan. En fait le problème est dynamique ce qui complique énormément les choses. Ce qu'il faut retenir : des effets de géométrie et de résonance amplifient les effets de marée en certains points de la planète

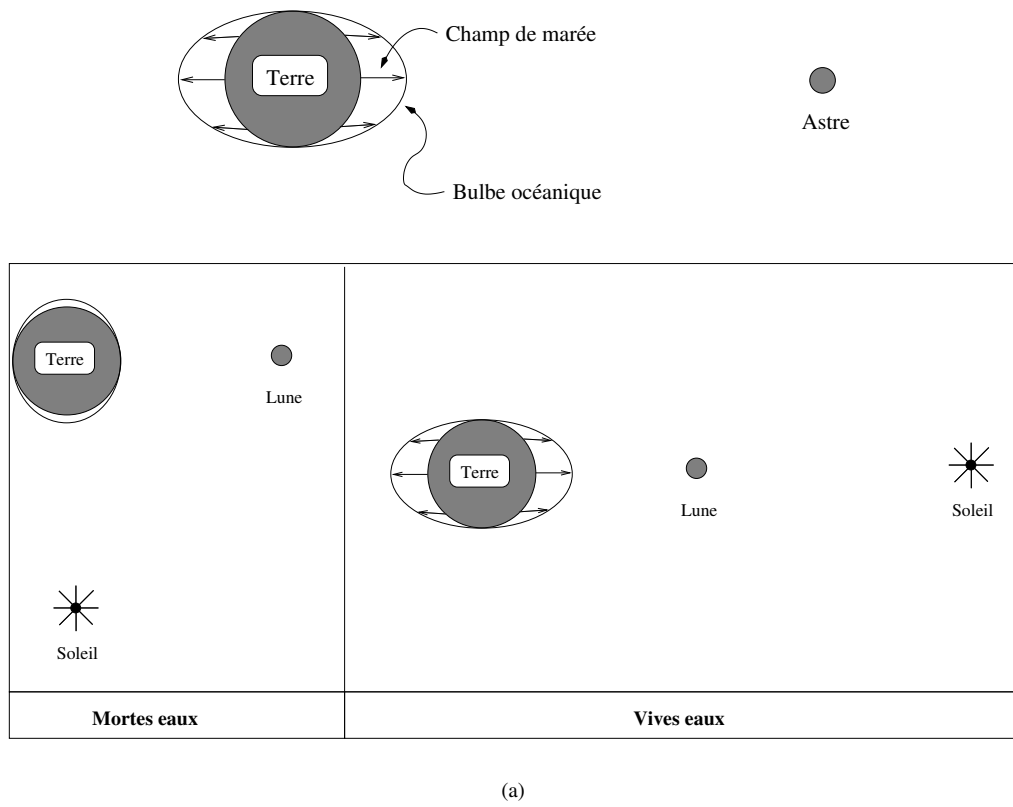


FIG. 4.5 – *Champs de marée.*



# Chapitre 5

## Oscillateurs

### 5.1 Oscillateurs harmoniques

#### 5.1.1 Définition

En général, lorsque l'on perturbe un système à partir de son état d'équilibre stable, celui se met à osciller autour de sa position d'équilibre : on a alors un oscillateur. De plus, si l'amplitude des oscillations est faible, l'oscillateur est en général harmonique, c'est à dire qu'il obéit à une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

où  $\omega_0^2$  est une constante positive homogène à une pulsation au carré. La solution de cette équation différentielle est (si  $x$  est réelle) :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où  $A$  et  $\varphi$  dépendent des conditions initiales.  $\omega_0$  s'appelle la pulsation propre. Les oscillations sont périodiques de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

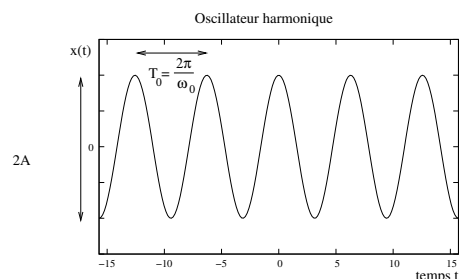


FIG. 5.1 –

#### 5.1.2 Approximation harmonique

Supposons un système mécanique conservatif à l'équilibre stable. L'énergie potentielle présente donc un puits de potentiel centré sur la position d'équilibre. Imaginons, que l'on perturbe légèrement le système en

lui donnant un peu d'énergie. En écrivant la conservation de l'énergie et en développant l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}I\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x)$$

avec  $I$  le terme d'inertie. L'approximation harmonique consiste à approcher le puits de potentiel par la parabole osculatrice.

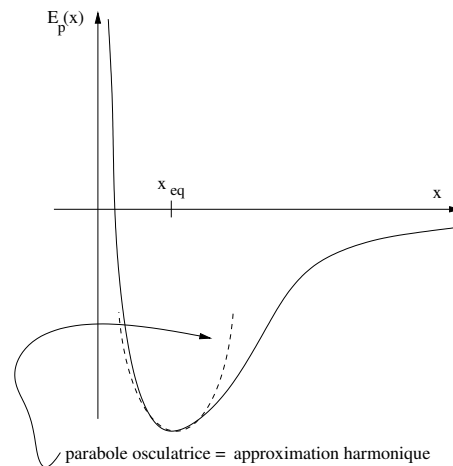


FIG. 5.2 – Approximation harmonique.

$$E_p \approx E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}K(x - x_{eq})^2$$

où  $K = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}} > 0$  puisque l'équilibre est supposée stable. En écrivant que

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

on obtient

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{K}{I}$ . Plus le puits est étroit et plus les oscillations sont rapides.

Enfin, si l'on calcule l'énergie mécanique de l'oscillateur, on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}K A^2$$

L'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations. Cette propriété se retrouve également dans les ondes.

L'approximation harmonique est très utilisée quand on veut décrire simplement les oscillations. Par exemple, elle est utilisée pour décrire les vibrations moléculaires, les vibrations d'un cristal etc.

### 5.1.3 Exemples

**système masse-ressort** : Considérons un ressort horizontal, de constante de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$  à l'extrémité duquel on fixe une masse pouvant glisser sans frottement sur le support horizontal (voir figure 5.3).



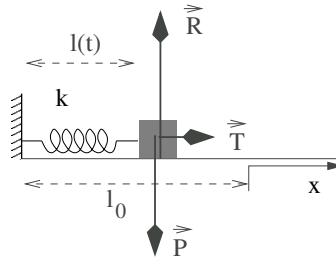


FIG. 5.3 – Système masse-ressort.

La force de pesanteur est compensée par la réaction du support puisqu'il n'y a pas d'accélération verticale. Pour le mouvement horizontal, on a une force de tension élastique

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$$

où  $x$  désigne l'allongement du ressort par rapport à la situation au repos. La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Le système se met donc à osciller (si on l'écarte de sa position d'équilibre  $x = 0$ ) à la fréquence  $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ . On notera que la fréquence propre dépend de la masse.

**oscillateur spatiale** : Considérons le montage de la figure 5.4 et supposons que la masse  $m$  reste dans le plan  $(xOy)$ . On montre que pour de petits déplacements, la force de rappel est  $\vec{f} = -2k\vec{r}$  ; on a un oscillateur spatial. En projetant la RFD sur les deux axes, on obtient deux oscillateurs isochrones :

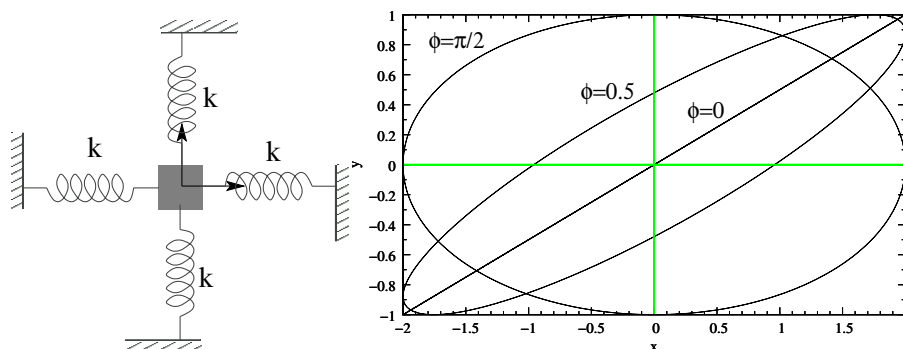


FIG. 5.4 – Oscillateur spatiale.

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

où  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ . Les solutions sont donc :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$$

Il y a 4 constantes d'intégrations pour 4 conditions initiales  $(x(0), y(0), v_x(0), v_y(0))$ . La masse décrit une ellipse inscrite dans un rectangle  $A \times B$ , à la fréquence  $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ . La forme de la trajectoire dépend du déphasage  $\Delta\phi = \varphi_y - \varphi_x$ . Si  $\Delta\phi = 0[\pi]$  on obtient une droite d'équation  $y = \pm \frac{B}{A}x$ . si  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$  on obtient une ellipse d'axe Ox et Oy, sinon on obtient une ellipse inclinée.

## 5.2 Oscillations amortis

### 5.2.1 Définition

Lorsque l'on tient compte de la dissipation d'énergie sous forme de chaleur, on observe alors

- soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps,
- soit un retour à l'équilibre sans oscillation.

On parle alors d'*amortissement*. On observe ce phénomène dans les cas suivants :

- le ressort amorti par un frottement visqueux linéaire à la vitesse.
- le circuit RLC série en électricité.

Ces deux exemples montrent un phénomène identique (l'oscillation amortie) observé dans deux domaines distincts de la physique.

Un oscillateur *harmonique linéaire amorti* est régi par une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants réels positif :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2\alpha \frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

où  $\omega_0 > 0$  est la pulsation propre de l'oscillateur,  $2\alpha > 0$  est le facteur d'amortissement. On peut définir le temps  $\tau = \frac{1}{2\alpha}$  (temps de relaxation). Enfin avec  $\tau$  et  $\omega_0$  on peut construire un nombre *sans dimension*  $Q = \omega_0 \tau$  : le facteur de qualité.

Un oscillateur harmonique linéaire amorti se caractérise par le couple  $(\omega_0, Q)$  ; l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

On remarque que l'on retrouve l'oscillateur harmonique lorsque  $Q \rightarrow \infty$ . Plus  $Q$  est grand donc, moins l'oscillateur est amorti.

### 5.2.2 Solutions

On distingue différents régimes (voir figure 5.5 et les simulations à la page suivante :

<http://perso.ensc-rennes.fr/jimmy.rousseau/index.php?page=java3>) :

**pseudo périodique** : ( $Q > \frac{1}{2}$ )

$$x(t) = e^{-\alpha t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t]$$

où  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ . Pseudo-période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

**critique** : ( $Q = \frac{1}{2}$ )

$$x(t) = [A + Bt]e^{-\alpha t}$$

régime pour lequel le retour à l'équilibre est le plus rapide.

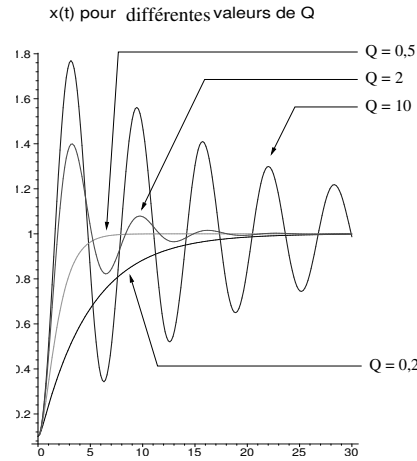


FIG. 5.5 – Différents régimes d'amortissement.

**apériodique** : ( $Q < \frac{1}{2}$ )

$$x(t) = e^{-\alpha t} [Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}]$$

$$\text{où } \Omega = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

On retiendra les idées simples suivantes : plus l'amortissement est important et moins il y a d'oscillations. Un oscillateur perturbé, oscillera si  $Q > \frac{1}{2}$  ce qui est assez fréquent. Par exemples :

- circuit RLC sélectif :  $Q \approx 100$
- atome excité :  $Q \approx 10^7$
- terre, lors d'un tremblement de terre :  $Q \approx 1000$ .

## 5.3 Oscillateur linéaire amorti en régime sinus forcé

### 5.3.1 Mise en équation

Exemple : considérons un point matériel de masse  $m$  suspendue par un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Soumettons l'autre extrémités du ressort A à un déplacement sinusoïdal  $x_A(t) = X_A \cos(\omega t)$  de fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  connue. De plus le point matériel plonge dans un fluide visqueux exerçant une poussée d'Archimède  $\vec{\pi}$  et une force de frottement que l'on considérera linéaire en vitesse ( $\vec{f} = -\beta \vec{v}$ ). On note  $x(t)$  le déplacement de M par rapport à sa position d'équilibre (cf. figure 5.6). On a

$$mg - \pi = k(l_{eq} - l_0)$$

à l'équilibre et

$$mg - \pi - k(l - l_0) - \beta \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ce qui donne avec  $x_A + l = l_{eq} + x$ ,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_A \cos(\omega t)$$

où  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  est la pulsation propre du ressort et  $Q = \sqrt{\frac{km}{\beta}}$  le facteur de qualité.

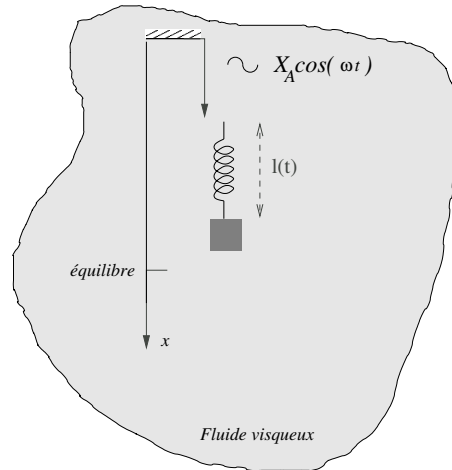


FIG. 5.6 – Excitation sinusoïdale d'un système masse-ressort.

### 5.3.2 Solution

On sait que la solution est la somme de deux termes :

- la solution de l'équation homogène qui correspond au régime transitoire. On rappelle qu'il y a trois régimes distincts selon la valeur du facteur de qualité. Dans les trois cas le temps de réponse est de l'ordre de  $t_r \approx \tau = \frac{1}{2\alpha} \approx QT_0$ . En général, en mécanique, le temps de réponse est de l'ordre de la seconde. Lorsque  $t \gg t_r$ , le régime libre s'est complètement dissipé, seul persiste le régime sinusoïdal forcé.
- la solution particulière sinusoïdale de même fréquence qui correspond au régime forcé :  $x(t) = X \cos(\omega t + \Phi_x)$ .

On trouve  $X$  et  $\Phi_x$  en utilisant la méthode complexe :  $x(t) \rightarrow \underline{x(t)} = \underline{X} e^{j\omega t}$ .

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\underline{X} = \frac{\omega_0^2 X_A}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\alpha}$$

### 5.3.3 Résonances

Voir la simulation à la page suivante :

<http://perso.ensc-rennes.fr/jimmy.roussel/index.php?page=java4>

#### Résonance en élongation

la courbe de réponse en élongation est la même courbe que la réponse en tension capacitive dans un circuit RLC série forcé (cf. figure 5.7)

On observe une résonance quand  $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La résonance est d'autant plus aiguë que  $Q$  est grand.

On montre que lorsque  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la réponse en élongation est la plus plate en basse fréquence. Dans ce cas, à basse fréquence, le ressort se comporte comme une tige rigide.

#### Résonance en vitesse

En notation complexe, la vitesse est simplement reliée à la position :  $\underline{V} = j\omega \underline{X}$ .

la courbe de réponse en vitesse est la même courbe que la réponse en courant dans un circuit RLC série forcé (cf. figure ?? )

Pour  $\omega = \omega_0$ , on a résonance de vitesse. Les pulsations de coupures  $\omega_{\pm}$  sont telles que  $V(\omega_{\pm}) = \frac{V_{m0}\omega_0}{\sqrt{2}}$ . L'intervalle  $[\omega_-, \omega_+]$  définit la bande passante. L'acuité de la résonance se mesure par la quantité  $\frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$ . On montre que l'acuité à la résonance vaut

$$\frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} = Q$$

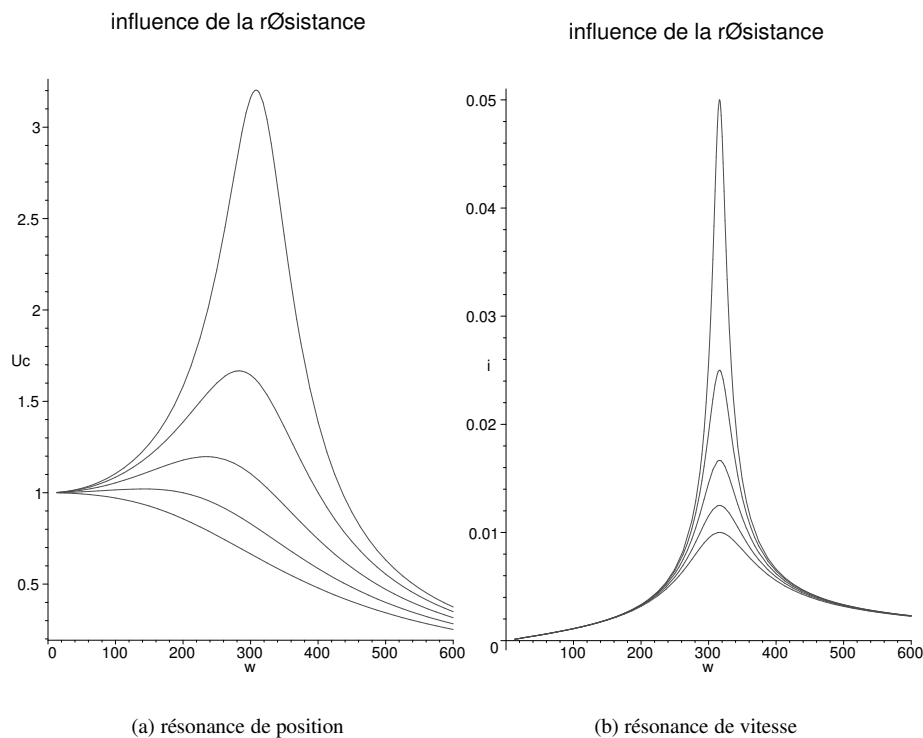


FIG. 5.7 – Influence du coefficient de frottement (lié à la résistance pour un circuit RLC) sur les Courbes de résonance.

### 5.3.4 Analogies électromécaniques

Mécanique	Électrocinétique
élongation $x$	charge $q$
vitesse $v$	intensité $i$
force $f$	tension $U$
masse $m$	auto-inductance $L$
raideur $k$	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
frottement $\beta$	Résistance $R$
impédance mécanique $Z = \frac{F}{v}$	impédance électrique $Z = \frac{U}{I}$



# Chapitre 6

## Théorème du moment cinétique

### 6.1 Moment d'une force

#### 6.1.1 Moment d'une force par rapport à un point

**Définition** : On appelle le moment d'une force  $\vec{F}$  appliquée en  $M$  par rapport à un point  $O$ , le vecteur :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Unité : N.m

On a la relation (torsorielle)

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) + \vec{OO'} \wedge \vec{F}$$

Le moment d'un couple (noté  $\vec{\Gamma}$ ) de forces opposées appliquée en A et B est indépendant de O :

$$\vec{\Gamma} = +\vec{BA} \wedge \vec{F}$$

#### 6.1.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté

**Définition** : Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire orientant un axe ( $\Delta$ ) passant par un point O. On appelle le moment d'une force par rapport à l'axe ( $\Delta$ ), le scalaire

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

Ce scalaire est indépendant de la position de O sur l'axe. En effet, si O' est un autre point sur l'axe on a

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} + (\vec{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

Le moment d'une force par rapport à l'axe ne dépend donc que de la force et de l'axe.

**Bras de levier** : On définit  $OH$  comme étant le *bras de levier*, c'est-à-dire la distance entre l'axe et la droite support de la force. On a

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F.OH$$

Si la force tend à faire tourner le point M autour de l'axe dans le sens positif (associé au sens de  $\vec{u}$  par la règle du tire-bouchon)  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F.OH$ . sinon,  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -F.OH$ .

**Remarque** : Pour un couple de forces opposées :  $\vec{\Gamma} = \Gamma_\Delta \vec{u}$  où  $\Delta$  est un axe perpendiculaire au plan formé par (AB) et  $\vec{F}$ .

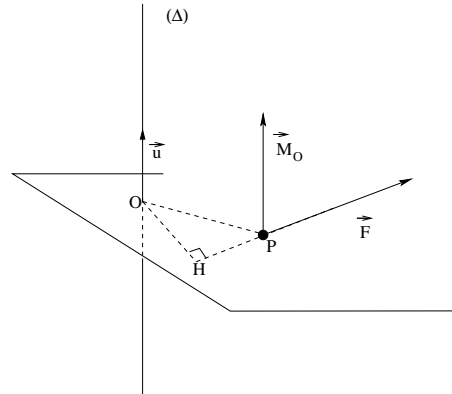


FIG. 6.1 – Moment d'une force par rapport à un axe.

## 6.2 Moment cinétique

### 6.2.1 Moment cinétique par rapport à un point

**Définition** : On appelle le moment cinétique par rapport à un point  $O$ , d'un point matériel situé en  $M$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ , le vecteur :

$$\vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

Unité : J.s

On a la relation (torsorielle)

$$\vec{\sigma}_O(M) = \vec{\sigma}_{O'}(M) + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}$$

### 6.2.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté

**Définition** : Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire orientant un axe  $(\Delta)$ . On appelle le moment cinétique d'un point matériel par rapport à l'axe  $(\Delta)$ , le scalaire

$$\sigma_\Delta(M) = \vec{\sigma}_O(M) \cdot \vec{u}$$

où  $O$  est un point quelconque de l'axe  $(\Delta)$ .

pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, à la distance  $r$  et à la vitesse angulaire  $\omega$ , on obtient :

$$\sigma_\Delta(M) = \pm m r^2 \omega$$

où l'on choisira le signe + si la particule tourne dans le sens positif associé à l'axe orienté.

## 6.3 Théorème du moment cinétique

### 6.3.1 Énoncé

Ce théorème découle du principe fondamental de la dynamique. Il ne possède donc pas plus d'information que n'en possède le principe fondamental de la dynamique.



Théorème du moment cinétique en un point fixe O : Dans un référentiel galiléen, le moment cinétique d'un point matériel soumis à une résultante de forces  $\sum \vec{F}$ , vérifie la relation cause/effet :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M)}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_O(\sum \vec{F})$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe.

$$\frac{d\sigma_\Delta(M)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\sum \vec{F})$$

### 6.3.2 Application au pendule simple

Le théorème du moment cinétique peut être utile dans les problèmes où des angles interviennent.

Cas du pendule simple : Considérons un pendule simple rigide en mouvement dans un plan vertical d'un référentiel terrestre galiléen. Les forces appliquées au point matériel de masse  $m$  sont le poids  $\vec{P}$  et la tension  $\vec{T}$  (on néglige les frottements). Le point matériel est donc animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$  ; on repère sa position à l'aide de l'angle  $\theta$  défini dans le sens positif.

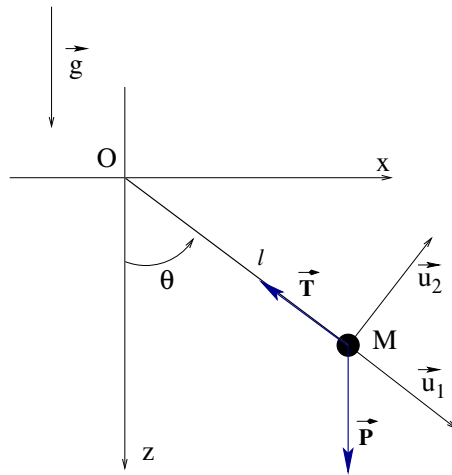


FIG. 6.2 – Le pendule simple.

On a :

- $\sigma_\Delta(M) = ml^2 \frac{d\theta}{dt}$
- $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0$
- $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -P.OH = -mgl \sin(\theta)$
- On en déduit l'équation différentielle du second ordre : .

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0$$

où  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ .

### 6.3.3 Cas d'un système de points

Pour un système de points  $\mathcal{S}$ , on définit le moment cinétique du système en sommant tous les moments cinétiques de chaque point :

$$\vec{\sigma}_0(\mathcal{S}) = \sum \vec{\sigma}_0(M_i)$$

En appliquant, à chacune particule, le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe O, ainsi que le principe des actions réciproques, on obtient :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0(\mathcal{S})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{0ext}$$

où  $\vec{\mathcal{M}}_{0ext}$  désigne la somme des moments des *forces extérieures* par rapport à O fixe.

## Chapitre 7

# Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives

### 7.1 Forces centrales conservatives

#### 7.1.1 Généralités

**Force centrale** : Une force est dite centrale lorsque la droite support de cette force passe constamment par un point fixe O. Si l'on considère un système de coordonnées sphériques d'origine O on peut écrire la force en un point M :

$$\vec{F} = F \vec{e}_r$$

Lorsque  $F > 0$ , la force est répulsive, sinon elle est attractive.

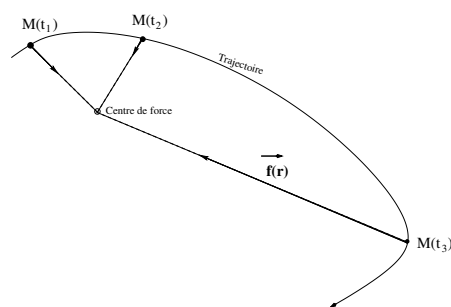


FIG. 7.1 – Exemple de force centrale attractive.

La force centrale est conservative si  $F$  ne dépend que de  $r$ . Son travail élémentaire peut s'exprimer par :

$$\delta W = F(r)dr = -dE_p$$

#### 7.1.2 Exemples

- force de gravitation entre un astre fixe (massif) à symétrie sphérique de masse  $M$  et un astre mobile à symétrie sphérique de masse  $m$  :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

force centrale conservative :

$$\delta W = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}dr = -dE_p$$

d'où l'on tire l'énergie potentielle

$$E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r} + C$$

NB : on choisit souvent la convention  $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p = 0$ , ce qui permet de poser  $C = 0$

- o forces électrostatiques entre une charge ponctuelle fixe (charge électrique  $Q$ ) et une charge ponctuelle mobile (charge  $q$ ).

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

lorsque  $Q$  et  $q$  sont de même signe, la force est répulsive.

C'est aussi une force conservative, d'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

## 7.2 Lois générales de conservation

On considère un point matériel de masse  $m$  soumis à une force centrale conservative de centre  $O$ , *point fixe* d'un référentiel galiléen.

### 7.2.1 Conservation du moment cinétique

**Moment cinétique** : La force étant centrale de centre  $O$ , son moment par rapport à  $O$  est nul ; le moment cinétique par rapport à  $O$  est donc un vecteur constant.

$$\vec{\sigma}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{C}$$

À chaque instant le vecteur  $\vec{OM}$  est perpendiculaire à un vecteur constant : le mouvement est donc un plan perpendiculaire  $\vec{\sigma}_O(M)$ .

Cas particulier des mouvements rectilignes : si initialement  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires,  $\vec{\sigma}_O(M) = \vec{0}$  et le mouvement est rectiligne (cas d'une chute libre).

**loi des aires** : Le mouvement étant plan, on peut caractériser le point  $M$  par deux coordonnées. On choisit les coordonnées polaires :  $M(r, \theta)$ . La conservation du moment cinétique (Intégrale première associée) s'exprime alors par :

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma_0$$

Interprétation cinématique : l'aire balayée par le vecteur  $\vec{OM}$  par unité de temps est constante et égale à  $\frac{\sigma_0}{2m}$  (vitesse aréolaire).

### 7.2.2 Conservation de l'énergie

**potentiel effectif** : La conservation de l'énergie (intégrale première de l'énergie) donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = E_m$$

Or

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\sigma_0^2}{m^2 r^2}$$

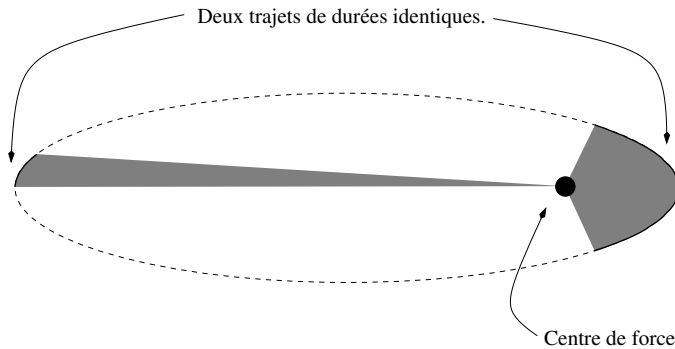


FIG. 7.2 – Loi des aires : les deux aires balayées sont identiques. La vitesse augmente quand la particule se rapproche du centre attracteur.

d'où la relation de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + E_p(r) = E_m$$

**Le problème est donc analogue à l'étude d'un point matériel à un degré de liberté ( $r$ ) soumis à une énergie potentielle effective**

$$E_{p\text{eff}} = \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

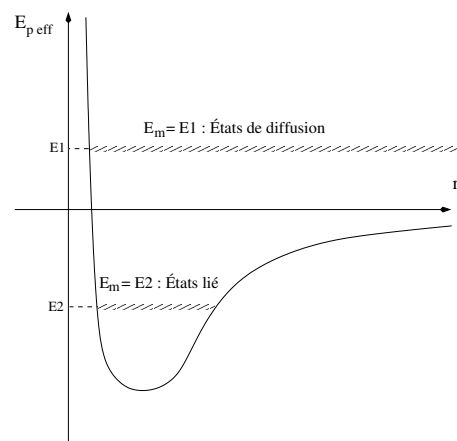


FIG. 7.3 – Exemple d'énergie potentielle effective. Suivant la valeur de l'énergie mécanique, les valeurs de  $r$  sont bornées ou pas.

### 7.3 Mouvement dans un champ de forces centrales newtonien

On se place dans le cas où la seule force est centrale newtonienne du type  $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ . Lorsque  $K > 0$  la force est répulsive, sinon elle est attractive.

### 7.3.1 Cas particulier du mouvement circulaire

L'étude énergétique montre que :

- si  $K < 0$  la trajectoire circulaire est possible.
- si  $K > 0$  la trajectoire ne peut pas être circulaire.

Supposons donc  $K < 0$ . La conservation du moment cinétique donne

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma_0$$

**Le mouvement circulaire est donc uniforme** (vitesse angulaire constante).

L'application du PFD donne :

$$mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{K}{r^2}$$

de là on en déduit que  $E_p = -2E_c$  et  $v = \sqrt{\left( \frac{-K}{mr} \right)}$  ; la vitesse décroît quand  $r$  croît.

On peut relier la période avec le rayon de la trajectoire circulaire :  $T = \frac{2\pi r}{v}$  ce qui donne en remplaçant  $v$  par l'expression ci-dessus :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{-K}{4\pi^2 m}$$

Cette relation donne, dans le cas de la force de gravitation, la troisième loi de Képler relative à l'orbite circulaire :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Enfin l'énergie mécanique est constante et égale à

$$E_m = -\frac{GmM}{2r}$$

### 7.3.2 solution générale $r(\theta)$

la relation de conservation de l'énergie combinée à la relation de conservation du moment cinétique donne :

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} = E_m$$

On pose  $u = \frac{1}{r}$ . On a alors

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -C \frac{du}{d\theta}$$

où  $C = \frac{\sigma_0}{m}$  est la *constante des aires*. On a donc :

$$\frac{1}{2}mC^2 \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{mC^2 u^2}{2} + Ku = E_m$$

L'énergie étant constante, dérivons cette relation par rapport à  $\theta$  et éliminons la solution  $\frac{du}{d\theta} = 0$  (cas circulaire) :

$$\left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) + u = -\frac{K}{mC^2}$$

On distingue 2 cas :

- $K < 0$  (cas attractif) :

- On pose  $\frac{1}{p} = \frac{-K}{mC^2} > 0$ . La solution s'écrit alors  $u = \frac{1}{p} + A \cos(\theta - \varphi)$  c'est à dire

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}$$

où  $e$  et  $p$  sont positifs (on peut toujours jouer sur  $\varphi$  pour avoir  $e > 0$ ). Il s'agit de l'équation polaire d'une conique de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$  avec origine au foyer (cf. figure 7.4).  $\theta = \varphi$  est l'équation du grand axe de la conique.

- si  $e = 0$ , on obtient un cercle.
- si  $0 < e < 1$ , on obtient une ellipse (lieu des points tels que  $MF + MF' = 2a$ ) de demi-grand axe  $a = \frac{p}{1-e^2}$  et de demi-petit axe  $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ . la distance focale vaut  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .
- si  $e = 1$  on obtient une parabole.
- si  $e > 1$  on obtient une branche d'hyperbole ( $|MF - MF'| = 2a$ ). On a  $\tan^2 \theta_{max} = e^2 - 1$  (asymptotes) et  $c - a = \frac{p}{1+e}$ .
- Dans tous les cas on a  $e = \frac{c}{a}$ .
- **Application** : mouvement des astres autour d'un astre massif ou attraction d'une charge ponctuelle autour d'une autre charge fixe de signe opposé.
- $K > 0$  (cas répulsif) :
  - On pose  $\frac{1}{p} = \frac{K}{mC^2} > 0$ . La solution s'écrit alors  $u = -\frac{1}{p} + A \cos(\theta - \varphi)$  c'est à dire

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \varphi) - 1}$$

où  $e$  et  $p$  sont positifs (on peut toujours jouer sur  $\varphi$  pour avoir  $e > 0$ ). De plus, ici,  $e > 1$  nécessairement. Il s'agit donc de l'équation polaire d'une branche d'hyperbole de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e > 1$  avec origine au foyer.  $\theta = \varphi \pm \arccos \frac{1}{e}$  est l'équation des asymptotes. attention ici la branche d'asymptote a pour foyer  $F'$  alors que le centre répulsif est en  $F$ . La trajectoire ne contourne pas le centre répulsif.

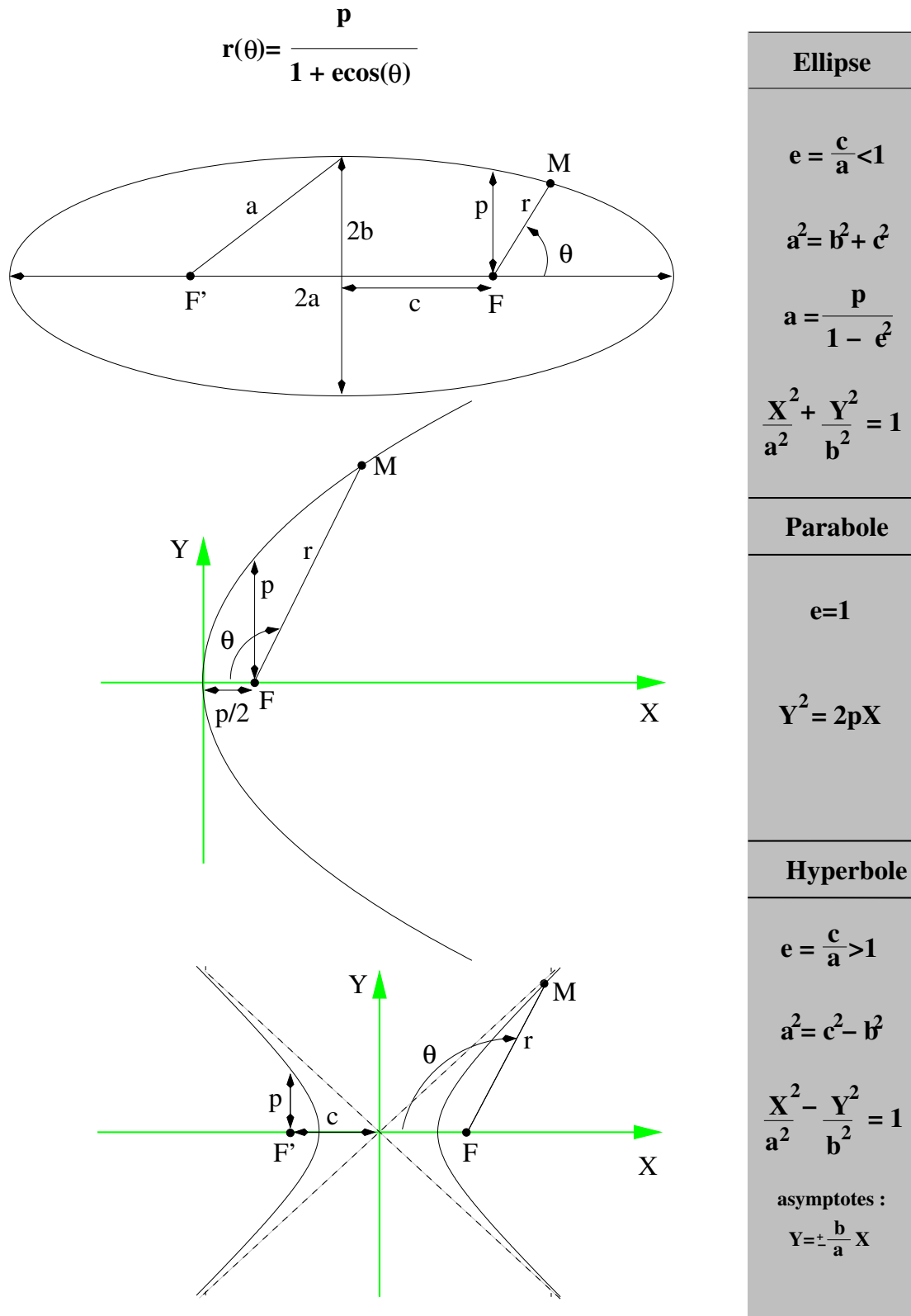
- **Application** : diffusion de rutherford.

### 7.3.3 Lois de Képler

**Histoire** : “Les 3 lois énoncées par Kepler il y a 4 siècles ont apporté une alternative au paradigme alors en vigueur : les épicycles de Ptolémée. Elles ont substitué à une version idéalisée du monde des lois physiques basées sur un concept fertile : l'héliocentrisme. Tycho Brahe a introduit une composante essentielle dans l'histoire de l'astronomie : des observations de qualité hors pair, menées pourtant sans l'aide d'aucun instrument optique. Dans sa démarche, Tycho Brahe fut grandement aidé par le roi du Danemark, qui subventionna l'observatoire d'Uraniborg.

A partir des observations accumulées par Tycho Brahe, Kepler se rend compte qu'il faut rejeter la théorie des mouvements circulaires uniformes. Pour résoudre le problème de l'orbite de Mars, Kepler choisit quatre positions de la planète et, après de laborieux calculs entachés d'erreurs qui, par chance, se compensent, parvient à obtenir une orbite circulaire où le Soleil occupe le point équant. Ce point équant, inventé au IIe siècle de notre ère par l'astronome Ptolémée, est un point symétrique du Soleil par rapport au centre de l'orbite. Pourtant, si d'autres positions de Mars s'insèrent parfaitement dans la nouvelle orbite ainsi définie, deux observations s'écartent de près de 8' de la position théorique. Au lieu de les rejeter, Kepler renonce à son hypothèse : l'orbite ne peut pas être un cercle. Avant de se replonger dans la quête du mouvement de Mars, Kepler décide de revoir dans le détail le mouvement de la Terre autour du Soleil. En effet, pour passer d'une position géocentrique à une position héliocentrique de Mars, il est nécessaire de traiter correctement le mouvement orbital de la Terre : si celui-ci est entaché d'erreurs, elles se répercuteront sur le mouvement de Mars. C'est dans cette recherche que Kepler va formuler deux erreurs de principe physique qui vont se compenser, et conduire à des lois.

Kepler imagine une méthode pour obtenir l'excentricité de la Terre à partir de trois observations de Mars faites à 687 jours d'intervalle (période de révolution sidérale de Mars). Il sait en outre que plus

FIG. 7.4 – Les coniques.  $F$  et  $F'$  sont les foyers des coniques.



les planètes sont proches du Soleil, plus elles se déplacent vite, tandis que plus elles s'en éloignent, plus leur mouvement ralentit. Kepler en déduit que l'action du Soleil doit varier en fonction de la distance de la planète au Soleil ; il la suppose inversement proportionnelle à la distance. Première erreur. Kepler cherche ensuite à calculer la durée que met la Terre pour passer d'une position à une autre. Il décompose pour cela une portion de l'orbite en petits segments et s'aperçoit que la durée passée par la Terre sur de petits arcs est approximativement proportionnelle à la distance de ces arcs au Soleil. Il assimile donc une surface à une somme de lignes. Deuxième erreur. Mais il transforme ces deux déductions en une loi correcte, la loi des aires : le rayon vecteur qui joint une planète au Soleil balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux. Historiquement, Kepler découvre donc en premier la loi que l'on présente pédagogiquement comme la deuxième. Kepler reprend alors son étude de l'orbite de Mars. En calculant avec son hypothèse des aires un grand nombre de positions, il obtient un ovale, qu'il assimile à une ellipse. Il constate alors que les positions de Mars sont correctement représentées. La trajectoire elliptique, appelée aujourd'hui la première loi, est découverte : les planètes décrivent autour du Soleil des ellipses dont ce dernier occupe l'un des foyers. Kepler publie ses découvertes en 1609 dans un ouvrage difficile, l'*Astronomia nova* (« l'Astronomie nouvelle »).

Si la chance a favorisé Kepler dans ses recherches (forte excentricité de l'orbite de Mars, erreurs de principe qui se compensent), on doit reconnaître en lui un travailleur acharné. On lui doit surtout l'abandon du mouvement circulaire uniforme ? principe remontant à l'Antiquité auquel Tycho Brahe accordait encore une valeur absolue ? et un souci constant de vérifier que les hypothèses s'accordent avec les observations (ce qui n'était pas le cas de Copernic), en quoi il mêle intimement faits et théories, deux composantes fondamentales de la démarche scientifique. Toujours attaché à trouver des harmonies dans les orbites planétaires, Kepler essaye d'associer les intervalles musicaux aux diamètres des orbites planétaires. Il met en lumière sa troisième loi en 1618 : les cubes des grands axes sont proportionnels aux carrés des périodes. La troisième loi de Kepler contribuera à confirmer les découvertes ultérieures de Newton sur la gravitation universelle et le mouvement des deux corps."

**À retenir** : les lois de Kepler sont :

1. Les planètes parcourent des orbites planes, elliptiques. Le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse.
2. En des durées égales, les planètes balayent des aires égales.
3. Le rapport du carré de la période de rotation au cube du demi-grand axe est identique pour toutes les planètes du système solaire.

**Généralisation** : Ces lois, obtenues dans le cas particulier du système solaire, se généralisent à tout système analogue, correspondant à un potentiel central en  $\frac{1}{r}$ . Le système considéré, dans ce potentiel, ayant une masse très inférieure à la masse du potentiel central, et n'étant pas perturbé par d'autres satellites, présente alors les propriétés suivantes :

1. Les planètes parcourent des orbites planes, coniques. Le centre attracteur occupe l'un des foyers de la conique. (cf. section précédente)
2. En des durées égales, les planètes balayent des aires égales. c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique. (valide pour toute force centrale)
3. Dans le cas d'une ellipse le rapport du cube du cube du demi-grand axe sur le carré de la période orbitale vaut

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$$

4. Enfin toujours dans le cas d'une trajectoire elliptique, l'énergie mécanique vaut :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM}{2a}$$

### 7.3.4 Vitesses cosmiques

Considérons un astre à symétrie sphérique de rayon  $R$  et de masse  $M$  d'où on lance un satellite avec une vitesse initiale  $v$ . Son énergie mécanique initiale vaut donc  $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R}$ .

- Vitesse de satellisation  $v_{sat} = \sqrt{gR} \approx 8 \text{ km.s}^{-1}$  sur Terre : c'est la vitesse minimale pour satelliser le satellite. Dans ce cas  $E > -\frac{GmM}{2R}$  (orbite circulaire de rayon  $R$ ).
- Vitesse de libération :  $v = \sqrt{2gR} \approx 11 \text{ km.s}^{-1}$  sur Terre : c'est la vitesse minimale pour libérer le satellite de l'attraction de l'astre. Dans ce cas  $E > 0$ .

## 7.4 Problème à N corps

### 7.4.1 Problème à deux corps

On considère un système mécanique  $\mathcal{S}$  formé par deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$ . On notera  $m$  la masse totale,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  la masse réduite,  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ ,  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ ,  $\vec{r}_{12} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  et  $\vec{v}_{2/1} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt}$  vitesse relative de  $M_2$  par rapport à  $M_1$ .

**Référentiel barycentrique** : Référentiel muni d'un repère d'origine le centre d'inertie du système et en translation par rapport au référentiel d'étude. On le notera  $\mathcal{R}^*$ .

La quantité de mouvement barycentrique vaut :

$$\vec{P}^*(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{p}_i^* = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_G) = \vec{0}$$

Pour un système à deux corps on a :

$$\vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^* = \mu \frac{d\vec{r}_{12}}{dt}$$

Supposons maintenant que le système soit isolé : les deux corps sont en interaction mais n'interagissent pas avec l'extérieur. On note  $\vec{f}_{1/2}$  la force qu'exerce le point  $M_1$  sur  $M_2$  et  $\vec{f}_{2/1}$  la force d'interaction de  $M_2$  sur  $M_1$ . Le principe des actions réciproques dit que  $\vec{f}_{1/2} = -\vec{f}_{2/1}$ . Si le référentiel d'étude est galiléen on peut écrire :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{f}_{2/1} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= -\vec{f}_{2/1} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que  $\vec{v}_G = \overrightarrow{\text{constante}}$  : Le centre d'inertie a un mouvement rectiligne uniforme et le référentiel barycentrique est en translation rectiligne uniforme. Ainsi,  $\mathcal{R}^*$  est galiléen. On peut donc appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel barycentrique ce qui donne :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = \vec{f}_{2/1}$$

**Le problème se ramène donc à un problème à un corps fictif (mobile équivalent) de vecteur position  $\vec{r}_{12}$  et de masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (masse réduite) soumis à la force  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ . Résoudre l'équation différentielle permet d'obtenir le mouvement de  $M_2$  autour de  $M_1$ . Quant au mouvement d'ensemble (celui du centre d'inertie) il suffit de connaître la vitesse du centre d'inertie à un instant quelconque pour connaître le mouvement d'ensemble.**

### 7.4.2 Retour sur le problème de Képler

On a montré les lois de Képler en considérant  $M_1$  fixe et  $M_2$  mobile ; on s'est donc placé dans le cas où  $m_1 \gg m_2$ , ce qui est justifié pour le système Terre-Soleil ou le système Terre-satellite mais qui ne l'est plus pour un système d'étoiles doubles par exemple. Le problème de Kepler est en fait un problème à 2 corps. Pour modifier les résultats il suffit de remplacer la masse  $m_2$  par la masse réduite  $\mu$ . On a montré au chapitre 7

- $mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma_0$  relation qui devient  $\mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma^*$ , la vitesse aréolaire vaut donc  $\frac{dA}{dt} = \frac{\sigma^*}{2\mu}$
- $\frac{a^3}{T^2} = \frac{-K}{4\pi^2 m}$  relation qui devient  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{-K}{4\pi^2 \mu}$  c'est-à-dire dans le cas de la gravitation :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

la troisième loi de Képler permet donc d'obtenir la *masse totale* du système.

- $E = -\frac{\mathcal{G}mM}{2a}$  expression de l'énergie mécanique qui devient

$$E^* = -\frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{2a}$$

### 7.4.3 Problème à $N > 2$ corps

On montre que le problème à  $N > 2$  corps n'a pas de solution analytique. Il existe de nombreuses méthodes approximatives pour traiter ces problèmes :

- méthodes d'intégrations numériques ( $N$  petit),
- méthodes statistiques ( $N$  grand),
- méthode des perturbations utilisée quand le problème est proche d'un problème à 2 corps c'est-à-dire lorsque les autres corps interagissent faiblement. C'est le cas des planètes du système solaire.

Pour obtenir une modélisation des mouvements dans le système solaire, on part du problème simplifié dans lequel les trajectoires des planètes sont des ellipses mais dont les éléments de ces ellipses vont varier au cours du temps. Cette ellipse de base est appelée ellipse osculatrice. Pour chaque planète on va considérer un problème à deux corps perturbé par les autres planètes. C'est LAGRANGE (1736-1813) au XVIIIème siècle qui a posé les équations du problème. Cette méthode est appelée méthode des perturbations. Partant des lois de la mécanique (attraction universelle et principe fondamental de la dynamique), les spécialistes de mécanique ont pu calculer les variations d'excentricité au cours du temps de l'orbite terrestre et relier cette variation aux variations climatiques (cf. figure 7.5).

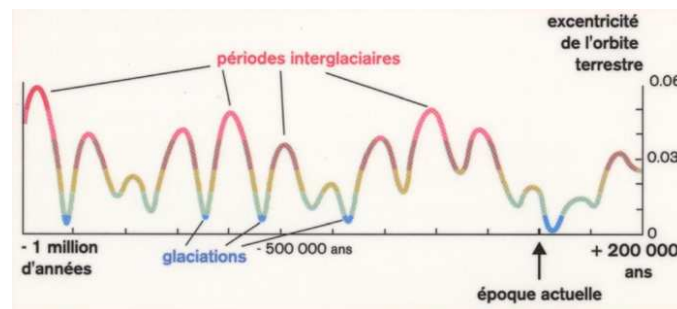


FIG. 7.5 –

Les perturbations du problème à 2-corps, typiquement lorsqu'un 3e s'en mêle, ont conduit à de beaux résultats, comme par exemple la découverte de Neptune par LE VERRIER en 1863. L'orbite d'Uranus

apparaissant perturbée par rapport au mouvement attendu (képlérien autour du Soleil, déjà perturbé par les géantes Jupiter et Saturne), le calcul a permis de localiser le perturbateur, en l'occurrence Neptune ainsi dévoilé.

# Chapitre 8

## Les collisions

### 8.1 Généralités

#### 8.1.1 Position du problème

Il existe une classe de phénomènes dans laquelle on est en présence de corps qui n'interagissent entre eux que lorsqu'ils sont très proches. Il arrive souvent que l'interaction soit difficile à expliciter. Dans ce cas, le point de vue le plus simple consiste à dire que les particules subissent un choc : On supposera qu'ils n'interagissent pas avant ni après et que l'interaction se produit sur une durée très courte.

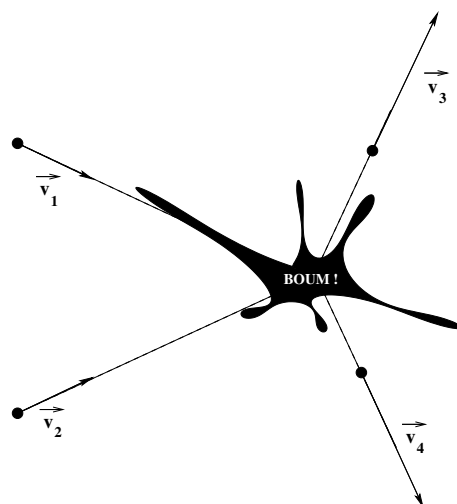


FIG. 8.1 – Collision.

**Définition :** on dit qu'il y a collision ou choc entre deux ou plusieurs particules quand ces objets subissent une interaction mutuelle de courte durée et de courte portée. Le choc est localisé dans le temps et l'espace. En règle générale, les forces d'interaction sont négligeables quand les particules sont suffisamment éloignées. On peut donc distinguer un "avant" et un "après" la collision.

Bien qu'une partie de l'information manque (on ne décrit pas ce qui se passe au moment du choc), on peut obtenir quelques informations sur la base de **principes de conservation et de symétrie**.

**Remarque** : contrairement à l'usage courant du terme, « collision » ici n'implique pas forcément qu'il y ait un impact ! Ainsi, le problème d'une comète qui passerait au voisinage du soleil peut être vu comme une collision.

### 8.1.2 Relations de conservation

$S$  désigne le système mécanique formé par l'ensemble des particules. On considère ce système isolé de l'extérieur ( $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ).

**conservation de la quantité de mouvement du système :**

D'après le théorème de la quantité de mouvement on a :

$$\frac{d\vec{P}(S)}{dt} = \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

ainsi la quantité de mouvement du système (ou résultante cinétique) se conserve.

$$\vec{P}_{avant} = \vec{P}_{après}$$

#### Conservation de l'énergie

Si les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle d'interaction  $E_{Pint}$ , alors l'énergie totale du système s'écrit :

$$E = E_c(S) + E_{Pint}(S) + \sum_{\text{particules}} U_i$$

où  $E_c(S)$  représente l'énergie cinétique totale du système,  $E_{Pint}(S)$  l'énergie d'interaction entre les particules et  $U_i$  l'énergie interne de chaque particule.

Si le système est isolé de l'extérieur, alors l'énergie totale se conserve. De plus, avant et après le choc, on considère que les particules n'interagissent pas entre eux. On peut donc écrire, si on note  $N_1$  le nombre de particules avant le choc et  $N_2$  le nombre de particules après le choc :

$$[E_c(S) + \sum_{i=1..N_1} U_i]_{avant} = [E_c(S) + \sum_{i=1..N_2} U_i]_{après}$$

- **Collision élastique** : on dit qu'il y a collision élastique lorsque le nombre de particules reste constant, et que l'énergie interne de chaque particule n'a pas évolué (pas de déformation par exemple). Dans ce cas on a :

$$[E_c(S)]_{avant} = [E_c(S)]_{après}$$

Exemple :

- collision entre boules de pétanque (boules dures indéformables) ;
  - diffusion de Rutherford (diffusion d'un noyau  ${}^4_2\text{He}^{2+}$  par un noyau positif).
  - **Collision inélastique** : Dans ce cas, le nombre de particules varie et/ou l'énergie interne de chaque particule varie.
- Exemples :

- Lorsqu' on laisse tomber une boule en pâte à modeler, celle-ci ne rebondira pas : toute l'énergie cinétique est convertie en énergie interne : la boule se déforme et s'échauffe ; l'énergie cinétique est convertie en énergie interne.
- processus chimique : par exemple le processus élémentaire bimoléculaire suivant  $A + B \rightarrow C + D$  est un choc inélastique puisque les particules après la collision sont différentes des particules avant le choc.

## 8.2 Exemples

### 8.2.1 Collision élastique

Traisons l'exemple d'une collision directe élastique entre deux boules indéformables. Notons  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  les vitesses avant le choc puis  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$  les vitesses après le choc.

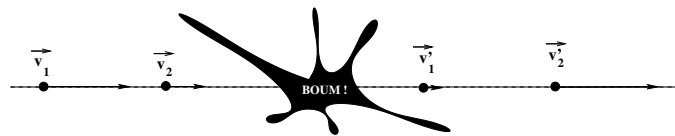


FIG. 8.2 – Collision directe élastique.

Les deux relations de conservation (conservation de  $\vec{P}(\mathcal{S})$  et de  $E_c(\mathcal{S})$ ) s'écrivent :

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 (v'_1)^2 + m_2 (v'_2)^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m_1 (v'_1 - v_1) &= m_2 (v_2 - v'_2) \quad (1) \\ m_1 ((v'_1)^2 - v_1^2) &= m_2 (v_2^2 - (v'_2)^2) \quad (2) \end{aligned}$$

On divisant (2) par (1) on obtient  $v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2$  et par substitution on obtient les vitesses finales en fonction des vitesses initiales. On trouve :

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Notez la symétrie de la solution ; il y a invariance par échange des indices  $1 \leftrightarrow 2$ .

**Cible immobile** : si la cible est immobile ( $v_2 = 0$ ) on a

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

- Ainsi on remarque par exemple que si  $m_1 \ll m_2$  on a

$$\begin{aligned} v'_1 &= -v_1 \\ v'_2 &= 0 \end{aligned}$$

Il y a rebond avec inversion du sens de la vitesse ; la cible ayant une grande inertie ne bouge pas. C'est ce que l'on obtient lorsque l'on laisse tomber une boule indéformable par terre.

- Si  $m_2 \gg m_1$  on obtient

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 \\v'_2 &= 2v_2\end{aligned}$$

c'est ce qui se passe quand on tape dans une balle avec une raquette par exemple.

- si  $m_2 = m_1$  on obtient

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_2 \\v'_2 &= v_1\end{aligned}$$

il y a échange des vitesses. C'est le phénomène qui est à l'origine des oscillations du pendule de Newton.



FIG. 8.3 – Pendule de Newton. ©Daniel Cordier

### 8.2.2 Collision inelastique

Supposons qu'une particule heurte avec une vitesse  $v$ , une cible immobile et qu'elle se lie à elle. La cible et le projectile ont même masse  $m$ . Après la collision, l'ensemble se déplace à la vitesse  $v'$  (le problème est unidimensionnel). Quelle est la perte d'énergie ?

La conservation de la quantité de mouvement implique

$$mv = 2mv' \Rightarrow v' = \frac{v}{2}$$

La conservation de l'énergie implique :

$$\frac{1}{2}mv^2 + 2U_1 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 + U'$$

Autrement dit :

$$U' = 2U_1 + \frac{1}{4}mv^2$$

la moitié de l'énergie cinétique est perdue dans la collision et sert à augmenter l'énergie interne du système ce qui se traduit soit par une déformation et/ou une dissipation de chaleur.



## Annexe A

# Outils mathématiques

### A.1 Systèmes de coordonnées

- Système de coordonnées cartésiennes : La base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est une base fixe orthonormée. La position d'un point M est repérée par le vecteur position :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

Lorsque  $x$ ,  $y$  et  $z$  varient de quantité infinitésimales  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , le point M se déplace de :

$$d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

Le volume infinitésimal (ou élément de volume) s'écrit  $d\tau = dx dy dz$ .

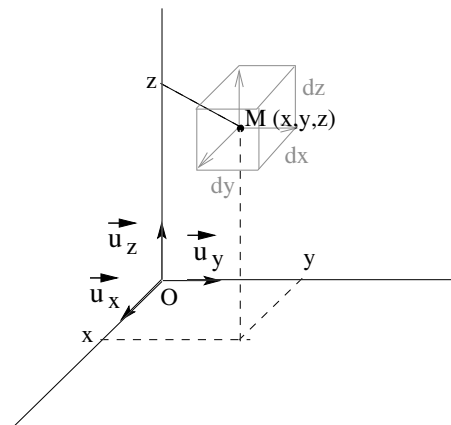


FIG. A.1 – Systèmes de coordonnées cartésiennes.

- Système de coordonnées cylindriques : La base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$  est une base locale orthonormée. La position d'un point M est repérée par le vecteur position :

$$\vec{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

Lorsque  $\rho$ ,  $\varphi$  et  $z$  varient de quantité infinitésimales  $d\rho$ ,  $d\varphi$  et  $dz$ , le point M se déplace de :

$$d\vec{OM} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\varphi\vec{u}_\varphi + dz\vec{u}_z$$

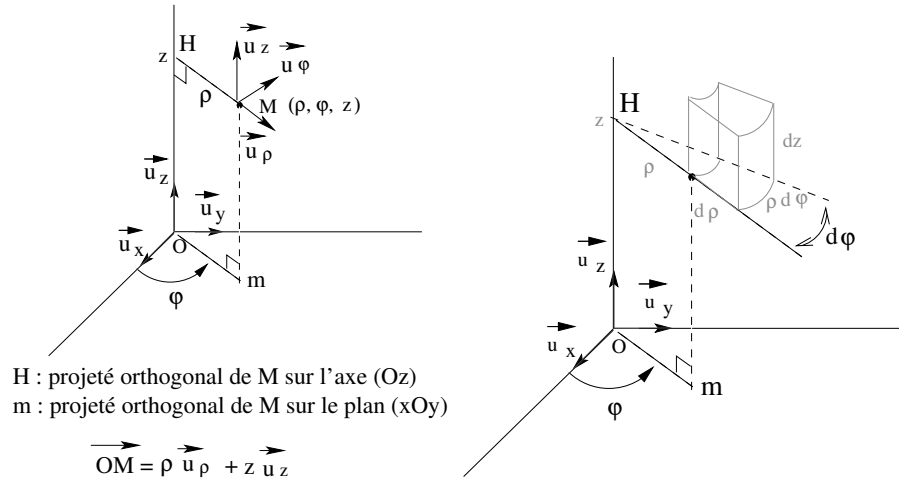


FIG. A.2 – Systèmes de coordonnées cylindriques.

Le volume infinitésimal (ou élément de volume) s'écrit

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$$

- système de coordonnées sphériques : La base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  est une base locale orthonormée. La position d'un point M est repéré par le vecteur position :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

Lorsque  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  varient de quantité infinitésimales  $dr$ ,  $d\theta$  et  $d\varphi$ , le point M se déplace de :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Le volume infinitésimal (ou élément de volume) s'écrit

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

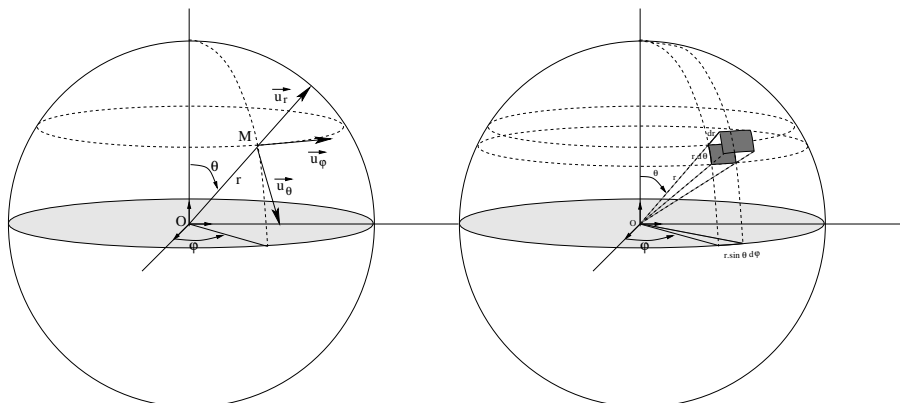


FIG. A.3 – Systèmes de coordonnées sphériques.

## A.2 Intégrales multiples

**Définition :** On rencontre souvent en physique des quantités que l'on représente par des sommes infinies de termes infiniment petit et que l'on calcule grâce à l'outil intégral. Par exemple si l'on veut calculer la masse d'une boule dont on donne la masse volumique  $\mu(x, y, z)$  en tout point de la boule on peut faire le raisonnement suivant : si l'on isole par la pensée un élément de volume parallélépipédique  $\delta x \delta y \delta z$ , celui possède une masse  $\delta m = \mu(x, y, z) \delta x \delta y \delta z$ . La masse totale sera la somme de toutes les  $\delta m$  dans la limite où les éléments de volumes tendent vers 0. Si cette limite existe, elle se calcule par l'intégrale triple suivante

$$M = \iiint_{x^2+y^2+z^2 < R^2} \mu(x, y, z) \, dx dy dz$$

Comment donc calculer une intégrale triple  $J = \iiint g(x, y, z) \, dx dy dz$  ? Dans le cas général, le calcul de ces intégrales peut être compliqué (voir théorème de Fubini et changements de variables en mathématique).

Cependant, il existe un cas où il se ramène au calcul d'intégrales simples. En physique, lorsque l'on choisit des variables adaptées, on se trouve souvent dans ce cas. On retiendra que si la fonction à intégrer se décompose comme un produit de fonction de chaque variable **ET** si les bornes d'intégrations de chaque coordonnées sont indépendantes des autres coordonnées, alors on a :

$$\iiint f(x)g(y)h(z) \, dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} g(y) \, dy \cdot \int_{z_1}^{z_2} h(z) \, dz$$

**Exemple :** Calcul du volume d'une boule.

Considérons une boule de rayon  $R$ . On peut calculer le volume d'une boule en sommant le volume de tous les parallélépipèdes infiniment petits situés à l'intérieur de la boule. Si l'on considère un point M de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  on sait que l'élément de volume en M s'écrit  $d\tau = dx dy dz$ . Le volume de la boule vaut donc

$$V = \iiint dx dy dz$$

le problème ici est que les bornes d'intégration dépendent des autres coordonnées. En effet si l'on fixe  $x$  et  $y$ , alors  $z$  varie entre  $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  et  $-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . On ne peut donc pas appliquer la règle ci-dessus. Ceci est dû à un mauvais choix de variables. En effet, les variables « naturelles » du problèmes sont celles du système sphérique. Or dans le système sphérique, l'élément de volume s'écrit  $d\tau = r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$ . Ici les bornes d'intégrations de chaque coordonnées sont indépendantes des autres coordonnées. Ainsi, le volume se calcule en coordonnées sphériques :

$$V = \iiint r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi = \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

## A.3 Le Produit vectoriel

### A.3.1 Définition

#### Définition

Le produit vectoriel des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un vecteur, noté  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  dont :

- la norme vaut  $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot |\sin(\vec{A}, \vec{B})|$ ;
- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$
- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite.

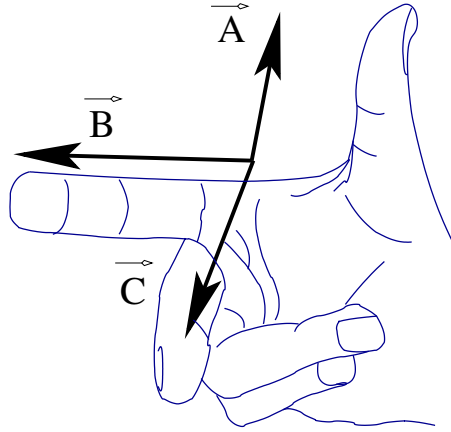


FIG. A.4 – Règle de la main droite

On peut calculer les composantes du produit vectoriel dans une base orthonormée quand on connaît les composantes des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ . On a

$$\begin{pmatrix} \vec{A} \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{B} \\ b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{C} \\ a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

### A.3.2 Propriétés

1.  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$  si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires ;
2.  $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$  ;
3.  $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$  (distributivité) ;
4.  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$  ;
5. L'aire d'un triangle (ABC) formé par les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  vaut  $S = \frac{1}{2} \|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$  ;
6. Le volume du prisme formé par les vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  vaut  $\mathcal{V} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$

## A.4 Opérateur gradient

L'opérateur **gradient** est un *opérateur différentiel linéaire vectoriel*. Il s'applique à une fonction scalaire (champ scalaire fonction de l'espace et du temps) et donne un champ vectoriel (fonction de l'espace et du temps). Il se lit « gradient » ou « nabla » et se note :

$$\overrightarrow{A}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}}f(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\nabla}f(\vec{r}, t)$$

Le tableau A.1 donne les différentes expressions du gradient dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	$\overrightarrow{\text{grad}}f = \overrightarrow{\nabla}f$
cartésiennes	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$
cylindriques	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$
sphériques	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right.$

TAB. A.1 – Expressions de l'opérateur gradient dans différents systèmes de coordonnées.



## Annexe B

# Quelques portraits de phase

### B.1 Le pendule simple

Le pendule simple rigide de longueur  $l$  fixe, est un système à un degré de liberté (l'angle  $\theta$ ) vérifiant :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \omega_0^2 \sin(\theta(t)) + 2\alpha \frac{d\theta}{dt}(t) = 0$$

où  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$  et  $2\alpha$  est le coefficient d'amortissement linéaire.

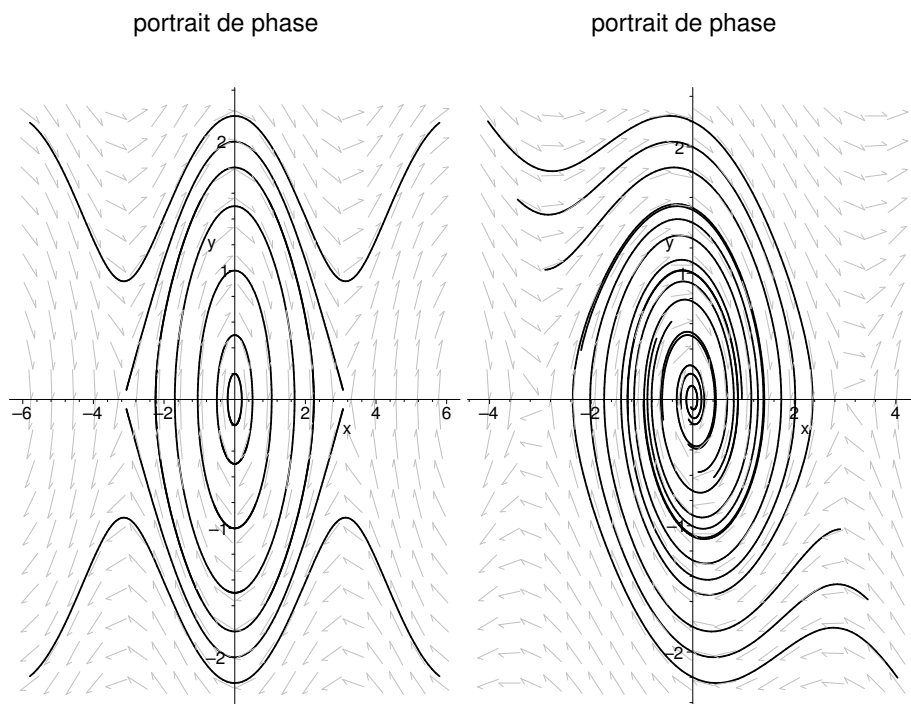


FIG. B.1 – Portraits de phase du pendule simple. En abscisse  $\theta$ , en ordonnée,  $\frac{d\theta}{dt}$ . À gauche l'amortissement est négligé, à droite on a introduit un coefficient d'amortissement.

On remarque sur la figure B.1 :

- $\theta = 0$  est une position d'équilibre stable (cycle autour du point singulier )
- $\theta = \pi [2\pi]$  est une position d'équilibre instable.
- Les trajectoires de phase ne se coupent pas.
- Sans frottement le portrait de phase est symétrique par rapport à l'axe des abscisses (réversibilité). Avec frottement cette symétrie disparaît (irréversibilité).
- lorsque l'on néglige les frottements, le phénomène est périodique pour les petites vitesses angulaires (cycles) sinon on obtient un mouvement de révolution non uniforme.
- Lorsque l'on tient compte des frottements, toutes les trajectoires de phase convergent vers  $\theta = 0 [2\pi]$  : ces points sont les attracteurs ponctuels.

## B.2 L'oscillateur linéaire amorti

L'oscillateur linéaire amorti est un système à un degré de liberté  $x$  vérifiant :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2\alpha \frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq}$$

On définit le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$ . La figure B.2 montre les différents régimes :

- Régime pseudo-périodique si  $Q > \frac{1}{2}$ . Oscillations amorties exponentiellement.
- Régime apériodique si  $Q < \frac{1}{2}$ . Régime sans oscillations.
- Régime critique  $Q = \frac{1}{2}$ . C'est le régime pour lequel le retour à l'équilibre est le plus rapide.

La figure B.2 montre également un portrait de phase d'un oscillateur de facteur de qualité  $Q = 5$ .

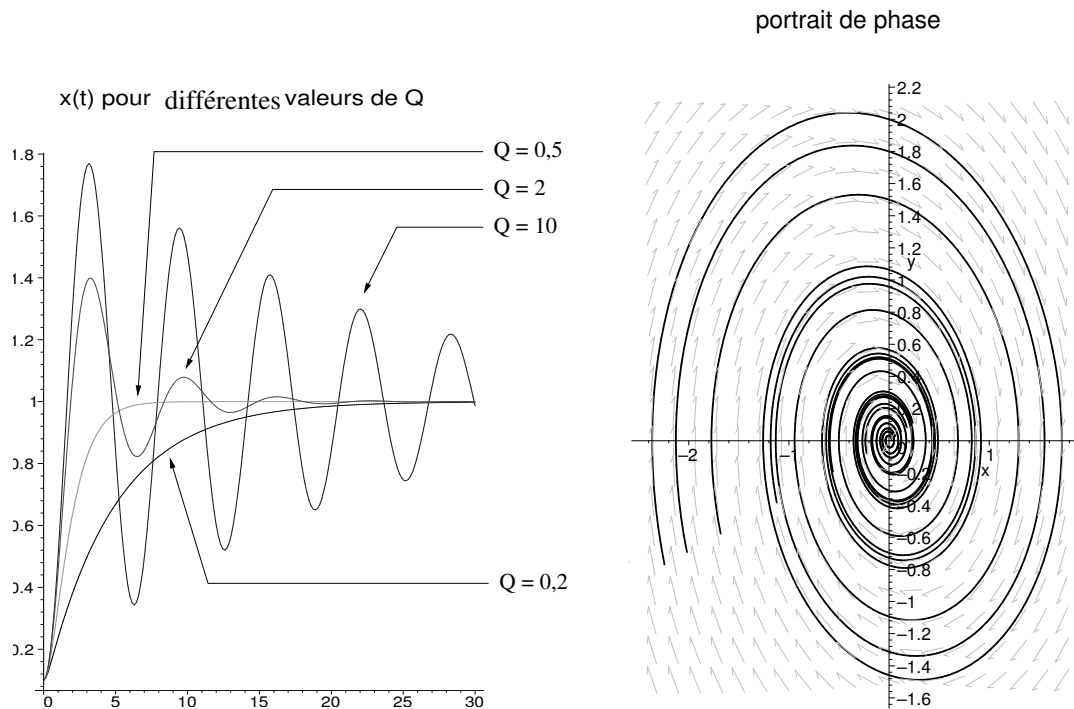


FIG. B.2 –