

Mécanique Rationnelle: Synthèse Théorique

Isard7777

26 novembre 2008

Table des matières

1	Chapitre 1 : Notions fondamentales.	3
1.1	Element de cinématique.	3
1.1.1	Système de référence.	3
1.1.2	Système matériel et vecteur position.	3
1.1.3	Vitesse et accélération.	3
1.1.4	Changement du système de référence.	4
1.1.5	Formule de Poisson.	4
1.1.6	Décomposition des vitesses et accélérations.	4
1.1.7	Grandeurs cinématiques associées.	5
1.1.8	Cinématique du solide.	5
1.2	Forces.	5
1.2.1	Grandeurs dynamiques associées.	5
1.2.2	Forces données.	6
1.2.3	Liaisons et forces de liaisons.	6
1.2.4	Principe de l'action et de la réaction, Forces extérieures et forces intérieures.	7
1.2.5	Forces conservatives et dissipatives.	7
1.3	Description globale des systèmes mécaniques.	8
1.3.1	Résultantes cinématiques et dynamiques.	8
1.3.2	Centre d'inertie.	8
1.3.3	Grandeurs résultantes du solides.	9
1.3.4	Théorème C.	9
2	Chapitre 2 : Lois de la dynamique Newtonienne	10
2.1	Axiomes de la dynamique newtonienne.	10
2.2	Repère inertial et loi fondamentale de la dynamique newtonienne.	10
2.3	Théorème généraux.	10
2.3.1	Théorème de la quantité de mouvement.	10
2.3.2	Théorème du moment cinétique.	11
2.3.3	Théorème de l'énergie cinétique.	11
2.4	Statique	11
2.5	Expressions intégrales des théorèmes généraux.	11
2.6	Extensions	12
2.6.1	Repères non inertiaux.	12
2.6.2	Mouvements au voisinage de la Terre et accélération de la pesanteur.	12
2.6.3	Système de masse variable.	13
2.7	Cas du point matériel.	14
2.8	Cas du solide rigide.	14
2.8.1	Solide ayant un point fixe.	14
2.8.2	Mouvement plan du solide.	14

1 Chapitre 1 : Notions fondamentales.

1.1 Element de cinématique.

1.1.1 Système de référence.

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps dans l'espace sans se préoccuper des causes de celle-ci.

Pour décrire un mouvement d'un objet, il est indispensable d'adopter un *système de référence*, c'est-à-dire un repère par rapport auquel la position, la vitesse et l'accélération de cet objet peuvent être mesurées. Un tel repère est généralement constitué d'un élément matériel dont les dimensions ne changent pas pendant la durée du phénomène étudié.

Mathématiquement, le choix d'un système de référence revient encore à représenter l'espace physique comme un espace affine ϵ de dimension 3 dont un des points O est choisi comme origine et auquel on associe un espace vectoriel réel généralement muni d'une base orthonormée. Tout les systèmes de référence se valent mais ne fourniront pas des descriptions identiques (*problème du voyageur assis dans le train et du chef de gare*).

Le mouvement d'un corps est caractérisé par le changement de position de ce corps au cours du temps, on doit donc également effectuer le choix d'un repère temporel. Il suffit donc d'adopter une origine de temps t .

1.1.2 Système matériel et vecteur position.

La modélisation la plus simple qui puisse être faite d'un objet consste à le représenter comme *un point matériel* (il n'a donc ni surface, ni volume et a une masse constante)

La position d'un point matériel dans le système de référence est décrite par le vecteur libre $\underline{s}$ équivalent au vecteur $\underline{OP}$ joignant l'origine O du repère au point P occupé par l'objet. On parle donc de vecteur position. De façon équivalent, on peut décrire la position du point matériel au moyen des trois coordonnées cartésiennes du vecteur position $\underline{s}$. Plus généralement, on exprimera la position en fonction de trois paramètres indépendants quelconques q_1, q_2, q_3 tels que

$$\underline{s} = \underline{s}(q_1, q_2, q_3, t)$$

On appelle donc les points q_i coordonnées généralisées du point matériel. On préfère cependant utiliser le formalisme vectoriel pour la description et l'étude des systèmes mécaniques.

La relation $\underline{s}=\underline{s}(t)$ qui donne la position du point matériel est appelé *loi du mouvement*. Sauf dans l'étude des chocs, on suppose cette relation continûment dérivable et deux fois continûment dérivable par morceaux.

Le point matériel est en quelque sorte la "particule élémentaire" de la mécanique newtonienne. En effet, un système constitué de plusieurs parties distinctes peut être modélisé par un ensemble de N points matériels.

Dans le cas d'un coprs réel, il est unimaginable de faire correspondre un point matériel à chaque atome. On adoptera donc l'hypothèse du milieu continu.

Donc, d'un point de vue théorique, il y a peu de distinction à faire entre les systèmes dicrets constitués d'un ou plusieurs point matières et les solides continus(ceux-ci pouvant être considéré comme de très nombreux points matériels et très rapprochés).

1.1.3 Vitesse et accélération.

La position d'un système étant définie à chaque instant grâce à un ensemble de vecteurs positions, on définit la vitesse d'un de ses points P par

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{s}}(t) = \frac{d\underline{s}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{s}(t + \Delta t) - \underline{s}(t)}{\Delta t}$$

De façon similaire, l'accélération est donnée par :

$$\underline{a} = \ddot{\underline{s}}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(t + \Delta t) - \underline{v}(t)}{\Delta t}$$

Les vecteurs vitesse et accélération d'un point matériel prennent des formes spéciales dans une base associée à la trajectoire du point. Celle-ci peut s'écrire en fonction de l'abscisse curviligne λ mesurée le long de la courbe à partir d'un point quelconque pris comme origine. Introduisons alors le *trièdre local de Frenet* formé par :

1. le vecteur unitaire selon la *tangente* à la courbe.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{s}}{d\lambda}$$

2. le vecteur unitaire selon la *normale principale*.

$$\boldsymbol{\nu} = \rho \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\lambda} \text{ où } \rho = \left\| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\lambda} \right\|^{-1}$$

3. le vecteur unitaire selon la *binormale*.

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{\nu}$$

Note : Pour les démonstrations, voir page 11 du Livre de Référence

1.1.4 Changement du système de référence.

Les vitesses et accélération dépendent du référentiel utilisé pour repérer la position du système. La relation entre les vitesses mesurées par des observateurs liés à deux repères différents est :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_O(t) &= \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \right)_O(t) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_O(t) \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{b}_i(t) \mathbf{E}_i + \sum_{i=1}^3 \left[\dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i + x_i(t) \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right)_O(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\dot{b}_i(t) \mathbf{E}_i + x_i(t) \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right)_O(t) \right] + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{O'}(t) \end{aligned}$$

Note : Pour les démonstrations, voir page 14 du Livre de Référence

1.1.5 Formule de Poisson.

La relation du point précédent peut être simplifiée en exploitant le fait que les mouvements des vecteurs unitaires liés à O' par rapport au système de référence de centre O ne peut être qu'un mouvement de rotation.

A chaque instant, la dérivée du vecteur $\mathbf{e}_i$ est un vecteur orthogonal à lui même (car le vecteur est unitaire) et peut donc s'écrire

$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right)_O = \boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{e}_i$$

où le vecteur $\boldsymbol{\omega}_i$ dépend éventuellement du temps. De façon un peu surprenante, un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ unique peut être utilisé pour exprimer les dérivées temporelles de tous les vecteurs unitaires de la base. Ce vecteur est appelé le *vecteur de Poisson* ou *vecteur vitesse de rotation*. Dès lors, $\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right)_O = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i$ est appelée

formule de Poisson. On généralise la formule de Poisson à l'accélération : $\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_O = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{O'} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a}$

Note : Pour les démonstrations, voir page 15 du Livre de Référence

1.1.6 Décomposition des vitesses et accélérations.

Appliquant la formule de Poisson à la formule donnant la relation entre les vitesses d'un repère fixe de centre O et d'un repère mobile de centre O', il vient

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} + \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$$

où l'on voit apparaître le vecteur de Poisson du système de référence de centre O' par rapport à celui de centre O. et où $\frac{\delta}{\delta t}$ désigne la dérivée relative évaluée dans la base mobile. donc la quantité $\mathbf{v}_r = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$ désigne la vitesse apparente du point matériel, on l'appelle vitesse relative. Les deux autres termes de la relation donnent la vitesse d'un point P qui serait immobile dans les axes mobiles et représentent donc la vitesse d'entraînement

$$\mathbf{v}_e = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

La vitesse absolue est la somme vectorielle de la vitesse relative et la vitesse d'entraînement.

Une décomposition semblable peut-être effectuée pour les accélérations :

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \underbrace{\frac{d^2\mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}}_{\mathbf{a}_c} + \underbrace{\frac{\delta^2\mathbf{r}}{\delta t^2}}_{\mathbf{a}_r}$$

Le terme complémentaire $\mathbf{a}_c$ porte le nom d'accélération de Coriolis.

1.1.7 Grandeurs cinématiques associées.

La masse m , la position $\mathbf{s}$ et la vitesse $\dot{\mathbf{s}}$ constituent les caractéristiques cinématiques fondamentales de tout point matériel ou de tout élément matériel infinitésimal. Il est d'usage d'introduire d'autres grandeurs caractéristiques :

1. le moment statique

$$\mathbf{Q}_O = m\mathbf{s}$$

2. la quantité de mouvement

$$\mathbf{N}_O = m\dot{\mathbf{s}}$$

3. le moment cinétique

$$\mathbf{H}_O = m\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}$$

4. l'énergie cinétique

$$T_O = \frac{1}{2}m \|\dot{\mathbf{s}}\|^2$$

1.1.8 Cinématique du solide.

Nous travaillerons par la suite avec des solides indéformables (la distance entre 2 points restent toujours constante). On dit alors qu'un solide possède au maximum 6 degrés de liberté (9 coordonnées mais 3 restent constantes).

Un choix naturel consiste à décrire la configuration du solide dans l'espace au moyen des trois coordonnées scalaires d'un de ses points B et de trois angles repérant l'orientation du solide par rapport à ses directions fixes de référence.

Le mouvement d'un solide s'identifie complètement au mouvement d'un système de référence quelconque qui lui est attaché. On peut alors décrire le mouvement d'un solide par les trois composantes de la vitesse d'un de ses points et les trois composantes du vecteur de Poisson. On a donc à tout instant :

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{b} + \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{s}} &= \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\end{aligned}$$

Puisque le mouvement du point étudié par rapport au solide est nécessairement nul. *Note : Des exemples sont donnés page 22 et 23 dans le livre de référence.*

1.2 Forces.

Les forces ont les causes des accélérations des objets matériels. Chaque force est décrite par un vecteur libre et est caractérisé également par son point d'application.

1.2.1 Grandeurs dynamiques associées.

- i. le moment dynamique

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{s} \wedge \mathbf{F}$$

- ii. la puissance

$$\mathcal{P}_O = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{F}$$

- iii. la Résultante

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{F}_i + \int \hat{\mathbf{F}} dm$$

iv. Le Moment Résultant

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{s}_i \wedge \mathbf{F}_i + \int \mathbf{s} \wedge \hat{\mathbf{F}} dm$$

1.2.2 Forces données.

L'expression mathématique de beaucoup de forces responsables du mouvement est connue dès l'abord du problème.

i. Champ de force.

Le vecteur force est donné en chaque point S d'une région déterminée de l'espace. Un exemple importante est le champ gravitationnel. $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = -\frac{\mu}{s^3}\mathbf{s}$ où $\mu > 0$ et $s = \|\mathbf{s}\|$

ii. Force de rappel d'un ressort

$$\mathbf{F} = -k(\ell - \ell_0)\mathbf{e}$$

iii. Tension dans une corde élastique

Comme dans le cas du ressort, on considère que la tension dans une corde élastique est proportionnelle à l'extension de celle-ci. A la différence que la tension ne s'exerce que la corde est tendue et étirée.

iv. Force de frottement fluide

Dans le cas le plus simple, on a (Par la loi de Stokes) : $\mathbf{F} = -c\dot{\mathbf{s}}$

v. Force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B})$$

1.2.3 Liaisons et forces de liaisons.

Les relations restrictives imposées à la position ou au mouvement d'un système sont appelées relations de liaisons. En effet, lorsque qu'un point matériel est assujéti à se déplacer sur une courbe ou une surface, on dit qu'il est guidé (cas particulier de liaison). On suppose que ces relations sont bilatérales dans la plupart des cas.

Les liaisons sont de nature fondamentalement cinématique. Cependant, ces contraintes sont imposées par le biais de forces qui sont dès lors appelées *forces de liaisons*. Elles ne sont pas connues mais dépendent du mouvement. Parmi les forces de liaisons, nous rencontrons les forces de cohésion et les *réactions* qui s'exercent à l'endroit du contact entre deux corps.

Par le biais des forces de liaisons, des inconnues dynamiques viennent s'ajouter aux inconnues cinématiques du problème. Pour déterminer complètement le problème et spécifier les réactions s'exerçant sur un système, des informations complémentaires doivent être fournies. on établit dès lors un modèle mathématique du frottement en adoptant des lois schématiques suggérées par l'expérience. Ainsi, lorsque deux corps matériels sont en contact, on admettra que les éléments de réduction correspondant aux forces entre les deux systèmes sont liés par les lois suivantes :

- i. La composante normale de la résultante est indépendante des propriétés de frottement des deux corps en contact.
- ii. Toute composante de la vitesse de glissement et de la vitesse de rotation relative provoque une composante parallèle et de sens opposé de la résultante et du moment résultant dont les normes sont à la norme de la composante normale de la résultante dans des rapports fixes appelés *coefficient de frottement*.

Ces lois de friction impliquent que la force de friction est directement proportionnelle à la force normale appliquant les deux corps l'un sur l'autre.

La contrainte est exercée par la composante N de la force de liaison normale à la surface. Selon la loi de frottement, la force de frottement $\mathbf{T}$ agissant sur le point est donnée par

$$\mathbf{T} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Le mouvement d'un point matériel le long d'une courbe est caractérisé par un seul degré de liberté, le mouvement étant impossible dans la direction de la normale et de la binormale. La contrainte est cette fois exercée via une force de liaison $\mathbf{N} = R_\nu \boldsymbol{\nu} + R_\beta \boldsymbol{\beta}$ située dans le plan normal à la courbe. Dans le cas d'une *liaison pivot* (machine à laver , rotor,...), les forces de liaisons peuvent être représenté par une résultante $\mathbf{R}$ de direction et d'intensité inconnue et par un couple de liaison $\mathbf{C}$ perpendiculaire à $\mathbf{e}$.

$$\mathbf{C}_F = -\mu^\Omega \text{sign}(\dot{\theta}) \|\mathbf{R}\| \mathbf{e}$$

Donc dit qu'il y a *liaison glissière* entre deux solides lorsque le mouvement relatif se réduit à un mouvement de translation selon un axe $\mathbf{e}$ fixe (L'ascenseur). On a alors $\mathbf{T} = -\mu \text{sign}(\dot{x}) \|\mathbf{R}\| \mathbf{e}$.

Note : D'autres exemples de liaisons sont donnés Page 32 du Livre de référence

Les coefficients de frottement statique μ_s et les coefficients de frottement dynamique μ doivent être interprétés de manière différente. Dans le cas où il n'y a pas de mouvement, la loi de frottement donne la valeur *maximale* des forces tangentielles à vaincre avant de mettre le corps en mouvement ($T \leq \mu_s N = \mu_s mg$). Une fois le mouvement initié, la force de frottement entre le solide et le plan sera donné par cette même loi en utilisant μ .

1.2.4 Principe de l'action et de la réaction, Forces extérieures et forces intérieures.

Les Forces correspondent à des actions des éléments matériels les uns sur les autres. il s'agit même d'interaction puisqu'on admet le *principe de l'action et de la réaction*. On distingue, dès lors, les *forces intérieures* émanant d'éléments appartenant au système et notée $\mathbf{f}$ des *forces extérieures* émanant d'éléments extérieurs au système et notée $\mathbf{F}$.

Vu le principe de l'action et de la réaction, il est évidemment intéressant de grouper deux par deux les forces intérieures qui se correspondent, en effet, on a :

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} = \lambda_{ij}(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i)$$

Dès lors,

$$\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0$$

$$\mathbf{s}_i \wedge \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{s}_j \wedge \mathbf{f}_{ij} = \lambda_{ij}(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \wedge (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = 0$$

1.2.5 Forces conservatives et dissipatives.

Cas général.

La Puissance développée par une force quelconque $\mathbf{F}$ s'appliquant en un point de vitesse $\dot{\mathbf{s}}$ dans un repère de centre O est donnée par

$$\mathcal{P}_O = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}}$$

et peut être positive, négative ou nulle selon la configuration et le mouvement particuliers étudiés.

Forces conservatives.

On dit qu'une force est conservative si on peut l'écrire sous la forme

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \mathbf{e}_3\right)$$

où V est une fonction de $\mathbf{s}$ uniquement et porte le nom d'*énergie potentielle*. Ainsi, la force de pesanteur agissant sur un corps de masse m et de vecteur position $\mathbf{s}$ peut s'écrire

$$\mathbf{F}_{mg} = m\mathbf{g} = \nabla(m\mathbf{g} \cdot \mathbf{s})$$

et dérive du potentiel

$$V_{mg} = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{s}$$

La Puissance développée par une force conservative est donnée par

$$\mathcal{P}_O = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{F} = -\dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla V = -\frac{dV}{dt}$$

Son travail

$$\mathcal{T} = \int_A^B \mathcal{P}_O dt = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{s} = V(\mathbf{s}_A) - V(\mathbf{s}_B)$$

Le travail total associé à une force conservative lors de l'évolution d'un système est nul si cette évolution s'effectue entre un état initial et un état final identique.

Forces qui ne travaillent pas.

Dans le cas où la puissance développée par une force $\mathbf{F}$ est nulle, on dit que cette force qu'elle ne travaille pas. Cette annulation de la puissance développée peut être le fait d'une configuration spéciale du système mécanique, mais elle peut également découler de la nature même de la force étudiée qui reste constamment perpendiculaire à la vitesse de son point d'application.

Forces Dissipatives.

Une force est dite *dissipative* si elle développe une puissance définie négative et dissipe (en chaleur) une partie de l'énergie du système. Comme dans le cas des forces conservatives, c'est la nature même de la force qui permet de classer parmi les forces dissipatives et non pas la configuration particulière étudiée.

Note : Un exemple est donné Page 39 du Livre de référence..

1.3 Description globale des systèmes mécaniques.

1.3.1 Résultantes cinématiques et dynamiques.

La description complète d'un système matériel nécessite la spécification des masses, des positions, des vitesses et des forces appliquées pour chaque élément matériel du système. Une telle description n'est pas toujours possible, On se borne alors à déterminer des grandeurs globales représentatives de l'ensemble du système. On définit donc :

i. la *masse totale*

$$m = \sum_i m_i + \int dm$$

ii. le *moment statique résultant*

$$\mathbf{Q}_O = \sum_i m_i \mathbf{s}_i + \int \mathbf{s} dm$$

iii. la *quantité de mouvement résultante*

$$\mathbf{N}_O = \sum_i m_i \dot{\mathbf{s}}_i + \int \dot{\mathbf{s}} dm$$

iv. le *moment cinétique résultant*

$$\mathbf{H}_O = \sum_i m_i \mathbf{s}_i \wedge \dot{\mathbf{s}}_i + \int \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} dm$$

v. l' *énergie cinétique totale*

$$T_O = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{s}_i \wedge \dot{\mathbf{s}}_i + \int \mathbf{s}_i \wedge \dot{\mathbf{s}}_i dm$$

vi. la *résultante des forces* agissant sur le système

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{F}_i + \int \hat{\mathbf{F}} dm$$

vii. le *moment dynamique résultant*

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{s}_i \wedge \mathbf{F}_i + \int \mathbf{s} \wedge \hat{\mathbf{F}} dm$$

viii. la *puissance totale*

$$\mathcal{P}_O = \sum_i \dot{\mathbf{s}}_i \cdot (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) + \int \dot{\mathbf{s}} \cdot (\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{f}}) dm$$

1.3.2 Centre d'inertie.

En plus des résultantes définies à la section précédente, on peut définir une "position moyenne du système" en introduisant le *centre d'inertie* C du système. Celui-ci est défini par son vecteur position $\mathbf{c}$.

Le centre d'inertie et la masse totale du système peuvent être considérés comme les paramètres d'un point matériel unique représentant le système dans sa modélisation la plus simple.

1.3.3 Grandeurs résultantes du solides.

Puisque le mouvement d'un solide est entièrement déterminé par la connaissance de deux fonctions vectorielles $\mathbf{b}$ et $\boldsymbol{\omega}$ (§1.1.8), les grandeurs cinématiques ne peuvent être toutes indépendantes dans le cas d'un solide. Dans cette synthèse, je ne réécrirai pas les démonstrations.

Note : Elles se trouvent Pages 42 à 49 dans le Livre de Référence

i. le moment cinétique :

Si l'on définit le *tenseur d'inertie* d'un solide par rapport au point B quelconque du solide par l'expression

$$\mathbf{J}_B = \int (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}\mathbf{r}) dm$$

Alors,

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{J}_B \cdot \boldsymbol{\omega}$$

ii. l'énergie cinétique :

$$T_B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_B \cdot \boldsymbol{\omega}$$

iii. le moment dynamique résultant :

$$\mathbf{M}_B = \int \mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{F}} dm$$

iv. la puissance totale :

$$\mathcal{P}_B = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_B$$

Dans le cas général, on prendra le centre d'inertie comme point B, de sorte que les expressions se simplifient selon :

$$\begin{aligned} H_O &= H_C + m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} \\ T_O &= T_C + \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{c}}\|^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{c}}\|^2 \\ \mathbf{M}_O &= \mathbf{M}_C + \mathbf{c} \wedge \mathbf{G} \\ \mathcal{P}_O &= \mathcal{P}_C + \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G} \end{aligned}$$

1.3.4 Théorème C.

Note : Les démonstrations se trouvent page 49 du Livre de Référence

Chacune des résultantes, calculée dans le système d'axes de centre O, est égale à la même résultante, calculée dans le système d'axes parallèles de centre C, augmentée de la résultante correspondante du centre d'inertie considéré comme un point matériel affecté de la masse totale du système et soumis à la résultante des forces.

2 Chapitre 2 : Lois de la dynamique Newtonienne

2.1 Axiomes de la dynamique newtonienne.

Précisons les postulats fondamentaux de l'approche newtonienne de la mécanique :

- i. le temps est une grandeur absolue indépendante de tout système de référence.
- ii. les masses sont des constantes positives (ou nulles) additives.
- iii. les fonctions $\mathbf{s}(t)$ sont continûment dérivables et deux fois continûment dérivables par morceaux.
- iv. les forces satisfont au principe de l'action et de la réaction selon lequel les forces que deux éléments matériels distincts exercent l'un sur l'autre sont égales en norme, de signes opposés et parallèles à la droite joignant ces deux éléments.

2.2 Repère inertial et loi fondamentale de la dynamique newtonienne.

Tous les repères sont équivalents dans l'étude de la cinématique d'un système mais pas dans l'étude de la dynamique, c'est-à-dire les relations entre les mouvements des corps et les causes qui les provoquent.

Le modèle mathématique de Newton postule l'existence d'une famille de repères particuliers par rapport auxquels les accélérations des éléments d'un système matériel isolé ne sont dues qu'aux interactions entre les éléments de ce système. Un tel référentiel est appelé *repère inertial*. Dans un repère inertial, un corps isolé de toute interaction avec le monde extérieur ne peut être qu'au repos ou en **MRU** (*première loi de Newton ou principe d'inertie*).

Lorsqu'un corps est soumis à des forces, nous admettons la loi suivante :

Dans un repère inertial, la résultante des forces appliquées à un point matériel (ou à un élément matériel infinitésimal) est égale à la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement :

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{N}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{s}})$$

Comme la masse est constante, cette relation peut s'écrire

$$\mathbf{G} = m \mathbf{a}$$

où $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{s}}$. Ceci ne se démontre pas, c'est un postulat de la mécanique.

L'identification d'un système de référence inertial est un problème délicat. En pratique, on dira qu'un repère est inertial si l'effet de son mouvement sur les accélérations des éléments du système étudié peut être négligé par rapport aux interactions entre ces éléments ou aux forces extérieures.

2.3 Théorème généraux.

L'énoncé précédent de la loi fondamentale de la dynamique est suffisant pour traiter tous les problèmes envisageables. Cependant, afin de simplifier l'analyse, on est amené à écrire des théorèmes généraux qui permettent de présenter le problème de façon plus concise.

2.3.1 Théorème de la quantité de mouvement.

Le *théorème de la quantité de mouvement* ou *théorème I* généralise la loi fondamentale au cas des systèmes composés de plusieurs éléments matériels.

1^{er} énoncé :

Dans un repère inertial, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{d\mathbf{N}_O}{dt} = \mathbf{G}$$

Où reformulé autrement :

Le centre d'inertie d'un système matériel se meut dans un repère inertiel comme un point matériel qui aurait pour masse la masse totale m du système et serait soumis à la résultante des forces extérieures appliquées au système :

$$m \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G}$$

Note : Les démonstrations sont faites page 56 du Livre de Référence

Selon ce théorème, seules les forces extérieures peuvent contribuer à modifier la quantité de mouvement d'un système ou la trajectoire de son centre d'inertie.

2.3.2 Théorème du moment cinétique.

Le *théorème du moment cinétique* ou *théorème II* nous renseigne essentiellement sur le mouvement de rotation du système autour de l'origine du repère.

Dans un repère inertiel, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un système matériel par rapport à un point fixe O est égale à la résultant des moments par rapport à ce point des forces extérieures appliquées au système :

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$$

Note : Les démonstrations sont faites page 57 du Livre de Référence

Ici encore, seules les forces extérieures interviennent et sont susceptibles de modifier le moment cinétique d'un système.

2.3.3 Théorème de l'énergie cinétique.

Dans un repère inertiel, la puissance développée par l'ensemble des forces intérieures appliquées à un système matériel est égale à la dérivée temporelle de son énergie cinétique :

$$\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$$

Note : Les démonstrations sont faites page 58 du Livre de Référence

Les forces internes et externes interviennent dans cet énoncé du *théorème de l'énergie cinétique* ou *théorème III*.

2.4 Statique

L'étude des corps au repos constitue l'objet de la *statique*.

En l'absence de tout mouvement du système matériel étudié, les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique établis à la section précédente se résument à

$$\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Ces équations déterminent des conditions nécessaires que doivent remplir les forces appliquées pour qu'un système initialement au repos n'entre pas en mouvement.

2.5 Expressions intégrales des théorèmes généraux.

Les théorèmes généraux peuvent s'écrire sous formes intégrales :

I. Théorème I :

$$\mathbf{N}_O(t_2) - \mathbf{N}_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{G}(t) dt$$

II. Théorème II :

$$\mathbf{H}_O(t_2) - \mathbf{H}_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O(t) dt$$

III. Théorème III :

$$T_O(t_2) - T_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_O(t) dt$$

La variation de l'énergie cinétique du système est donc égale au travail des *forces internes et externes*.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_O(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) \cdot \dot{\mathbf{s}}_i + \int (\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{f}}) \cdot \dot{\mathbf{s}} dm \right] dt \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) \cdot d\mathbf{s}_i + \int dm \int_{t_1}^{t_2} (\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{f}}) \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

2.6 Extensions

Les différents théorèmes généraux sont assortis d'hypothèses précises. Voyons comment on peut lever ou contourner certaines d'entre elles.

2.6.1 Repères non inertiels.

Une des hypothèses fondamentales apparaissant dans les théorèmes généraux et celle qui exige de se placer dans un repère inertiel. Cela veut dire que les différentes vitesses doivent être rapportées à un système de référence inertiel.

Note : Les formules exposées ci-après sont démontrées de la page 60 à la page 64 du Livre de Référence

Loi fondamentale de la dynamique newtonienne en repère non inertiel.

$$m \mathbf{a}_r = m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{G} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c$$

Théorème de la quantité de mouvement rapporté à un repère non inertiel

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{N}_{O'} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

où $\mathbf{F}_e$ et $\mathbf{F}_c$ désignent respectivement la résultante des forces fictives d'inerties d'entraînement et de Coriolis.

Théorème du moment cinétique rapporté à un repère non inertiel.

$$\dot{\mathbf{H}}_B = \frac{\delta \mathbf{H}_B}{\delta t} = \mathbf{M}_B - m(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \wedge \ddot{\mathbf{b}}$$

On peut conclure directement que le théorème du moment cinétique est également valable sans correction pour le mouvement autour du centre d'inertie. C'est-à-dire rapporté à des axes placés au centre d'inertie et parallèles aux axes du trièdre inertiel.

Théorème de l'énergie cinétique rapporté à un repère non inertiel.

$$\dot{T}_B = \mathcal{P} - m(\dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{b}}) \cdot \ddot{\mathbf{b}}$$

Et l'on peut conclure la même chose que pour le moment cinétique pour un mouvement autour du centre d'inertie.

2.6.2 Mouvements au voisinage de la Terre et accélération de la pesanteur.

Les mouvements de la terre sont relativement lents et peuvent être négligés pour considérer cette dernière comme un repère inertiel. On se limite alors aux approximations suivantes :

- i. la rotation de la Terre autour du Soleil est négligeable.
- ii. la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe est

$$\Omega \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

On peut donc négliger les variations de Ω .

Note : Les approximations sont développées Page 66 et 67 du Livre de Référence

2.6.3 Système de masse variable.

En énonçant les postulats de base de la mécanique newtonienne, nous avons précisé que les masses sont des constantes mais ils appraissent également applicables au système de masse variables.

Désignons par m la masse à l'instant t d'un système à masse variable par dm_1 et dm_2 les masses absorbée et éjectée pendant un temps dt et par m_0 la masse du système qui n'est pas concernée par l'éjection et l'absorption pendant le temps dt . L'accroissement de la masse du système pendant le temps dt est donc donné par

$$dm = dm_1 - dm_2$$

qui peut être positif, négatif ou nul selon que la masse totale du système augmente, diminue ou reste inchangée.

On admet également les hypothèses suivantes :

- i. L'interaction entre les particules absorbées ou émises et le système est limité à l'instant de contact. Le système est donc *isole* des matières émises précédemment et dispersées.
- ii. On admet que le système se comporte comme un corps rigide et on suppose que l'absorption ou l'émission se font d'une telle manière qu'aucun parasites ne viennent modifier le déplacement relatif du centre d'inertie.
- iii. On suppose que sont également du second ordre(que l'on peut négliger) les variations de masses et de configurations des matières d'absorption ou d'éjection pendant le temps dt .

Dans ces conditions si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ désignent respectivement la vitesse du système et les vitesses des matières absorbées et émises, on peut établir le bilan de quantité de mouvement suivant dt :

$$d\mathbf{N}_O = \mathbf{G} dt$$

D'autre part, négligeant les termes quadratiques en les accroissement, on a

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_O &= \mathbf{N}_O(t + dt) - \mathbf{N}_O(t) \\ &= [(m_0 + dm_1)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm_2(\mathbf{v} + d\mathbf{v} + \mathbf{w}_2)] - [(m_0 + dm_2)\mathbf{v} + dm_1(\mathbf{v} + \mathbf{w}_1)] \\ &\approx m d\mathbf{v} + dm_2 \mathbf{w}_2 - dm_1 \mathbf{w}_1 \end{aligned}$$

Ce bilan peut être également interprété comme la somme de trois termes :

- i. la variation de la quantité de mouvement du système due à des variations de sa masse et/ou de sa vitesse :

$$d(m \mathbf{v}) = dm \mathbf{v} + m d\mathbf{v}$$

- ii. une perte de quantité de mouvement du système par absorption de matière :

$$d\mathbf{N}_1 = -dm_1(\mathbf{v} + \mathbf{w}_1)$$

- iii. un gain de quantité de mouvement du système par éjection de matière :

$$d\mathbf{N}_2 = dm_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}_2)$$

Regroupant toutes ces expressions et passant à la limite pour dt tendant vers 0, on trouve l'équation de la quantité de mouvement pour le système :

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{G} + \mathbf{P} \\ \mathbf{P} &= \frac{dm_1}{dt} \mathbf{w}_1 - \frac{dm_2}{dt} \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

2.7 Cas du point matériel.

Un point matériel est caractérisé par un seul vecteur position $\mathbf{s}$. Dès lors, une seule équation vectorielle est nécessaire et suffisante pour décrire sa dynamique si l'expression des forces qui lui sont appliquées est connue.

Que le point matériel soit soumis à des liaisons ou non, la loi fondamentale de la dynamique, qui se confond avec le théorème de la quantité de mouvement dans le cas d'un point unique, suffit pour déterminer les inconnues du problème. Les théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique n'apportent aucune information nouvelle. Ils en découlent en effet directement par, et respectivement, une simple multiplication vectorielle par $\mathbf{s}$ et une multiplication scalaire par la vitesse $\dot{\mathbf{s}}$:

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{G} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{H}}_O = m\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \wedge \mathbf{G} = \mathbf{M}_O \\ \dot{T}_O = m\dot{\mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{G} = \mathcal{P}_O \end{cases}$$

2.8 Cas du solide rigide.

Un solide rigide possède, au maximum, six degrés de liberté. Ceux-ci sont généralement choisis comme étant la position d'un point B du solide et l'orientation du solide dans l'espace par rapport à un système d'axes inertial. Une fois encore, la présence de liaisons diminue le nombre de *ddl* mais fait apparaître de nouvelles inconnues dynamiques de sorte que le nombre d'inconnues reste égal à six.

En général, on décomposera le mouvement du solide en deux parties :

- i. le mouvement du centre d'inertie C, régi par le théorème de la quantité de mouvement,
- ii. le mouvement autour du centre d'inertie, déterminé par l'application du théorème du moment cinétique rapporté à des axes centrés en C et constamment parallèles à des axes inertiaux.

Note : Les formules sont discutées pages 74 et 75 du Livre de Référence.

2.8.1 Solide ayant un point fixe.

Dans le cas particulier où le solide étudié possède un point fixe, on adoptera évidemment ce point comme origine O du repère inertial. Les trois degrés de libertés associés au mouvement de translation du solide seront ainsi déterminés. Les trois degrés de liberté restant le seront par application du théorème du moment cinétique rapporté au repère inertial choisi.

2.8.2 Mouvement plan du solide.

Ce cas est précisé page 76 et 77 du Livre de Référence et est utile pour beaucoup de problèmes.