

Lagrangiens, ... continuons le combat

1. RAPPEL DE COURS

Dans une repère galiléen (O, x, y, z) , soit Σ un système mécanique de n' points matériel M_i de coordonnées (x_i, y_i, z_i) et de masse m_i dont la dynamique est déterminée à l'aide de n coordonnées généralisées q_j . Ce système est dans un champ de forces conservatives V .

- (1) Rappeler la définition du Lagrangien L du système.
- (2) Donner les n équations de Lagrange de ce système.

- (1) Le Lagrangien est défini comme la différence entre l'énergie cinétique et le potentiel des forces conservatives.

$$L = T - V.$$

- (2) Les équations de Lagrange sont:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1..n.$$

2. LA MACHINE D'ATWOOD

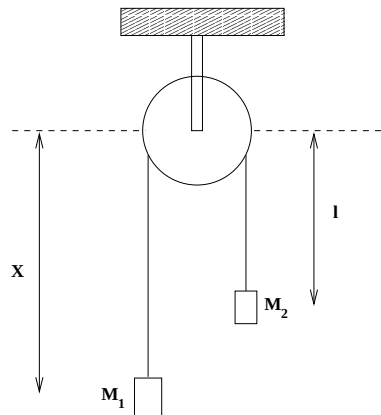


FIGURE 1. Machine d'Atwood

On considère le système matériel de la Figure 2. Ce système est constitué de deux masses M_1 et M_2 se déplaçant verticalement dans le champ de pesanteur.

Ecrire le Lagrangien du système puis les équations de Lagrange et du mouvement.

L'état dynamique du système est entièrement connu à l'aide des deux coordonnées X et l . Ces deux variables sont reliées par la liaison holonôme $X + l = l_0 - \pi r$ où l_0 est la longueur du fil et r le rayon de la poulie. On a donc un seul degré de liberté. On choisit X comme coordonnée généralisée.

L'énergie cinétique T du système s'écrit:

$$(2.1a) \quad T = \frac{1}{2}m_1v(M_1)^2 + \frac{1}{2}m_1v(M_2)^2,$$

$$(2.1b) \quad = \frac{1}{2}m_1v(M_1)^2 + \frac{1}{2}m_2v(M_2)^2,$$

$$(2.1c) \quad = \frac{1}{2}m_1(-\dot{X})^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{X}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{X}^2$$

Une fonction potentielle des forces de pesanteur V_0 s'écrit

$$(2.2a) \quad V_0 = m_1gz(M_1) + m_2gz(M_2),$$

$$(2.2b) \quad = m_1g(-X(M_1)) + m_2g(X - l_0 + \pi r),$$

$$(2.2c) \quad = g \left((m_2 - m_1)X + \underbrace{m_2(\pi r - l_0)}_{\text{constante}} \right)$$

Les fonctions potentiel sont définies à une constante près. Par commodité, on choisit

$$V = (m_2 - m_1)gX.$$

Le lagrangien du système L est alors:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{X}^2 - (m_2 - m_1)gX.$$

On a:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (m_1 + m_2)\dot{X}, \quad \frac{\partial L}{\partial X} = -(m_2 - m_1)g.$$

L'équation de Lagrange donne alors

$$(2.3) \quad (m_1 + m_2)\ddot{X} + (m_2 - m_1)g = 0.$$