

Le double pendule

On considère le système du double pendule plan représenté sur la Figure 1. Deux masses m_1 et m_2 se déplaçant dans le plan $\{0, x, y\}$ sont reliées par une tige inextensible de longueur l_2 . La masses m_1 étant elle même reliée au point 0 par une tige de longueur l_1 . On note Φ_1 et Φ_2 les angles $(\vec{Oy}, \vec{Om_1})$ et $(\vec{Om_1}, \vec{m_1m_2})$.

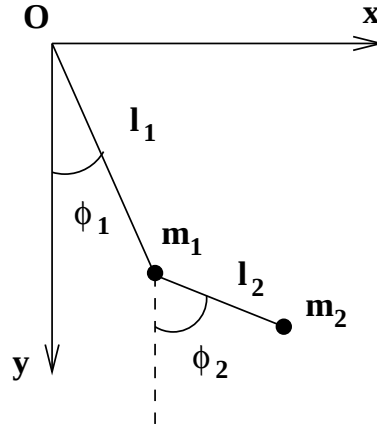


FIGURE 1. Double pendule plan

- (1) Recenser le nombre de degrés de liberté et donnez les coordonnées généralisées correspondantes.
- (2) Ecrire la ou les équations de Lagrange.
- (3) On suppose que l'on a:

$$(0.1) \quad \begin{cases} \Phi_1(0) = \Phi_0, & \dot{\Phi}_1(0) = 0 \\ \Phi_2(0) = 0, & \dot{\Phi}_2(0) = 0 \end{cases}$$

avec Φ_0 suffisamment petit pour que l'on puisse effectuer l'approximation des petits déplacements ($\sin(x) \simeq x$, $\cos(x) \simeq 1$).

Résoudre alors les équations du mouvement.

- (1) On a un problème à deux corps se déplaçant dans un plan. Le nombre de coordonnées cartésiennes est donc de 4: (x_1, y_1, x_2, y_2) . On a deux liaisons holonômes traduisant l'inextensibilité des tiges: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_2^2$ et $x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$. Le nombre de degrés de liberté est donc de 2. On choisit Φ_1 et Φ_2 comme coordonnées généralisées. (Ce choix n'est bien sûr pas unique.)

- (2) Les équations de Lagrange sont:

$$(0.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Phi_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Phi_2} = 0 \end{cases}$$

avec L le lagrangien défini par $L = T - V$ où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique T s'écrit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v(M_1/\mathcal{R})^2 + \frac{1}{2} m_2 v(M_2/\mathcal{R})^2 \\ v(M_1/\mathcal{R}) &= l_1 \dot{\Phi}_1 \overrightarrow{u_{\theta_1}} \implies v(M_1/\mathcal{R})^2 = l_1^2 \dot{\Phi}_1^2 \\ v(M_2/\mathcal{R}) &= v(M_2/M_1) + v(M_1/\mathcal{R}) \\ v(M_2/\mathcal{R}) &= l_2 \dot{\Phi}_2 \overrightarrow{u_{\theta_2}} + l_1 \dot{\Phi}_1 \overrightarrow{u_{\theta_1}} \\ v(M_2/\mathcal{R})^2 &= l_2^2 \dot{\Phi}_2^2 + l_1^2 \dot{\Phi}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \underbrace{\overrightarrow{u_{\theta_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\theta_2}}}_{\cos(\Phi_2 - \Phi_1)} \\ T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\Phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \end{aligned}$$

L'énergie potentielle s'écrit quant-à-elle (à une constante additive près):

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g y(M_1) - m_2 g y(M_2) \\ y(M_1) &= l_1 \cos(\Phi_1) \\ y(M_2) - y(M_1) &= l_2 \cos(\Phi_2) \implies y(M_2) = l_1 \cos(\Phi_1) + l_2 \cos(\Phi_2) \\ V &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\Phi_1) - m_2 g l_2 \cos(\Phi_2) \end{aligned}$$

Dérivons maintenant T et V partiellement par rapport aux coordonnées et vitesses généralisées.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_1} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\Phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\Phi}_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\Phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\Phi}_1 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \frac{\partial T}{\partial \Phi_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \sin(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \frac{\partial T}{\partial \Phi_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \sin(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \frac{\partial V}{\partial \Phi_1} &= (m_1 + m_2) g l_1 \sin(\Phi_1) \\ \frac{\partial V}{\partial \Phi_2} &= m_2 g l_2 \sin(\Phi_2) \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont alors:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\Phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\Phi}_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\Phi}_2^2 \sin(\Phi_1 - \Phi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin(\Phi_1) &= 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\Phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\Phi}_1 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\Phi}_1^2 \sin(\Phi_1 - \Phi_2) + m_2 g l_2 \sin(\Phi_2) &= 0 \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse des petits déplacements, les équations du mouvement deviennent:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\Phi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\Phi}_2 + (m_1 + m_2)gl_1\Phi_1 &= 0 \\ m_2l_2^2\ddot{\Phi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\Phi}_1 + m_2gl_2\Phi_2 &= 0\end{aligned}$$

Sous la forme matricielle, on a:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\Phi}_1 \\ \ddot{\Phi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On pose $\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, le système s'écrit alors

$$\underbrace{\frac{1}{g} \begin{bmatrix} l_1 & \alpha l_2 \\ l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{Bmatrix} \ddot{\Phi}_1 \\ \ddot{\Phi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matrice $[\mathbf{M}]$ admet les deux valeurs propres:

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left(l_2 + l_1 + (-1)^i \sqrt{l_2^2 - 2l_1l_2 + l_1^2 + 4\alpha l_2l_1} \right) \quad i = \{1, 2\}$$

associées respectivement aux vecteurs propres:

$$\Psi_i = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2l_1} \left(l_2 - l_1 - (-1)^i \sqrt{l_2^2 - 2l_1l_2 + l_1^2 + 4\alpha l_2l_1} \right) \\ 1 \end{Bmatrix} \quad i = \{1, 2\}$$

Ceci permet de calculer l'exponentielle de la matrice $[\mathbf{M}]$ et ainsi la solution du problème.