

Cours de mécanique classique et initiation à la relativité restreinte

Fascicule 1

Yves Grosdidier



Mécanique I
PHQ-110

Université de Sherbrooke – Automne 2006

Fascicule 1 : Mécanique Classique

1. Avertissement

Attention, ce document (fascicule 1) porte pompeusement le titre de « Cours de mécanique classique et de relativité restreinte ». C'est probablement ainsi que vous le considérerez puisqu'il constituera pour vous la seule référence dans laquelle vous serez *toujours* capables de trouver mes propres façons de faire ou de présenter certaines notions que nous aborderons dans ce cours de mécanique. Je tiens à préciser que ces « façons » ne sont pas spécialement originales mais résultent simplement de mes choix ou goûts qui se sont affirmés depuis de nombreuses années au gré de mes lectures et études. Il y a par exemple plusieurs façons d'aborder le problème de Kepler (dit à deux corps), mais les deux que j'ai choisies sont à mon avis les plus directes ou simples (vecteur de Runge-Lenz et méthode de Binet).

Quant à la relativité restreinte (fascicule 2), je préfère de loin un cadre qui fait un usage effectif de la géométrie hyperbolique de l'espace de Minkowski : i) celles et ceux qui continueront en physique théorique trouveront cela bien utile de travailler comme le font quotidiennement les physiciens des particules; ii) ce faisant on évite aussi le léger malaise entourant la notion de masse variable comme on peut le voir dans de nombreux livres d'initiation: dans l'espace de Minkowski la masse est un invariant d'un référentiel galiléen à un autre, ce qui est intellectuellement très satisfaisant. Ce cours de relativité s'éloignera donc du style de la plupart des manuels. Ces derniers ne sont pas faux, loin de là, puisque nous arriverons aux mêmes résultats, mais revêtent un petit côté vieillot avec leur $(1-v^2/c^2)^{1/2}$ et leurs masses variables avec la vitesse ! De plus, dans l'espace de Minkowski, le problème (j'ai bien dit problème et non paradoxe) des jumeaux s'explique très simplement.

Donc, bien que ce document par son titre laisse attendre un cours complet de mécanique, bien évidemment, il conviendra de ne considérer ce texte que comme un petit résumé de mécanique classique et de relativité puisqu'il vous faudra aller puiser ailleurs (dans Mécanique II notamment, Hydrodynamique et le cours de relativité générale) les compléments indispensables à un vrai cours de mécanique.

2. Quelques repères historiques et biographiques

La mécanique dite « classique » s'est développée depuis l'Antiquité, avec notamment Archimède, jusqu'au XVII^e s., puis ensuite avec Galilée, Newton ou Huygens.

Elle comprend trois grands domaines : la *statique*, étude de l'équilibre et de l'action des forces sur les corps en l'absence du mouvement ; la *cinématique*, description de l'espace, du temps et des mouvements *indépendamment* de leurs causes ; la *dynamique*, étude des mouvements sous l'action des forces.

Au XVIII^e s., les progrès de la mécanique consistent en une meilleure formulation mathématique de la mécanique de Newton, ce qui constitue la *mécanique rationnelle*. À la fin de

ce siècle, Lagrange fonde la *mécanique analytique* en rassemblant toutes les branches de la mécanique (statique et hydrostatique, dynamique et hydrodynamique) et en mettant les équations de la dynamique sous une forme plus générale et plus simple. À la même époque se développe la *mécanique des fluides*, tant appliquée que théorique.

Au XIX^e s., les développements concernent le mouvement relatif, les théories de l'élasticité, de la capillarité, de la propagation des mouvements dans les milieux continus et la formulation des équations générales. Dans la seconde moitié du XIX^e s. est fondée la *mécanique statistique*, étroitement liée à la thermodynamique.

Enfin, au XX^e s., la mécanique contribuera, avec l'électromagnétisme, à la construction de nouveaux domaines de la physique : théories de la relativité (Albert Einstein) ou physique quantique (Louis de Broglie).

Ci-dessous, on donne quelques informations biographiques sur Galilée, Newton et Einstein, dont les portraits figurent en couverture de ces notes de cours.

Galileo Galilei, dit Galilée
Pise 1564 - Arcetri 1642
Savant et écrivain italien.

En introduisant l'emploi de la lunette en astronomie (1609), il a été à l'origine d'une révolution dans l'observation de l'Univers. Il découvrit, en particulier, le relief de la Lune, les quatre principaux satellites de Jupiter (aujourd'hui appelés satellites galiléens), les phases de Vénus et la présence d'étoiles individuelles dans la Voie lactée, notre propre galaxie.

Rallié au système héliocentrique de Copernic, dont l'œuvre venait d'être mise à l'Index en 1616 (l'Index était un catalogue des livres prohibés par l'autorité religieuse catholique. Cette censure, créée au XVI^e siècle, a été abolie par le pape Paul VI en 1965), Galilée fut déféré, après la publication du *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, devant le tribunal de l'Inquisition, qui le condamna et l'obligea à se rétracter (1633) ; l'Église l'a réhabilité en 1992.

Galilée fut aussi l'un des fondateurs de la mécanique moderne (*Discours concernant deux sciences nouvelles*) et joua un rôle majeur dans l'introduction des mathématiques pour l'explication et la description des lois physiques. Il établit notamment la loi de la chute des corps dans le vide et donna une première formulation du principe de relativité.

sir Isaac Newton
Woolsthorpe, Lincolnshire, 1642 - Londres 1727
Savant anglais.

Il construisit à Cambridge le premier télescope. En optique, il mena des expériences de décomposition de la lumière par le prisme et présenta sa théorie corpusculaire de la lumière (1675), objet d'une vive controverse avec R. Hooke et C. Huygens.

Ce n'est qu'en 1687, sur l'insistance de E. Halley, que paraît *Principes mathématiques de philosophie naturelle*. Newton y applique les mathématiques à l'étude des phénomènes naturels, en premier lieu le mouvement.

Sa mécanique, base des développements ultérieurs de cette science, est fondée sur le principe de l'inertie, la proportionnalité de la force à l'accélération et l'égalité (en termes d'intensité) de l'action et de la réaction (ces deux dernières lois s'avèrent en général fausses dans le cadre de la relativité restreinte). De la théorie de l'attraction universelle et de la loi qui en découle se déduisent les trois lois de Kepler.

En mathématiques, Newton posa, parallèlement à Leibniz, les bases de l'analyse moderne (méthodes infinitésimales, par exemple). Enfin, il écrivit des ouvrages théologiques et effectua des travaux d'alchimie, qui influencèrent sa réflexion, notamment concernant l'attraction universelle.

Albert Einstein

Ulm 1879 - Princeton 1955

Physicien d'origine allemande naturalisé suisse, puis américain.

Il établit la théorie du mouvement brownien et, appliquant la théorie des quanta à l'énergie rayonnante, aboutit au concept de photon. Il est surtout l'auteur des théories de la relativité (*relativité restreinte*, 1905 ; *relativité générale*, 1916), qui ont marqué la science moderne, dans lesquelles il révisé profondément les notions physiques d'espace et de temps, et établit en particulier l'équivalence de la masse et de l'énergie ($E = mc^2$).

Épris de justice et de paix, il cosigna la lettre au président Roosevelt qui, devant la menace allemande, lança les recherches sur l'arme nucléaire. Mais, après la guerre, il lutta activement contre la prolifération de cette arme, notamment avec le philosophe et mathématicien Bertrand Russell (Prix Nobel 1921).

3. Les vecteurs

On appelle espace vectoriel E sur un *corps commutatif*¹ (par exemple l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$) un ensemble d'éléments, appelés *vecteurs*, qui satisfait aux propriétés suivantes :

¹ Ensemble muni de deux lois de composition internes, dont la première lui confère la structure de groupe commutatif (loi $+$), la seconde conférant aux éléments *non nuls* la structure de groupe (loi $\times$), et la seconde loi étant distributive par rapport à la première ($a \times (b + c) = a \times b + a \times c$). On rappelle qu'un ensemble G muni d'une loi $*$ constitue un groupe dès que les conditions suivantes sont satisfaites : i) si $a, b \in G$ alors $a * b \in G$, ii) il existe un élément neutre (noté e) dans G : $\forall a \in G : a * e = e * a = a$, iii) tout élément a de G possède un inverse noté i_a tel que $a * i_a = i_a * a = e$. $\mathbb{R}$ est un groupe pour la loi $+$ (l'inverse de tout réel r étant simplement l'opposé $-r$, l'élément neutre étant 0). Il est aussi un groupe pour la loi $\times$ (l'inverse de r étant r^{-1} , l'élément neutre étant 1). $\mathbb{R}$ est d'autre part un corps, l'ensemble

1) E est muni d'une structure de groupe commutatif pour une loi de *composition interne* (i.e. quand on compose deux objets de même type, on obtient un 3^{ème} objet de type identique aux deux premiers objets), l'addition vectorielle, notée simplement + (à ne pas confondre avec la loi + des éléments du corps).

2) Pour tout λ et μ appartenant à $\mathbb{R}$, et à tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant à E, on a :

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
- $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Quand le corps n'est pas $\mathbb{R}$ la structure est appelée (en algèbre générale) *module*. Ainsi un espace vectoriel ordinaire est un module particulier, celui construit sur le corps des nombres réels.

Parfois on notera un vecteur en le surmontant d'une flèche, des fois sans, mais alors on l'écrit en caractères gras : $\vec{A}$, $\vec{\bar{A}}$ ou tout simplement $\mathbf{A}$. Toute notation est acceptable à partir du moment où l'on sait de quoi on parle et pourvu qu'elle ne conduise pas à des contradictions ! Il faudra se souvenir de cette remarque quand nous aborderons la relativité restreinte dans l'espace vectoriel de Minkowski, car le mot vecteur y désignera des objets de natures très différentes.

On appelle *base d'un espace vectoriel de dimension n* un système de n vecteurs de E, *indépendants*, permettant d'exprimer linéairement et de *manière unique* tout vecteur de E. Cette unicité de la décomposition d'un vecteur en composantes relativement à une base donnée est l'essence même du calcul vectoriel.

Par exemple, dans l'espace ordinaire à trois dimensions, un vecteur peut s'écrire en fonction des vecteurs unitaires (i.e. de norme 1.) d'une base *orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est aussi appelée *base cartésienne*. Pour cette base cartésienne, on écrira souvent les vecteurs de base $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

Dans une base cartésienne, son module (ou norme) A est alors donné par : $\|\vec{A}\| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ (il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore dans l'espace).

Le produit scalaire de deux vecteurs est alors donné par (dans un repère orthonormé) : $\vec{A} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{déf}}{=} AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$, où θ est l'angle que les deux vecteurs font entre eux. On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul (on annule le cosinus !). Un

des nombres complexes $\mathbb{C}$ en est un autre. Il existe en mathématiques de nombreux corps adaptés à différents problèmes (corps des quaternions, etc.).

espace vectoriel muni du produit scalaire ci-dessus constitue un *espace euclidien*. En relativité, nous introduirons un nouveau produit scalaire dit produit scalaire de Minkowski.

Notons que l'on a la relation suivante entre le module d'un vecteur et le produit scalaire de ce vecteur avec lui-même : $\|\vec{A}\|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$.

On peut aisément démontrer que (voir annexe à la suite de cette section):

- 1) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- 2) $(\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) = \lambda \vec{A} \cdot \vec{B}$
- 3) $\vec{A} \cdot \vec{A} \geq 0$ l'égalité n'ayant lieu que si $\vec{A} = \vec{0}$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est quant à lui donné par : $\vec{A} \times \vec{B} \stackrel{\text{déf}}{=} AB \sin \theta \vec{u}_n$, où le sens et la direction du vecteur *unitaire* $\vec{u}_n$ sont donnés par la règle de la main droite ou du tire-bouchon. Au lieu d'utiliser la notation $\times$, on écrira parfois $\wedge$ pour représenter le produit vectoriel. Ces deux notations sont courantes mais il me semble préférable d'utiliser $\times$ car le symbole $\wedge$ a en mathématiques (analyse) un tout autre sens (ce que l'on appelle le *produit extérieur*, une notion fort utile dans le cadre de la *théorie des formes différentielles extérieures* qui permet notamment de simplifier grandement la formulation de l'électromagnétisme classique, ou encore de donner un cadre mathématique rigoureux et concis pour toutes les parties des mathématiques en relation avec les intégrales multiples, les changements de variables, etc.).

Il n'est pas (très) difficile de vérifier que la norme de $\vec{A} \times \vec{B}$ n'est rien d'autre que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Le produit vectoriel satisfait les propriétés suivantes (voir annexe ci-dessous):

- 1) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- 2) $(\lambda \vec{A}) \times (\mu \vec{B}) = (\lambda \mu) \vec{A} \times \vec{B}$
- 3) $\vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2 + \dots + \vec{A} \times \vec{B}_n$
- 4) $\vec{A} \times (\lambda \vec{A}) = \vec{0}$

Dans une base *orthonormée directe* (i.e. orientée selon la règle de la main droite) on a naturellement : $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ et $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$. Dans ces conditions on peut facilement montrer que :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

On utilise aussi le *triple produit vectoriel* (très utile en électromagnétisme comme vous le verrez dans quelques sessions) qui vérifie notamment:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Enfin, on définit le *produit triple* (ou encore *produit mixte*) :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Annexe : Démonstrations de plusieurs théorèmes d'algèbre vectorielle

Produit scalaire et multiplication par un scalaire

On se propose de montrer que $(\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) = \lambda \vec{A} \cdot \vec{B}$.

Démonstration :

On rappelle que, par définition, le produit scalaire de deux vecteurs est $\vec{A} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} AB \cos \theta$ avec θ l'angle entre les directions de $\vec{A}$ et $\vec{B}$. On a donc la série d'égalités suivantes qui prouve l'assertion cherchée:

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} &= \|\lambda \vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta = \lambda \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta = \lambda AB \cos \theta \\ \vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) &= \|\vec{A}\| \|\lambda \vec{B}\| \cos \theta = \lambda \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta = \lambda AB \cos \theta \\ \lambda \vec{A} \cdot \vec{B} &= \lambda AB \cos \theta \end{aligned}$$

Distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle

On se propose de démontrer que $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$.

Démonstration :

Il faut bien sûr utiliser la définition géométrique du produit scalaire (voir figure ci-dessous). On a :

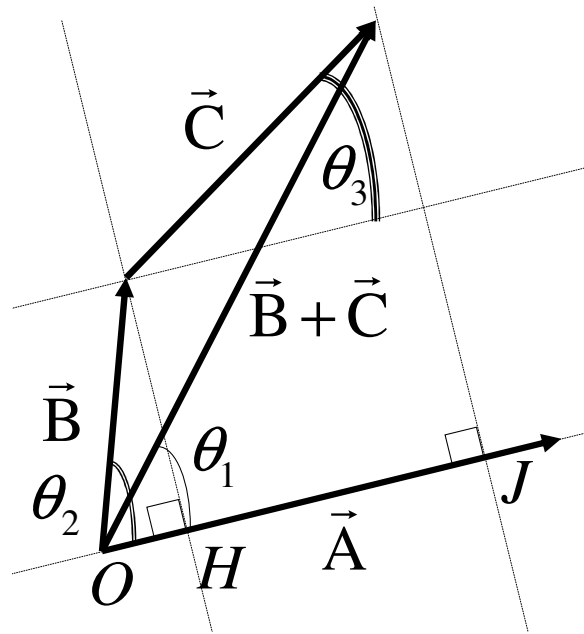
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) \stackrel{?}{=} \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\|\vec{A}\| \|\vec{B} + \vec{C}\| \cos \theta_1 \stackrel{?}{=} \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta_2 + \|\vec{A}\| \|\vec{C}\| \cos \theta_3$$

$$A \times OJ \stackrel{?}{=} A \times OH + A \times HJ$$

$$A \times OJ \stackrel{?}{=} A \times (OH + HJ)$$

$$A \times OJ = A \times OJ$$



Produit scalaire de deux vecteurs dans une base cartésienne

On se propose de montrer que dans une base cartésienne on a,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Démonstration :

Dans une base cartésienne, les composantes de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont : $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Donc, par distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle (voir précédemment),

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x \vec{i} \cdot \vec{i} + A_x B_y \vec{i} \cdot \vec{j} + A_x B_z \vec{i} \cdot \vec{k} \\ &\quad + A_y B_x \vec{j} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j} + A_y B_z \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &\quad + A_z B_x \vec{k} \cdot \vec{i} + A_z B_y \vec{k} \cdot \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

et donc,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x \vec{i} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Produit vectoriel de deux vecteurs et aire du parallélogramme associé

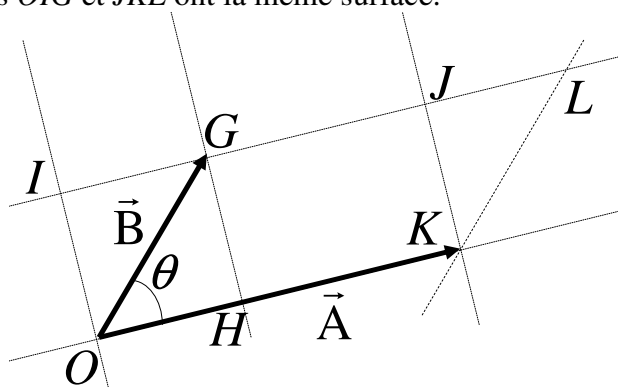
On se propose de justifier l'énoncé suivant : la norme de $\vec{A} \times \vec{B}$ n'est rien d'autre que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Démonstration :

On a (voir figure ci-dessous):

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \theta = A \times GH$$

Donc $\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ représente l'aire du rectangle $OIJK$. Mais cette aire n'est rien d'autre que celle du parallélogramme $OGLK$ (construit avec les deux vecteurs de départ $\vec{A}$ et $\vec{B}$) puisque par construction les triangles OIG et JKL ont la même surface.



Anticommutativité du produit vectoriel

On souhaite prouver que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

Démonstration :

La raison est géométrique : par définition, le produit vectoriel de deux vecteurs est donné par : $\vec{A} \times \vec{B} \stackrel{\text{déf}}{=} AB \sin \theta \vec{u}_n$, où le sens et la direction du vecteur unitaire $\vec{u}_n$ sont donnés par la

règle de la main droite ou du tire-bouchon. Ainsi $\vec{A} \times \vec{B}$ et $\vec{B} \times \vec{A}$ doivent être deux vecteurs dont la somme est le vecteur nul.

Produit vectoriel et multiplication par un scalaire

$$\text{On a } (\lambda \vec{A}) \times (\mu \vec{B}) = (\lambda \mu) \vec{A} \times \vec{B}.$$

Démonstration :

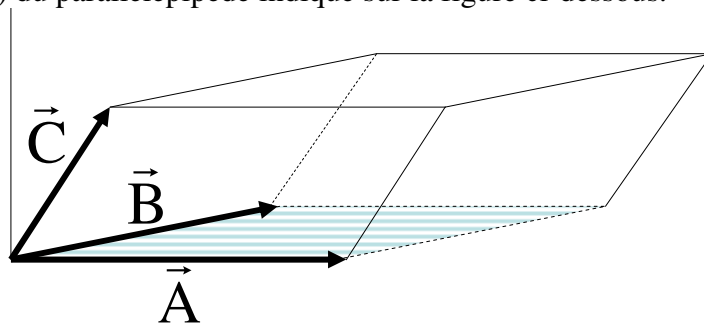
Du même type que celle concernant le produit scalaire et la multiplication par un scalaire. On s'abstient donc de donner plus de détails.

Formule du produit triple ou produit mixte

$$\text{On veut montrer que } \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}).$$

Démonstration :

Nous avons déjà démontré que l'aire du parallélogramme hachuré sur la figure est simplement la norme du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$. Il en résulte que le produit scalaire $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ n'est rien d'autre que le volume (*orienté* : il faut faire attention à l'ordre des vecteurs car $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$!) du parallélépipède indiqué sur la figure ci-dessous.



Bien évidemment ce volume peut être calculé à partir des autres faces du parallélépipède. C'est pour cela que l'on a $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$.

Distributivité du produit vectoriel relativement à l'addition vectorielle

$$\text{On se propose de démontrer que } \vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2.$$

Démonstration :

Ce résultat est de loin un des plus compliqués. Il existe plusieurs démonstrations. En voici une (la plus algébrique, je veux dire qui fait le moins appel à des considérations géométriques plutôt difficiles à visualiser – en général – par le commun des mortels) qui utilise le produit triple. Appelons $\vec{V}$ le vecteur suivant :

$$\vec{V} = \vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) - \vec{A} \times \vec{B}_1 - \vec{A} \times \vec{B}_2$$

On aura démontré le théorème si l'on prouve que $\vec{V} = \vec{0}$. On a (on utilise deux fois les formules du produit triple):

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \vec{V} &= \vec{V} \cdot [\vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)] - \vec{V} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_1) - \vec{V} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_2) \\ V^2 &= \vec{A} \cdot [(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \times \vec{V}] - \vec{A} \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{V}) - \vec{A} \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{V}) \\ V^2 &= (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot [\vec{V} \times \vec{A}] - \vec{B}_1 \cdot (\vec{V} \times \vec{A}) - \vec{B}_2 \cdot (\vec{V} \times \vec{A}) \end{aligned}$$

A présent, on peut se servir du fait que le produit scalaire est distributif :

$$\begin{aligned} V^2 &= (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot [\vec{V} \times \vec{A}] - \vec{B}_1 \cdot (\vec{V} \times \vec{A}) - \vec{B}_2 \cdot (\vec{V} \times \vec{A}) \\ V^2 &= (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot [\vec{V} \times \vec{A}] - (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot [\vec{V} \times \vec{A}] = \vec{0} \text{ donc,} \\ \vec{V} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Produit vectoriel de deux vecteurs dans une base cartésienne

On se propose de justifier que,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Elle repose sur la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition vectorielle (voir précédemment) et sur le fait que $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}$ et $\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}$. Dans le fond la démonstration ressemble beaucoup à celle concernant le développement du produit scalaire sur une base cartésienne. On s'abstient donc de développer plus ici.

Formule du triple produit vectoriel

On souhaite démontrer que $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$.

Démonstration :

Le plus simple est d'utiliser une base cartésienne choisie de telle façon que $\vec{A}$ ait la même direction que $\vec{i}$: $\vec{A} = A\vec{i}$. On peut bien sûr choisir notre base de telle façon que $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$ (autrement dit, le plan contenant $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est choisi pour plan des xy). Dans ces conditions le vecteur $\vec{C}$ a pour composantes absolument quelconques $\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$. On a alors de manière triviale:

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = AC_x$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = B_x C_x + B_y C_y$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB_y \vec{k}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = AB_y \vec{k} \times (C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}) = AB_y C_x \vec{j} - AB_y C_y \vec{i}$$

On a bien, enfin,

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$AB_y C_x \vec{j} - AB_y C_y \vec{i} = (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) AC_x - (A\vec{i})(B_x C_x + B_y C_y)$$

4. Rappels et compléments d'algèbre linéaire

4.1. Changement de base dans un espace vectoriel

Supposons qu'un *même* vecteur $\mathbf{A}$ soit décomposé sur deux bases $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ d'un même espace vectoriel tridimensionnel (vous pourrez aisément généraliser à la dimension deux ou aux dimensions supérieures à trois).

Ici on ne fait aucune autre hypothèse sur les vecteurs de base, en particulier les bases ne sont pas nécessairement orthogonales ou orthonormales. Si une base est orthonormale, alors on dit que les coordonnées (x^1, x^2, x^3) sont des coordonnées cartésiennes et on les écrit souvent (x, y, z) au lieu de (x^1, x^2, x^3) .

Dans chaque base, en général, on a donc les composantes (x^1, x^2, x^3) et $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ du vecteur $\mathbf{A}$ telles que :

$$\mathbf{A} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \bar{x}^1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{x}^2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{x}^3 \bar{\mathbf{e}}_3$$

ou,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \bar{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i$$

Notez bien la façon dont on a posé les indices : pour numéroté l'indice des vecteurs de base on a mis l'indice en bas; pour les composantes du vecteur, on a mis l'indice en haut.

Suivant Einstein, on peut tirer profit de la notation indicielle en haut pour les composantes et en bas pour les vecteurs de base : lorsqu'un même indice est répété en haut *et* en bas, alors on omet le signe sigma (Σ) puisque la somme est alors considérée *implicite*. Cette convention est appelée *convention d'Einstein*. Vous verrez toute la puissance de cette convention lorsque vous aborderez la relativité restreinte ou la notion de contrainte hydrodynamique ou la théorie de l'élasticité; cela est encore plus vrai en relativité générale.

Avec la convention d'Einstein, finalement, on peut donc écrire de manière beaucoup plus compacte :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \bar{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i \rightarrow \mathbf{A} = x^i \mathbf{e}_i = \bar{x}^i \bar{\mathbf{e}}_i$$

Dans ce qui précède, l'indice i est appelé *indice muet*. En effet, on pourrait très bien utiliser une autre lettre pour signifier la sommation implicite, par exemple μ (il suffit, dans le fond, qu'un indice soit répété en haut et en bas):

$$\boxed{\mathbf{A} = x^i \mathbf{e}_i = \bar{x}^\mu \bar{\mathbf{e}}_\mu}$$

Supposons maintenant que l'on passe d'une base à l'autre à l'aide d'une application linéaire² L dont les coefficients sont notés L_j^i (un indice est indice de colonne, l'autre indice de ligne):

$$\boxed{\forall j \in \{1, 2, 3\} : \bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 L_j^k \mathbf{e}_k \stackrel{\text{conv. Einstein}}{=} L_j^k \mathbf{e}_k}$$

La dernière égalité est une notation très compacte équivalente à :

$$\boxed{\forall j \in \{1, 2, 3\} : \bar{\mathbf{e}}_j = L_j^k \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ L_2^1 & L_2^2 & L_2^3 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}}$$

On a donc (attention, dans la dernière égalité, on a affaire à une double sommation – i.e. $3^2 = 9$ termes après développement en dimension 3 - car *deux* indices muets sont présents, j et k),

$$\mathbf{A} = x^i \mathbf{e}_i = \bar{x}^j \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{x}^j (L_j^k \mathbf{e}_k) = L_j^k \bar{x}^j \mathbf{e}_k$$

² Voir annexe dans la section suivante pour le sens précis de ce terme. Dans l'immédiat pensez simplement qu'il s'agit d'une matrice.

et finalement, par identification,

$$x^i \mathbf{e}_i = L_j^k \bar{x}^j \mathbf{e}_k$$

et pour la composante x^i (obtenue à partir du membre de droite dès que $k = i$),

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : x^i = L_j^i \bar{x}^j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix}$$

Donc (attention, on a changé les noms des indices muets), nous avons montré que :

$$\text{Si } \bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 L_j^k \mathbf{e}_k = L_j^k \mathbf{e}_k \text{ alors } x^j = \sum_{k=1}^3 L_k^j \bar{x}^k = L_k^j \bar{x}^k$$

Ou encore, après développement des sommes implicites :

$$\text{Si } \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix}$$

Vous êtes sceptiques après avoir lu ces démonstrations ? Vous n'êtes pas convaincu(e)s, vous ne comprenez pas bien la convention d'Einstein ? Allez jeter un œil à l'annexe qui se trouve à la fin de cette section...

Finalement, ces égalités nous apprennent que c'est donc la même matrice (à une transposition matricielle près : un coup on fait une sommation selon l'indice du bas, un coup selon l'indice du haut) qui permet de passer de l'ancienne base à la nouvelle, ou bien des nouvelles coordonnées aux anciennes. Cette différence de comportement dans un changement de base entre les vecteurs de base, et les composantes des vecteurs fait que l'on qualifie les composantes des vecteurs de *contravariantes*, et les vecteurs de base sont appelés vecteurs *covariants* (ou *covecteurs*). Ce langage est propre au calcul dit *tensoriel*.

Exemple, rotation d'angle θ des axes x et y autour de l'axe z :

On a,

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

Mais la transposée de cette matrice est,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix}$$

De plus, on peut obtenir des relations inverses en considérant la matrice M inverse de L :

$$M = L^{-1} : \text{ si } \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 M_j^k \bar{\mathbf{e}}_k \text{ alors } \bar{x}^j = \sum_{k=1}^3 M_k^j x^k$$

Exemple, rotation d'angle $-\theta$ des axes x et y autour de l'axe z :

On a,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix}$$

Mais la transposée de cette matrice est,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On déduit donc que,

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Autre exemple d'usage de ces concepts: notion de transformation orthogonale

On suppose que dans un même espace vectoriel de dimension trois, on réalise le changement de base $\bar{\mathbf{e}}_j = L_j^k \mathbf{e}_k$. On suppose de plus que les deux bases sont orthonormées³, c'est-à-dire que (le point désigne le produit scalaire),

$$\forall i, j : \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \text{ et que } \forall i, j : \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$$

³ Cette transformation conserve donc le produit scalaire des vecteurs. Cette transformation conserve donc aussi les longueurs puisque $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

avec δ_{ij} un symbole appelé « symbole de Kronecker » et qui, par définition, vérifie la propriété suivante :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On se propose de montrer que l'inverse de la matrice L des coefficients L_i^j est égale à sa transposée : $L^{-1} = L^T$. Une telle matrice est qualifiée *orthogonale*.

On a $\bar{\mathbf{e}}_i = L_i^k \mathbf{e}_k$ et $\bar{\mathbf{e}}_j = L_j^m \mathbf{e}_m$ donc $\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} = L_i^k L_j^m \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = L_i^k L_j^m \delta_{km}$. On peut alors faire le développement suivant (les indices k et m sont muets on doit donc s'attendre à une somme de $3^2 = 9$ termes mais... ne subsistent que trois termes, ceux pour lesquels $k = m$ puisque pour $k \neq m$ les symboles de Kronecker δ_{km} sont nuls),

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= L_i^k L_j^m \delta_{km} \\ \delta_{ij} &= L_i^1 L_j^1 \delta_{11} + L_i^2 L_j^2 \delta_{22} + L_i^3 L_j^3 \delta_{33} \\ \delta_{ij} &= L_i^1 L_j^1 + L_i^2 L_j^2 + L_i^3 L_j^3 \end{aligned}$$

Sachant que l'opération de transposition échange les lignes et les colonnes d'une matrice, on peut toujours écrire,

$$\begin{aligned} \forall i, j : (L^T)_i^j &= L_j^i, \text{ donc,} \\ \delta_{ij} &= L_i^1 L_j^1 + L_i^2 L_j^2 + L_i^3 L_j^3 \\ \delta_{ij} &= L_i^1 (L^T)_1^j + L_i^2 (L^T)_2^j + L_i^3 (L^T)_3^j \\ \delta_{ij} &= \sum_{\ell=1}^3 L_i^\ell (L^T)_\ell^j \stackrel{\text{conv. d'Einstein}}{=} L_i^\ell (L^T)_\ell^j \end{aligned}$$

Le membre de droite de la dernière égalité représente un produit de deux matrices : L et L^T . Le fait que ce produit matriciel soit égal à la matrice des

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit la matrice identité, nous avons donc montré que,

$$L^T = L^{-1}$$

Un exemple classique est la rotation. Par exemple, dans le cas d'une rotation d'angle θ dans le plan xy autour de l'axe des z on a bien (l'inverse étant bien sûr une rotation d'angle $-\theta$),

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4.2. Matrice d'une application linéaire après un changement de base

Dans ce qui suit, on note $\text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Le problème est le suivant :

1. On dispose d'une certaine application linéaire A qui à un vecteur $\mathbf{u}$ exprimé sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ associe un vecteur image $A\mathbf{u}$ lui aussi exprimé sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

A
$\text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
$\mathbf{u} \mapsto A\mathbf{u}$

2. Supposons maintenant que l'on puisse exprimer les vecteurs sur une autre base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$. Quelle est la matrice $\bar{A}$ qui transforme les vecteurs comme A mais pour des vecteurs exprimés sur la nouvelle base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$?

Solution : Il suffit de concevoir une matrice P qui au vecteur $\bar{\mathbf{u}}$ exprimé sur la base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ donne le *même* vecteur mais exprimé sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, vecteur que l'on note $\mathbf{u}$. Ce vecteur $\mathbf{u}$ est alors transformé par A qui donne un vecteur $A\mathbf{u}$ exprimé sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. En appliquant la matrice inverse de P , notée P^{-1} , sur le vecteur $A\mathbf{u}$ on obtient alors ce dernier vecteur exprimé sur la base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$:

P	A	P^{-1}
$(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3) \xrightarrow{\quad} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\quad} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\quad} (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$		
$\bar{\mathbf{u}} \mapsto \mathbf{u} \mapsto A\mathbf{u} \mapsto \bar{A}\bar{\mathbf{u}}$		

Avec ces notations on a donc naturellement $\bar{A} = P^{-1}AP$.

Reste à préciser le contenu exact de la matrice P ...

Nous avons déjà vu que,

$$\text{Si } \bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 L_j^k \mathbf{e}_k = L_j^k \mathbf{e}_k \text{ alors } x^j = \sum_{k=1}^3 L_k^j \bar{x}^k = L_k^j \bar{x}^k$$

ou encore,

$$\text{si } \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ L_2^1 & L_2^2 & L_2^3 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix}$$

L'opération matricielle suivante,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix}$$

prend les composantes d'un vecteur sur la base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ et fournit ses composantes sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Cette matrice carrée est donc directement identifiable à la matrice P souhaitée :

$$(P) = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix}$$

Comment ne jamais se tromper pour correctement écrire la matrice de P ?

Remarquons que,

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ L_2^1 & L_2^2 & L_2^3 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= L_1^1 \mathbf{e}_1 + L_1^2 \mathbf{e}_2 + L_1^3 \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 &= L_2^1 \mathbf{e}_1 + L_2^2 \mathbf{e}_2 + L_2^3 \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= L_3^1 \mathbf{e}_1 + L_3^2 \mathbf{e}_2 + L_3^3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

donc la matrice de P est simplement obtenue quand on met en COLONNES les composantes (exprimées sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$) des vecteurs $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$.

$$(P) = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{\mathbf{e}}_1 & \bar{\mathbf{e}}_2 & \bar{\mathbf{e}}_3 \end{matrix}$$

4.3. Diagonalisation d'une matrice symétrique

On dit qu'un vecteur $\bar{\mathbf{u}}$ est vecteur propre d'une application linéaire A pour la valeur propre λ si (définition):

$$A\bar{\mathbf{u}} = \lambda\bar{\mathbf{u}}$$

La notion de vecteur propre est très importante dans plusieurs domaines de la physique : l'étude des phénomènes ondulatoires, la mécanique quantique, les contraintes hydrodynamiques ou élastiques, etc.

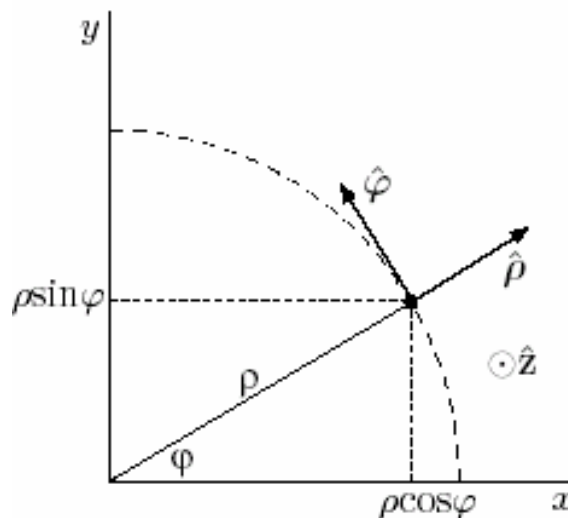
Rappelons alors le théorème d'algèbre linéaire suivant (pour une démonstration voir tout bon livre d'algèbre ou bien demandez une justification à votre professeur de mathématiques; en dernier recours je pourrais bien sûr vous dépanner...) :

Si dans une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la matrice d'une application linéaire A est symétrique, alors dans une base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ de vecteurs propres de A la matrice associée $\bar{A} = P^{-1}AP$ est diagonale et les éléments diagonaux sont justement les valeurs propres de A . De plus la matrice de passage P est obtenue en mettant en **COLONNES les vecteurs propres de A exprimés sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. D'autre part $P^{-1} = P^T$ (l'inverse de P est simplement sa transposée : P est alors dite *orthogonale*).**

4.4. Coordonnées cylindriques et polaires

Les *coordonnées cylindriques* (ρ, φ, z) (certains auteurs les notent aussi (r, θ, z)) sont définies à partir des coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\begin{array}{ccc} x = \rho \cos \varphi & & x = r \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi & \text{ou} & y = r \sin \theta \\ z & & z \end{array}$$



ρ (ou r) est la *coordonnée radiale*, variant de 0 à $+\infty$. φ (ou θ) est l'*angle polaire*, variant de 0 à 2π (modulo 2π). z est la *coordonnée longitudinale*, variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Les *coordonnées polaires* sont quant à elles la restriction au plan xy des coordonnées cylindriques (i.e. on ignore la troisième dimension spatiale selon l'axe des z).

On remarque que dans le système des coordonnées cartésiennes les vecteurs de base $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sont i) orthogonaux entre eux, ii) de norme 1 et iii) perpendiculaires aux surfaces à, respectivement, x constant, y constant et z constant. De plus ces vecteurs unitaires pointent chacun dans la direction où la coordonnée respective augmente.

De la même manière, dans le système des coordonnées cylindriques, on définit une base de vecteurs $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ (ou encore, selon certains auteurs, $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$) telle que ces trois vecteurs soient i) orthogonaux entre eux, ii) de norme 1 et iii) perpendiculaires aux surfaces à, respectivement, ρ constant, φ constant et z constant. De plus on veut encore ces vecteurs unitaires pointant chacun dans la direction où la coordonnée respective augmente. La relation entre ces nouveaux vecteurs de base et la base cartésienne $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ est simple (revoir la figure ci-dessus):

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi\end{aligned}$$

$\hat{z}$ étant le même dans les deux systèmes. On remarque en particulier que la base $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ dépend du point de l'espace considéré, c'est pourquoi on dit que cette base constitue une *base locale*.

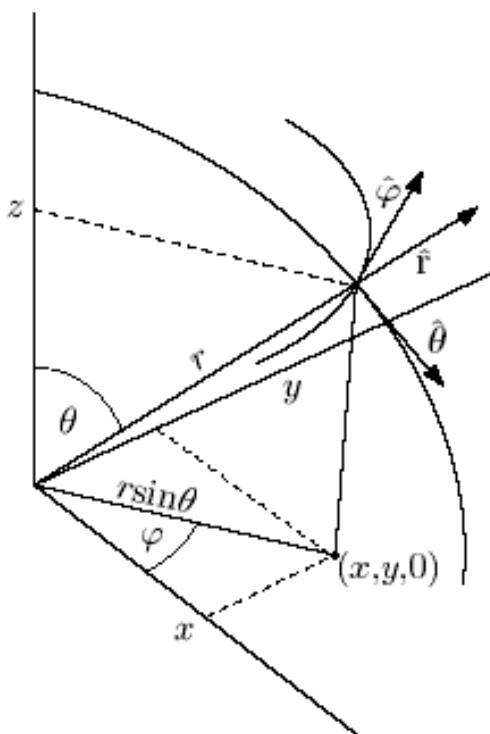
Finalement, remarquons que l'on peut définir un *vecteur position* $\vec{r}$ pour repérer tout point de l'espace :

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

ou,

$$\vec{r} = r \hat{r} + z \hat{z}$$

4.5. Coordonnées sphériques



Un autre système de coordonnées très utile est celui des coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Il est ainsi défini par rapport au système des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Sur la figure ci-dessus, vous pouvez vous faire une idée de la signification géométrique des trois coordonnées (r, θ, φ) . L'angle θ (auss appelé *angle polaire*) varie de 0 à π . L'angle φ (ou angle azimutal) varie lui de 0 à 2π (modulo 2π comme en coordonnées cylindriques). La coordonnée radiale r varie quant à elle de 0 à l'infini. On a la relation triviale :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Comme en coordonnées cylindriques on peut construire une base *locale* (i.e. dépendante du point de l'espace considéré) du système des coordonnées sphériques, $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$. Le vecteur $\hat{\varphi}$ est identique à celui des coordonnées cylindriques (soit $\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$) mais les vecteurs $\hat{r}, \hat{\theta}$ sont en fait obtenus après rotation d'angle θ des vecteurs $\hat{\rho}, \hat{z}$:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin \theta$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{z}} \sin \theta + \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos \theta$$

Mais,

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi$$

donc, finalement,

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \sin \varphi - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi$$

Annexe : Quelques justifications additionnelles d'algèbre linéaire et d'algèbre vectorielle

Notion d'application linéaire et représentation matricielle d'une application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies

Dans tout ce qui suit, on suppose les espaces vectoriels construits sur le corps des nombres réels, $\mathbb{R}$ (en mécanique quantique vous aurez parfois à travailler avec des espaces vectoriels construits sur $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes).

Par définition, une *application linéaire* A est une fonction qui prend un vecteur $x \in V$ dans un certain espace vectoriel V , lui associe un vecteur $y = A(x) \in W$ dans un deuxième espace vectoriel W et qui vérifie les *deux* propriétés suivantes :

$$\forall x, x' \in V : A(x + x') \stackrel{(1)}{=} A(x) + A(x') \in W$$

$$\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : A(\lambda x) \stackrel{(2)}{=} \lambda A(x) \in W$$

Dans tout ce qui suit on suppose maintenant que les espaces vectoriels sont de dimensions finies (il existe des espaces vectoriels de dimension infinie mais leur étude va bien au-delà de ce cours). Par exemple, on va considérer V ayant la dimension deux, et W la dimension trois (libre à vous de généraliser par la suite pour d'autres valeurs des dimensions des espaces...).

Une telle application linéaire A entre V et W prend donc un vecteur du plan et lui associe un vecteur de l'espace. On se propose de montrer que toute application linéaire peut être représentée par une matrice rectangulaire (qui serait par contre carrée si les deux espaces vectoriels avaient la même dimension), et réciproquement. On a :

$$x \in V \rightarrow x = x^1 e_1 + x^2 e_2$$

si l'on note (e_1, e_2) une base quelconque de V . Les propriétés de linéarité de A entraînent donc :

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 \Rightarrow A(x) \stackrel{(1)}{=} A(x^1 e_1) + A(x^2 e_2) \stackrel{(2)}{=} x^1 A(e_1) + x^2 A(e_2)$$

Ce résultat est intéressant : on constate que **pour obtenir l'image d'un vecteur quelconque de V il suffit de connaître les images par A des vecteurs de base $A(e_1)$ et $A(e_2)$** qui sont tous deux des vecteurs de W , espace de dimension trois. Introduisons les $3 \times 2 = 6$ réels A_i^j pour caractériser les composantes de $A(e_1)$ et $A(e_2)$ relativement à une base quelconque $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ de W :

$$A(e_1) = A_1^1 \bar{e}_1 + A_1^2 \bar{e}_2 + A_1^3 \bar{e}_3$$

$$A(e_2) = A_2^1 \bar{e}_1 + A_2^2 \bar{e}_2 + A_2^3 \bar{e}_3$$

Finalement,

$$A(x) = x^1 A(e_1) + x^2 A(e_2)$$

$$A(x) = x^1 (A_1^1 \bar{e}_1 + A_1^2 \bar{e}_2 + A_1^3 \bar{e}_3) + x^2 (A_2^1 \bar{e}_1 + A_2^2 \bar{e}_2 + A_2^3 \bar{e}_3)$$

$$A(x) = \bar{e}_1 (x^1 A_1^1 + x^2 A_2^1) + \bar{e}_2 (x^1 A_1^2 + x^2 A_2^2) + \bar{e}_3 (x^1 A_1^3 + x^2 A_2^3)$$

Et si l'on note,

$$y = A(x) \in W$$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A(x))^1 \\ (A(x))^2 \\ (A(x))^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 A_1^1 + x^2 A_2^1 \\ x^1 A_1^2 + x^2 A_2^2 \\ x^1 A_1^3 + x^2 A_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \\ A_1^3 & A_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi parler d'une matrice revient à parler d'une application linéaire (et donc rend valides les lois (1) et (2) ci-dessus), et réciproquement, si une application vérifie les lois (1) et (2) alors on peut la représenter de façon matricielle ! D'autre part, on constate que la matrice de l'application linéaire contient les coordonnées mises en colonnes des images de la base (e_1, e_2) :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \\ A_1^3 & A_2^3 \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ A(e_1) \quad A(e_2) \end{array}$$

Convention d'Einstein : écritures pour se convaincre de son bien fondé

Dans la section 4.1 page 13 de vos notes de cours on écrit un peu laconiquement,

$$\mathbf{A} = x^i \mathbf{e}_i = \bar{x}^j \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{x}^j (L_j^k \mathbf{e}_k) = L_j^k \bar{x}^j \mathbf{e}_k$$

et on en déduit que,

$$x^i \mathbf{e}_i = L_j^k \bar{x}^j \mathbf{e}_k \text{ et puis que } x^i = L_j^i \bar{x}^j$$

Ces écritures font un usage abondant de la convention d'Einstein qui, à mon avis, rebute certain(e)s. Ici, on se propose de vérifier que cette convention conduit aux bonnes relations à partir des versions développées habituelles de telles écritures vectorielles. Par exemple, en dimension trois on a :

Avec la convention d'Einstein	Commentaires	De façon classique
$\mathbf{A} = x^i \mathbf{e}_i = \bar{x}^j \bar{\mathbf{e}}_j \quad (1)$	On écrit un même vecteur $\mathbf{A}$ sur deux bases d'un même espace vectoriel.	$\mathbf{A} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \bar{x}^1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{x}^2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{x}^3 \bar{\mathbf{e}}_3 \quad (1)$
$\bar{\mathbf{e}}_j = L_j^k \mathbf{e}_k \quad (2)$	On exprime la nouvelle base en fonction de l'ancienne.	$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= L_1^1 \mathbf{e}_1 + L_1^2 \mathbf{e}_2 + L_1^3 \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 &= L_2^1 \mathbf{e}_1 + L_2^2 \mathbf{e}_2 + L_2^3 \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= L_3^1 \mathbf{e}_1 + L_3^2 \mathbf{e}_2 + L_3^3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2)$
$\mathbf{A} = \bar{x}^j (L_j^k \mathbf{e}_k)$	On insère (2) dans le dernier terme de (1).	$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \bar{x}^1 (L_1^1 \mathbf{e}_1 + L_1^2 \mathbf{e}_2 + L_1^3 \mathbf{e}_3) \\ &\quad + \bar{x}^2 (L_2^1 \mathbf{e}_1 + L_2^2 \mathbf{e}_2 + L_2^3 \mathbf{e}_3) \\ &\quad + \bar{x}^3 (L_3^1 \mathbf{e}_1 + L_3^2 \mathbf{e}_2 + L_3^3 \mathbf{e}_3) \end{aligned}$
$\mathbf{A} = (\bar{x}^j L_j^k) \mathbf{e}_k$	On factorise par les vecteurs de la première base $\mathbf{e}_k$.	$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 (L_1^1 \bar{x}^1 + L_2^1 \bar{x}^2 + L_3^1 \bar{x}^3) \\ &\quad + \mathbf{e}_2 (L_1^2 \bar{x}^1 + L_2^2 \bar{x}^2 + L_3^2 \bar{x}^3) \\ &\quad + \mathbf{e}_3 (L_1^3 \bar{x}^1 + L_2^3 \bar{x}^2 + L_3^3 \bar{x}^3) \end{aligned}$
On change le nom d'un indice muet ($k \rightarrow i$) et : $\mathbf{A} = x^i \mathbf{e}_i = (\bar{x}^j L_j^i) \mathbf{e}_i$ $\Downarrow$ $x^i = L_j^i \bar{x}^j$	On utilise le fait que les coordonnées d'un vecteur sont uniques pour établir les formules de passage des nouvelles coordonnées aux anciennes.	$\begin{aligned} \mathbf{A} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 (L_1^1 \bar{x}^1 + L_2^1 \bar{x}^2 + L_3^1 \bar{x}^3) \\ &\quad + \mathbf{e}_2 (L_1^2 \bar{x}^1 + L_2^2 \bar{x}^2 + L_3^2 \bar{x}^3) \\ &\quad + \mathbf{e}_3 (L_1^3 \bar{x}^1 + L_2^3 \bar{x}^2 + L_3^3 \bar{x}^3) \\ &\quad \Downarrow \\ x^1 &= L_1^1 \bar{x}^1 + L_2^1 \bar{x}^2 + L_3^1 \bar{x}^3 \\ x^2 &= L_1^2 \bar{x}^1 + L_2^2 \bar{x}^2 + L_3^2 \bar{x}^3 \\ x^3 &= L_1^3 \bar{x}^1 + L_2^3 \bar{x}^2 + L_3^3 \bar{x}^3 \end{aligned}$

Ce qui précède vous a, je l'espère, convaincu de l'intérêt de la convention d'Einstein : avec peu d'écritures, cette convention conduit aux bonnes relations de transformations des coordonnées :

$$\boxed{\begin{aligned} x^1 &= L_1^1 \bar{x}^1 + L_2^1 \bar{x}^2 + L_3^1 \bar{x}^3 \\ x^i &= L_j^i \bar{x}^j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x^2 &= L_1^2 \bar{x}^1 + L_2^2 \bar{x}^2 + L_3^2 \bar{x}^3 \\ x^3 &= L_1^3 \bar{x}^1 + L_2^3 \bar{x}^2 + L_3^3 \bar{x}^3 \end{aligned} \end{aligned}}$$

5. Cinématique du point

5.1. Définitions de base

Dans l'espace, le *vecteur position* d'une particule de coordonnées cartésiennes (x, y, z) s'écrit : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ce vecteur dépend évidemment du choix d'une origine de l'espace.

La *vitesse instantanée* (en m/s ou m s^{-1} dans le système international, SI) de ce mobile est par définition :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\varepsilon) - \vec{r}(t)}{\varepsilon}},$$

avec $\boxed{v_x = \dot{x} = dx/dt}$, $\boxed{v_y = \dot{y} = dy/dt}$ et $\boxed{v_z = \dot{z} = dz/dt}$.

Autrement dit, la dérivée du vecteur position par rapport au temps est un autre vecteur dont chaque composante est la dérivée par rapport au temps de chaque composante du vecteur position (les 3 composantes du vecteur vitesse).

D'une manière générale, quand on dérive un vecteur par rapport à une variable, cela signifie toujours que l'on dérive chaque composante du vecteur par rapport à cette variable.

Composante par composante, on peut facilement vérifier que :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d}{dt}(\lambda \vec{A}) = \lambda \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \vec{A} \\ \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \end{cases}}$$

L'*accélération instantanée* est par définition :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

avec $a_x = dv_x / dt$, $a_y = dv_y / dt$ et $a_z = dv_z / dt$, quantités mesurées en m/s^2 ou $m s^{-2}$ dans le système international.

Remarque : nous avons $a_x = dv_x / dt = \dot{v}_x = \ddot{x}$, et des notations semblables pour a_y et a_z .

5.2. Mouvement à accélération constante et à deux dimensions

Pour un corps qui se déplace à *accélération constante* dans le plan (xy), nous avons les équations de la cinématique suivantes (un indice 0 indique une variable à un instant initial donné):

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \text{ et } y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_x = v_{x_0} + a_x t \text{ et } v_y = v_{y_0} + a_y t$$

$$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0) \text{ et } v_y^2 = v_{y_0}^2 + 2a_y(y - y_0)$$

Pour obtenir les quatre premières relations, il suffit de pratiquer deux intégrations successives en partant des définitions de l'accélération et de la vitesse instantanées. Les 5^{ème} et 6^{ème} relations s'obtiennent en exprimant le temps à partir des relations 3 et 4 et en l'injectant dans les relations 1 et 2.

5.3. Mouvement de chute libre

Dans le cas d'un mouvement de chute libre, nous avons $a_x = 0$ et $a_y = -g$ (on a un signe moins car on choisit ici un axe des ordonnées orienté vers le haut, dans le sens opposé à celui de la chute; la valeur de l'accélération selon l'axe des abscisses vaut alors 0), où g est l'accélération gravitationnelle. Les relations ci-dessus se simplifient alors :

$$x = x_0 + v_{x_0} t \text{ et } y = y_0 + v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

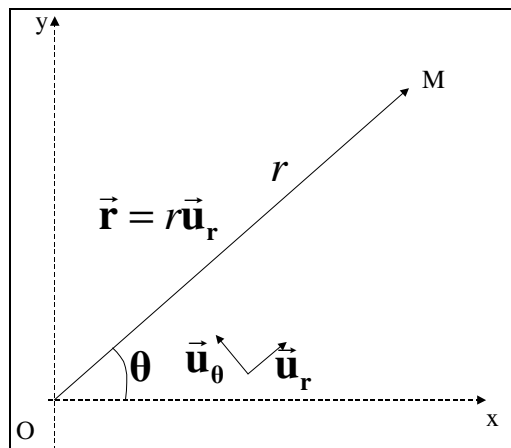
$$v_y = v_{y_0} - g t$$

$$v_y^2 = v_{y_0}^2 - 2g(y - y_0)$$

5.4. Cinématique d'un mouvement plan quelconque

L'idéal est de travailler en *coordonnées polaires*. Ainsi le vecteur position d'un point M (relativement à une origine O) s'exprime en fonction de son module r et de son *argument* ou angle polaire θ .

Si nous notons $\vec{r} = r \vec{u}_r$, où $\vec{u}_r$ est un *vecteur unitaire radial* ($\|\vec{u}_r\|=1$) dirigé selon le $\vec{r}$ instantané, nous pouvons immédiatement en déduire les formes générales de la vitesse et de l'accélération instantanées.



En effet,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt},$$

Mais,

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

(projetez ce vecteur sur les axes x et y et vous trouverez ses coordonnées), donc,

$$\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ce dernier vecteur est un vecteur orthogonal à $\vec{u}_r$ (pour vous en assurer, calculez le produit scalaire $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta \dots$ il est nul !). On note $\vec{u}_\theta$ ce vecteur (voir figure). On l'obtient par une rotation de 90 degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (réfléchissez au signe de chacune de ses composantes...) à partir de $\vec{u}_r$. Donc :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

On obtient identiquement l'expression de l'accélération :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\bar{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\bar{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = \frac{d(\dot{r}\bar{\mathbf{u}}_r)}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\bar{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\bar{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\frac{d\bar{\mathbf{u}}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt}\bar{\mathbf{u}}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\theta}{dt}, \\ \bar{\mathbf{a}} &= \frac{d\dot{r}}{dt}\bar{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\frac{d\bar{\mathbf{u}}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{\mathbf{u}}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}$$

Le nouveau vecteur $\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\theta}{d\theta}$ est, de manière analogue, obtenu via la rotation d'angle 90 degrés à partir du vecteur $\bar{\mathbf{u}}_\theta$, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Mais on peut aussi calculer ses coordonnées via les dérivées pour constater qu'il est tout simplement l'opposé du vecteur $\bar{\mathbf{u}}_r$:

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_\theta}{d\theta} = \begin{pmatrix} \frac{d(-\sin\theta)}{d\theta} \\ \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = -\bar{\mathbf{u}}_r.$$

D'où,

$$\bar{\mathbf{a}} = \ddot{r}\bar{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\bar{\mathbf{u}}_\theta + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{\mathbf{u}}_\theta - r\dot{\theta}^2\bar{\mathbf{u}}_r,$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{u}}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \bar{\mathbf{u}}_\theta(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}).$$

5.5. Cas particulier du mouvement de rotation

Dans ce cas, le vecteur position a un module constant, $r = \text{cte}$, et la vitesse et l'accélération prennent des formes plus simples (nécessairement, pour un rayon constant, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$) :

$$\bar{\mathbf{v}} = r\dot{\theta}\bar{\mathbf{u}}_\theta,$$

$$\bar{\mathbf{a}} = -r\dot{\theta}^2\bar{\mathbf{u}}_r + r\ddot{\theta}\bar{\mathbf{u}}_\theta.$$

Si l'on remarque que $\dot{\theta} = d\theta/dt$ représente simplement le changement instantané d'angle par unité de temps, en fait cette grandeur est ce que l'on appelle en général la *pulsation* du mouvement de rotation (souvent notée ω) ou encore la *vitesse angulaire*. Ainsi,

$$r\dot{\theta} = r\omega = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} = \frac{ds}{dt} = v,$$

si l'on note $ds = r d\theta$ la distance parcourue sur le cercle pendant la durée dt (il s'agit de la longueur de l'arc d'angle $d\theta$). La grandeur $r\dot{\theta}$ représente donc tout simplement la *vitesse*

linéaire, v , le long de la trajectoire circulaire. On peut aisément vérifier que les termes $r\ddot{\theta}^2$ et $r\ddot{\theta}$ de l'accélération vectorielle valent alors v^2/r et dv/dt , respectivement : vous retrouvez ainsi les relations bien connues relatives au mouvement de rotation, telles qu'on les présente habituellement, i.e. en termes d'accélérations centripète et tangentielle. Si la rotation est en outre uniforme, le terme $r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ disparaît complètement (la vitesse angulaire est constante pour un mouvement uniforme !) de la relation donnant l'accélération : il ne reste plus alors que le terme centripète en v^2/r (dirigé vers l'intérieur de la trajectoire, cf. le signe moins devant le vecteur unitaire $\vec{u}_r$).

Remarques :

1. Les résultats généraux $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{\theta}r\vec{u}_\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ pourraient tout aussi bien s'écrire,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

2. En coordonnées cylindriques, il convient d'ajouter un terme associé à la 3^{ème} dimension d'espace,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}\end{aligned}$$

5.6. Trois résultats généraux de cinématique

1. Si un vecteur non nul conserve une norme identique au cours du temps, alors il est orthogonal à sa propre dérivée par rapport au temps.

En effet, supposons que le vecteur $\vec{A}$ ait une norme constante A durant le mouvement. Sachant que $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ on en déduit que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{A}) &= \frac{d}{dt}(A^2) = 0 \text{ mais,} \\ \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{A}) &= \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} \text{ donc,} \\ 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} &= 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \frac{d\vec{A}}{dt}\end{aligned}$$

En particulier, si une particule se déplace à *vitesse scalaire constante*, alors le vecteur vitesse et le vecteur accélération sont toujours orthogonaux dans le mouvement : $\vec{v} \perp \vec{a}$ puisque $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

Un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante satisfait évidemment cette propriété (calculez le produit scalaire de $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$, vous obtenez trivialement zéro car $\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_r$ par définition de cette base locale).

2. Généralement, on a toujours,

$$v \frac{dv}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{a}$$

avec v la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ et $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

Avant de démontrer ce résultat, tâchons d'abord de l'interpréter. Remarquons que $\vec{v} \cdot \vec{a} = va \cos \theta$ (θ est l'angle entre la vitesse et l'accélération) donc (après simplification par v de chaque bord de l'égalité),

$$v \frac{dv}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{a} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a \cos \theta$$

Cela signifie que seulement une partie de la norme de l'accélération peut être dédiée au changement de la norme de la vitesse. En effet, en général, une partie de l'accélération est aussi consacrée au changement de direction du mouvement. Autrement dit, il se peut aussi qu'une vitesse ait une grandeur constante sans que pour autant l'accélération soit nulle (il suffit que l'accélération soit tout le temps orthogonale à la vitesse, comme par exemple dans le mouvement circulaire uniforme, auquel cas toute l'accélération est employée pour le changement de direction). Ce résultat généralise le point 1 ci-dessus.

Voyons maintenant la démonstration de ce résultat. Remarquons que l'énergie cinétique d'une particule de masse m peut s'écrire de deux manières puisque $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$:

$$\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

donc, après simplification par la masse, et si l'on calcule la dérivée par rapport au temps des deux membres de l'égalité, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\ \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) &= \frac{d}{dt} (v^2) \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dv}{dt} v + v \frac{dv}{dt} \\ 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= 2v \frac{dv}{dt} \\ \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= v \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v \frac{dv}{dt}$$

3. Rayon de courbure instantané :

Nous avons vu que pour le mouvement de rotation selon une trajectoire circulaire de rayon r , la norme de l'accélération normale (ou centripète) instantanée est $\|\vec{a}_n\| = v^2 / r$ où v est la norme de la vitesse instantanée tangentielle à la trajectoire circulaire. Nous pouvons alors définir un rayon de courbure instantané ρ , même pour une trajectoire non circulaire, dès que nous pouvons donner un sens à la quantité $\rho \stackrel{\text{déf}}{=} v^2 / \|\vec{a}_n\|$. Remarquons qu'il convient de noter le rayon de courbure ρ (avec une autre lettre que r) car, la trajectoire n'étant plus nécessairement circulaire, la norme du vecteur position $\vec{r}$ n'est plus nécessairement constante ni directement identifiable au rayon d'un cercle bien déterminé. En fait, nous pouvons montrer que (formule dont l'intérêt est qu'elle ne dépend pas du tout du système de coordonnées utilisé),

$$\rho = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|} = \frac{v^3}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}$$

En effet, remarquons que, l'accélération se décomposant en la somme vectorielle d'une accélération tangentielle et d'une accélération normale,

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

on a,

$$\vec{a} \times \vec{v} = (\vec{a}_n + \vec{a}_t) \times \vec{v} = \vec{a}_n \times \vec{v} \quad (\text{car on a toujours } \vec{a}_t \times \vec{v} = \vec{0})$$

d'où,

$$\|\vec{a} \times \vec{v}\| = \|\vec{a}_n \times \vec{v}\| = \|\vec{a}_n\| \cdot \|\vec{v}\| = \|\vec{a}_n\| v$$

$$\|\vec{a}_n\| = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{v}$$

donc,

$$\rho = \frac{v^2}{\|\vec{a}_n\|} = v^2 \frac{v}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|} = \frac{v^3}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}, \text{ QED}^4.$$

Parmi le nombre infini de trajectoires possibles, il en existe deux pour lesquelles le rayon de courbure à une valeur particulièrement simple :

- Mouvement rectiligne (uniforme ou non) : dans ce cas $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc leur produit vectoriel est nul et le rayon de courbure est trivialement infini, $\rho = +\infty$;

⁴ Quod Erat Demonstrandum, ou CQFD en français.

• Mouvement circulaire de rayon r (uniforme ou non ; les seules contraintes sont $\dot{r} = \ddot{r} = 0$) : ici le rayon de courbure est trivialement r . En effet, on a en toute généralité $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = r\dot{\theta}\hat{\theta}$ et $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta}$. Donc,

$$\vec{a} \times \vec{v} = (-r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta}) \times (r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$\vec{a} \times \vec{v} = (-r\dot{\theta}^2 r \dot{\theta}) \hat{r} \times \hat{\theta}$$

$$\vec{a} \times \vec{v} = (-r^2 \dot{\theta}^3) \hat{r} \times \hat{\theta}$$

donc,

$$\|\vec{a} \times \vec{v}\| = +r^2 |\dot{\theta}^3| \|\hat{r} \times \hat{\theta}\| = r^2 |\dot{\theta}^3|$$

mais $\dot{\theta} = \omega = v/r$,

$$\|\vec{a} \times \vec{v}\| = r^2 |\dot{\theta}^3| = r^2 \frac{v^3}{r^3} = \frac{v^3}{r}$$

Et finalement,

$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|} = v^3 \frac{r}{v^3} = r$$

6. Référentiels inertiels et transformation de Galilée

6.1. Mouvements relatifs

Deux repères peuvent être en *mouvement relatif*, soit parce que leurs *origines se déplacent* l'une par rapport à l'autre, soit parce que *l'orientation relative des deux repères change* avec le temps.

Notons que nous ne pouvons décrire que le mouvement relatif de deux repères l'un par rapport à l'autre et non le mouvement absolu d'un repère, notion qui n'a pas de sens.

Bien entendu, on peut fort bien utiliser une variété de repères différents qui ne sont pas en *mouvement* les uns par rapport aux autres. Par exemple, il peut s'agir de deux repères cartésiens⁵ qui diffèrent seulement par le choix de l'origine, ou par l'orientation des axes. On dira que ces deux repères appartiennent au même référentiel, puisqu'ils ne sont pas en mouvement relatif.

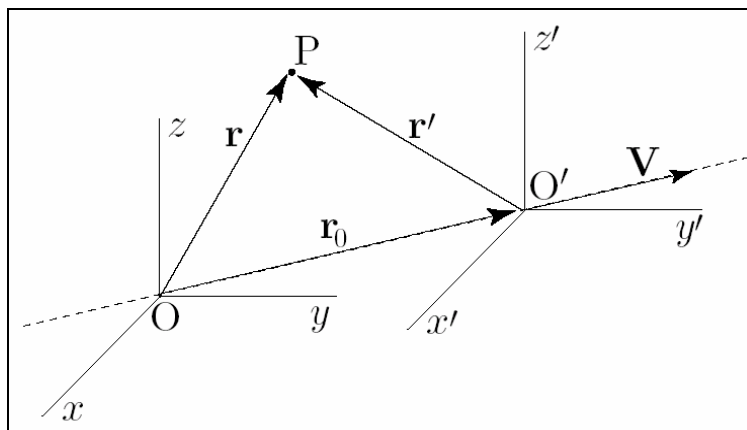
Au contraire, deux repères cartésiens qui se déplacent à une vitesse constante l'un par rapport à l'autre n'appartiennent pas au même référentiel. Notez qu'une quantité comme la vitesse $\vec{v}$ d'une particule ne dépend pas du repère utilisé (c'est-à-dire de son origine ou de son

⁵ Pour les fins de la présente discussion, il est suffisant de se limiter aux repères cartésiens.

orientation) pourvu que l'on demeure dans le même référentiel. En contrepartie, le vecteur position d'une particule dépend toujours du référentiel d'observation.

6.2. Transformation de Galilée

Considérons le cas d'un repère cartésien R' qui coïncide avec un autre repère R (même origine et mêmes axes) au temps $t = 0$, mais dont l'origine O' se déplace à la *vitesse vectorielle constante* $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ par rapport au repère R . Au temps t , la position $\vec{r}_0$ de l'origine O' sera $\vec{V}t$. On dit que R et R' constituent alors des référentiels inertiels. Voir figure ci-dessous.



Pour un point quelconque P de l'espace, en supposant que la relation entre les deux repères peut s'obtenir à partir de la simple addition vectorielle,

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

avec un vecteur de translation $\vec{r}_0 = \vec{V}t$ qui dépend du temps, alors la position $\vec{r}'$ du point P vu depuis le repère R' s'exprime ainsi en fonction de la position $\vec{r}$ du même point dans le repère R :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

ou,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

D'autre part, on suppose tout aussi naturellement que le temps t s'écoule de la même façon dans les deux référentiels. Autrement dit, on ne fait pas de distinction entre le temps t' tel qu'il s'écoule dans le référentiel R' et le temps t dans le référentiel R :

$$t' = t$$

En supposant, pour fins d'illustration, que la vitesse relative constante $\vec{V}$ est dirigée selon l'axe des x ($\vec{V} = V\hat{x}$; on peut toujours se mettre dans cette situation, il suffit de bien définir ses axes), alors la relation entre les coordonnées d'espace et de temps des deux référentiels est la suivante :

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Cette relation est la *transformation de Galilée*. Aussi naturelle qu'elle puisse paraître, cette transformation n'est pas physiquement correcte. En fait, le temps ne s'écoule pas tout à fait de la même façon dans les deux référentiels et la relation entre les coordonnées spatiales ne peut pas simplement s'obtenir de la relation vectorielle $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$ avec $\vec{r}_0 = \vec{V}t$. Nous reviendrons sur ce point dans le fascicule consacré à la relativité restreinte.

La relation correcte entre les coordonnées cartésiennes de deux référentiels est une question qui ne se résout pas seulement par des considérations mathématiques comme nous venons de le faire ici : il s'agit d'une question physique qui se résout ultimement par certains faits d'expérience. Cependant, la transformation de Galilée est adéquate en pratique, tant que la norme de la vitesse $\vec{V}$ est petite par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide c .

6.3. Transformations de Galilée pour la vitesse et l'accélération – Notion de forces d'inertie

Soit $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ la vitesse d'une particule dans le référentiel R et $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$ sa vitesse dans le référentiel R'. La transformation de Galilée,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

va nous permettre d'exhiber une relation simple entre $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ et $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{V}t) \\ \vec{v}' &= \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}}$$

ou

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Avec des mots, cette dernière relation est parfois résumée ainsi : la *vitesse absolue* $\vec{v}$ d'une particule est la somme vectorielle d'une *vitesse relative* $\vec{v}'$ et d'une *vitesse d'entraînement* $\vec{V}$. On appelle cette relation la *loi classique de composition des vitesses*.

Pensez à l'exemple d'une personne qui se trouve immobile sur le toit d'un train allant à la vitesse $\vec{V}$ par rapport au sol (le sol est alors un référentiel « absolu »). Imaginez ensuite que cette personne immobile par rapport au train (la personne constitue alors un référentiel « relatif » par rapport à celui du sol) lance une balle ayant la vitesse $\vec{v}'$ par rapport au lanceur. Alors la vitesse de la balle par rapport au sol est donnée par la relation $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$.

Notons que la relativité restreinte nous amènera à une version différente de la composition des vitesses. En particulier, si les axes des repères sont parallèles deux à deux, et que le mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre se fait selon la direction d'un des axes (on choisit bien les axes pour qu'il en soit ainsi), alors on peut écrire simplement (la relation vectorielle devient une relation algébrique),

$$v = v' + V$$

Dans le cadre relativiste on obtiendra plutôt,

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}$$

On constate tout de suite que cette formule rend la vitesse de la lumière dans le vide indépassable, ce qui est conforme aux expériences : si $v' = c$ alors $v = c$ (si au lieu de lancer une balle, la personne qui se trouve sur le train allume une lampe torche, alors les photons se déplacent à la vitesse de la lumière, aussi bien par rapport au train, que par rapport au sol), alors que la mécanique classique donnerait une vitesse des photons plus importante $v = c + V$, résultat qui s'avère contraire à l'expérience.

Quant aux accélérations mesurées dans les deux référentiels, elles sont identiques car $\vec{V}$ est un vecteur indépendant du temps (constant) par hypothèse :

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} \stackrel{(t'=t)}{=} \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{V}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a}}$$

Donc, dans deux référentiels inertiels les accélérations sont identiques (mais la relativité nous amènera à une relation bien plus compliquée...). La notion de force d'inertie apparaît alors naturellement :

Autrement dit, si de deux référentiels l'un n'est pas inertiel (i.e. accéléré) alors il faut s'attendre à ce que la relation $\vec{a}' = \vec{a}$ soit mise en défaut : $\vec{a}' \neq \vec{a}$. Plus précisément et par exemple, supposons R' accéléré par rapport à R avec l'accélération constante $\vec{a}_I$. L'origine O' de R' a dans R le vecteur position :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OO'} = \vec{r}(0) + \vec{V}(0)t + \frac{1}{2}\vec{a}_I t^2$$

Si l'on suppose qu'à $t=0$ les deux origines coïncident, on peut même écrire plus simplement pour la position de O' dans R : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OO'} = \vec{V}(0)t + \frac{1}{2}\vec{a}_I t^2$. Pour un point M quelconque de l'espace on a donc ($\vec{r}(t)$ est la position de M dans R , $\vec{r}'(t)$ sa position dans R'),

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{V}(0)t + \frac{1}{2}\vec{a}_I t^2$$

Une première dérivation par rapport au temps ($t = t'$) donne alors,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{V}(0)t + \frac{1}{2}\vec{a}_I t^2 \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{V}(0) + \vec{a}_I t$$

Une deuxième dérivation donne enfin :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{V}(0) + \vec{a}_I t \rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} + \vec{a}_I$$

ou encore,

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_I$$

$\vec{a}_I$ étant un terme vectoriel additionnel dont l'origine est reliée à la nature non inertielle de l'un des deux référentiels. Le terme $\vec{a}_I$ conduit directement à la notion de force d'inertie $-m\vec{a}_I$, car une force s'obtient par produit d'une accélération par une masse ($m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_I$), comme nous le reverrons plus loin (section 7.5). Il faut voir les forces d'inertie comme un moyen de rendre valable le principe fondamental de la dynamique dans des référentiels qui ne sont pas galiléens (ici R'), ce qui ne peut se faire qu'au prix de l'introduction de forces nouvelles, initialement absentes dans le problème.

6.4. Notion de principe d'équivalence

Soit une particule de masse m subissant une force constante $\vec{F} \neq \vec{0}$ dans un référentiel galiléen R . On se propose de montrer qu'il existe un référentiel R' *convenablement accéléré* par rapport à R tel que i) dans R' la particule effectue un mouvement identique à celui qu'elle réalise dans R avec ii) $\vec{F} = \vec{0}$. On verra ensuite comment se décline ce résultat dans le cas de la force gravitationnelle.

Supposons R' accéléré par rapport à R avec l'accélération uniforme $\vec{a}_I$. Nous avons vu précédemment qu'il existe alors la relation suivante entre $\vec{a}$, l'accélération de la particule vue de R , et $\vec{a}'$, l'accélération de la particule vue de R' :

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_I$$

Multiplions la précédente égalité de chaque côté par la masse m :

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_I$$

Or, dans R qui est inertiel, on a la deuxième loi de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Donc,

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_I$$

Jusqu'ici, rien de nouveau : on constate juste que pour pouvoir interpréter $m\vec{a}'$ comme une somme de forces dans R' (autrement dit, faire comme si le principe fondamental de la dynamique était valide dans un référentiel non galiléen, ce qui constitue de prime abord une sorte de sacrilège) il convient de prendre en compte i) la vraie force du problème initial $\vec{F}$ mais aussi ii) une force d'inertie $\vec{F}_I = -m\vec{a}_I$. L'ajout d'une force d'inertie est donc le prix à payer pour pouvoir appliquer la deuxième loi de Newton dans un référentiel non galiléen.

A présent tâchons de répondre à la question proprement dite : peut-on trouver un référentiel R' convenablement accéléré par rapport à R dans lequel la particule effectue le même mouvement que dans R mais avec $\vec{F} = \vec{0}$? La réponse est oui. Il suffit de poser $\vec{F} = \vec{0}$ dans $m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_I$:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_I \xrightarrow{\vec{F}=\vec{0}} m\vec{a}' = -m\vec{a}_I \rightarrow \vec{a}' = -\vec{a}_I$$

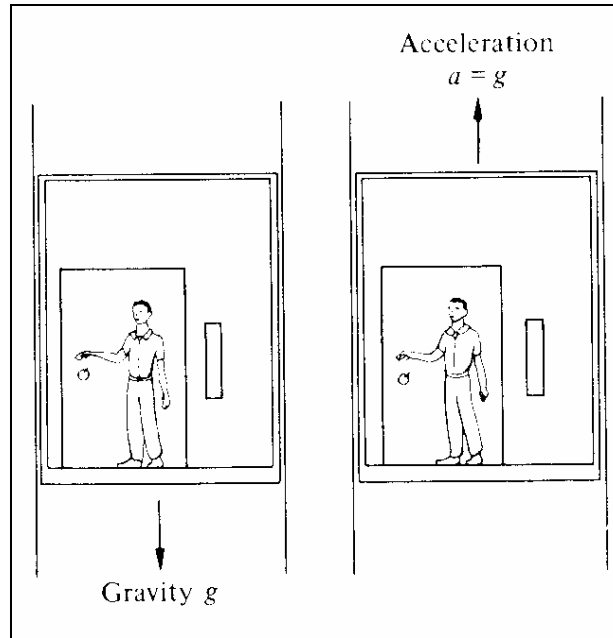
De plus pour garantir que le mouvement de la particule dans R' sans force soit le même que le mouvement dans R avec une force il faut imposer $\vec{a}' = \vec{a}$.

Finalement, on trouve aisément l'accélération $\vec{a}_I$ que doit subir R' par rapport à R :

$$\vec{a}_I = -\vec{a}$$

Dans le cas de la force gravitationnelle dans un champ $\vec{g}$, on a plus particulièrement $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \rightarrow \vec{g} = \vec{a}$. Finalement, il suffit de prendre $\vec{a}_I = -\vec{g}$.

Qu'est-ce que cela signifie ? Quelque chose d'assez intéressant et qui constitue le fondement de la théorie de la relativité générale : remplacer la notion de force⁶ gravitationnelle par celle de particule libre (i.e. soumise à aucune force) dans un référentiel correctement accéléré. D'un point de vue pratico-pratique la relation $\vec{a}_l = -\vec{g}$ signifie qu'il est équivalent de faire une chute sous l'action de la force de gravité dans un certain référentiel galiléen, et de ne subir aucune force dans un ascenseur qui serait accéléré vers le haut avec la même intensité que le champ de gravité local $\vec{g}$ dans R (pour un observateur lié à l'ascenseur, un objet semble en effet subir une force vers le bas). Cette approche est communément appelée *principe d'équivalence*.



Certains auteurs parlent du principe d'équivalence comme d'une identité entre la masse grave (responsable de l'interaction gravitationnelle) et la masse inertielle (qui s'oppose au mouvement en vertu de la deuxième loi de Newton : $\vec{a} = \vec{F} / m$), ce qui ferait remonter l'origine de ce principe à Galilée lui-même. En effet, remarquons que nous avons réalisé la simplification suivante dans ce qui précède :

$$m\vec{g} = m\vec{a} \rightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

la simplification par m qui y apparaît suppose implicitement que c'est la même masse qui permet de passer du champ gravitationnel $\vec{g}$ au poids $m\vec{g}$, ou du poids $m\vec{g}$ à l'accélération subie $\vec{a}$. En toute rigueur on aurait dû écrire :

$$m_{\text{grave}}\vec{g} = m_{\text{inertielle}}\vec{a} \rightarrow \vec{g} = \frac{m_{\text{inertielle}}}{m_{\text{grave}}}\vec{a}$$

⁶ Il est avantageux de se passer de forces pour s'affranchir de difficultés inhérentes notamment au principe de l'action et de la réaction gravitationnelle qui, dans le contexte classique, revient à concevoir la propagation d'une information gravitationnelle avec une vitesse infinie !

En pratique, les expériences d'Éötvös⁷ (vers 1890) suggèrent qu'il y a bien identité entre ces deux notions de masse, et ce avec une précision relative de 10^{-11} . Galilée avait lui-même constaté expérimentalement que des corps de différentes masses chutaient de manière identique, ce qui mathématiquement se traduit bien par la simplification $m\vec{g} = m\vec{a} \rightarrow \vec{g} = \vec{a}$.

7. Les trois lois du mouvement de Newton - Dynamique du point - Généralités

Les trois lois de Newton ont été énoncées en 1687 dans son ouvrage « Principes mathématiques de la philosophie naturelle » (*Philosophiae naturalis principia mathematica*).

7.1. Notions de masse et de poids

La masse d'un corps est une notion théorique correspondant à l'idée intuitive et floue de « quantité de matière » contenue dans le corps.

Elle se manifeste d'abord par la force de gravitation qui s'exerce universellement entre les corps massifs. Cette « masse pesante » ou « masse grave » est directement liée au poids d'un corps et mesure l'action de la pesanteur sur celui-ci. Le poids de deux corps de mêmes masses, sous l'influence de forces gravitationnelles différentes, est différent.

La masse, par ailleurs, caractérise la résistance d'un corps à la modification de son mouvement : c'est le coefficient d'inertie, ou « masse inertielle », du corps.

Dans ces deux acceptions, la masse est additive (plus de matière $\Rightarrow$ plus de masse) selon la mécanique classique.

La *masse* s'exprime en kilogrammes (kg) dans le système international (SI).

7.2. Principe d'inertie et référentiel d'inertie (1^{ère} loi)

Première loi de Newton : Un corps abandonné à lui-même et sur lequel n'agit aucune force extérieure se déplace selon un mouvement rectiligne et uniforme (c'est-à-dire, soit un mouvement à vitesse vectorielle constante, soit l'immobilité permanente).

Ce corps constitue alors un *référentiel d'inertie*, un *référentiel inertielle* ou encore un *référentiel galiléen*.

⁷ Prononcez « heut-veuch ».

Tout corps animé d'un mouvement rectiligne et uniforme relativement à un référentiel d'inertie constitue un deuxième référentiel d'inertie (si vous ajoutez deux vitesses vectorielles constantes, le résultat est encore une vitesse vectorielle constante).

7.3. Notion de force - Principe fondamental de la dynamique (2^{ème} loi)

Si une force $\vec{F}$ agit sur un corps, il est accéléré, déformé ou bien change de direction. Tous ces effets peuvent aussi se produire en même temps.

Expérimentalement, on peut s'assurer que *dans un référentiel d'inertie* (il faut donc bien s'assurer que l'on travaille dans un référentiel d'inertie avant d'appliquer cette loi aveuglément) l'accélération $\vec{a}$ est toujours proportionnelle à $\vec{F}$ (*Principe fondamental de la dynamique - PFD - ou seconde loi de Newton*), la constante de proportionnalité étant simplement la masse inerte m :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

On écrit parfois l'accélération avec le vecteur $\vec{\gamma}$, d'où :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}}$$

Il faut comprendre la précédente relation comme étant une relation vectorielle, la masse inerte étant un pur scalaire. Plus la masse est importante plus l'accélération subie par le corps ou la particule sera petite pour une même force appliquée: la masse s'oppose donc au mouvement (d'où le qualificatif *inerte*). La force s'exprime en newtons (N). En relativité restreinte, on peut montrer qu'hélas cette loi n'est pas vraie : en général la force exercée sur un corps n'est pas colinéaire avec l'accélération subie ! Néanmoins, tant que les vitesses en jeu sont petites devant c la 2^{ème} loi de Newton est très précise pour les applications courantes.

L'arithmétique des forces s'effectue en employant les règles habituelles du calcul vectoriel.

Le principe d'inertie (1^{ère} loi) apparaît immédiatement comme un cas particulier du principe fondamental de la dynamique :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{0}}{m} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}}}$$

7.4. Dynamique du mouvement circulaire

Un corps en rotation (même uniforme) subit une accélération normale (centripète) car sa vitesse change constamment de direction : on parle d'*accélération centripète* ou *normale*.

L'accélération centripète est dans le plan de la trajectoire circulaire et dirigée vers le centre du cercle. On a vu plus haut que sa norme est v^2 / r .

En vertu du PFD, le corps en rotation subit donc une *force centripète* (on dit souvent *force centrale*). Cette force est un vecteur orienté vers l'intérieur de la trajectoire. Dans le cas des mouvements des planètes autour du Soleil, cette force centripète est tout simplement la force d'interaction gravitationnelle. Une accélération tangentielle peut, de plus, être présente si la vitesse linéaire de révolution n'est pas constante.

7.5. Dynamique du point dans un référentiel non inertiel; exemples de forces d'inertie simples

Dans un référentiel non inertiel, on ne peut appliquer le PFD car celui-ci n'est valable, justement, que dans les référentiels d'inertie.

Cette situation est très courante, puisqu'on peut très facilement avoir un corps qui ne constituerait pas un référentiel d'inertie. Pour cela, il suffit que ce corps soit *accélééré* (ainsi son mouvement n'est plus rectiligne et/ou uniforme).

L'exemple le plus simple est celui d'un camion subissant une accélération non nulle $\vec{a}$ par rapport à un référentiel inertiel (par exemple le sol). On peut aussi songer à un corps en mouvement circulaire : dans la mesure où ce corps subit une accélération centripète, il est donc trivialement accélééré et ne constitue donc pas un référentiel d'inertie.

Bien évidemment, le (la) physicien(ne) n'aime pas devoir abandonner un outil aussi puissant que le PFD tout simplement parce que le référentiel d'étude n'est pas inertiel. Il s'avère que l'on peut tout de même continuer à employer le PFD pourvu que... *aux forces normalement présentes dans le problème, on prenne la peine d'ajouter des forces additionnelles dites fictives (bien que parfaitement réelles ! La terminologie est malheureuse) mais que l'on appellera plutôt forces d'inertie.*

Considérons, par exemple, deux référentiels, S et S', le premier étant inertiel, le deuxième étant non inertiel. Soit un corps de masse m , *supposé immobile*⁸ dans S' et subissant une somme de forces appliquées $\sum_j \vec{F}_j$. Voyons dans les deux exemples qui suivent comment cette situation peut se décliner.

Exemple 1: *La statique dans un référentiel non inertiel (ou « principe de D'Alembert »).*

Dans S on peut écrire le PFD puisque ce référentiel est inertiel. Cette somme de forces donne donc naissance à une accélération $\vec{a}$ dans S :

⁸ Nous verrons plus tard comment régler le cas d'un point mobile dans S'...

$$\sum_j \vec{F}_j = m\vec{a}$$

Dans le référentiel S' , tout ce que l'on peut dire c'est que le corps est immobile (par hypothèse). Ainsi son accélération $\vec{a}'$, mesurée dans S' , doit être nulle. Pour que le PFD exprimé dans S puisse représenter l'immobilité du corps dans S' on peut remarquer que :

$$\sum_j \vec{F}_j = m\vec{a} \Rightarrow \sum_j \vec{F}_j - m\vec{a} = \vec{0}$$

On peut donc identifier le vecteur nul au produit de la masse par l'accélération mesurée dans S' :

$$m\vec{a}' = \vec{0}$$

Donc,

$$\sum_j \vec{F}_j - m\vec{a} = m\vec{a}'$$

Ainsi, dans le référentiel S' , nous obtenons une relation fort semblable à celle du PFD dans un référentiel d'inertie, si ce n'est qu'aux forces du problème initial il faut ajouter une force additionnelle (la fameuse force d'inertie) d'expression $-m\vec{a}$. Cette approche de la statique dans un référentiel non galiléen est appelée principe de D'Alembert. Le terme $-m\vec{a}$ est souvent appelé *force de D'Alembert*.

Exemple 2: La force centrifuge comme conséquence du principe de D'Alembert dans un référentiel tournant.

Un corps de masse m en rotation uniforme subit une accélération centripète $\vec{a}$ (purement radiale et dirigée vers l'intérieur de la trajectoire circulaire) et donc ne constitue pas un référentiel d'inertie. Dans le référentiel de ce corps, une expression du PFD peut s'écrire si on ajoute une force $-m\vec{a}$ aux forces initialement définies dans le problème. Puisque ici $\vec{a}$ est dirigée vers le centre, alors $-m\vec{a}$ est dirigée vers l'extérieur de la trajectoire : il s'agit de la fameuse *force centrifuge* qui est l'opposée de l'accélération centripète multipliée par la masse du corps ! Dans le référentiel tournant du corps en rotation, les forces sont compensées par la nouvelle force centrifuge et c'est ce qui explique l'immobilité du corps telle que constatée dans S' . Cet exemple peut s'appliquer directement au cas d'une planète en mouvement circulaire et uniforme autour d'une étoile : la planète, dans son référentiel, est en équilibre en raison de l'annulation de la force centripète (accélération centripète multipliée par la masse du corps) par la nouvelle force d'inertie centrifuge.

7.6. Principe de l'action et de la réaction (3^{ème} loi)

En mécanique classique, une force est toujours exercée par un corps sur un autre : la notion de force due à un seul corps n'a pas de sens. Voici l'énoncé de la 3^{ème} loi de Newton :

Si l'on note $\vec{F}_{AB}$ la force exercée par un corps B sur un corps A alors $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

En d'autres termes, la force exercée sur A par B est égale en module et opposée en direction à la force exercée sur B par A.

La troisième loi suppose que la force s'exerce d'un objet sur l'autre de façon instantanée (action à distance) et joue un rôle central dans la conservation de la quantité de mouvement d'un système de particules (comme nous le verrons un peu plus loin). Cependant, dans la théorie de la relativité, on ne peut accepter l'idée d'une action à distance instantanée et il faut abandonner la troisième loi dans sa forme classique. En fait on peut facilement trouver des exemples, dans le cadre relativiste, pour lesquels la 3^{ème} loi est purement et simplement fausse ! On suppose alors que les forces sont transmises par l'intermédiaire de champs (champs électrique, magnétique, gravitationnel, etc.) et que l'influence se propage à la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant, la quantité de mouvement y est toujours conservée, car il faut alors tenir compte de la quantité de mouvement contenue dans le champ lui-même. Ainsi, une onde électromagnétique, qui n'est qu'une oscillation des champs électrique et magnétique, peut transporter de la quantité de mouvement, de l'énergie, du moment cinétique, etc.

8. Interactions fondamentales

Actuellement, il y a quatre types connus d'interactions (= forces) fondamentales ou, si l'on préfère (autre manière de voir qui s'avère plus féconde), quatre contributions essentielles à l'énergie pour des systèmes quelconques de particules. Ce sont, respectivement, les *interactions gravitationnelles, électromagnétiques, fortes et faibles*.

8.1. Interactions gravitationnelles

Les interactions gravitationnelles sont, de loin, celles qui donnent lieu aux forces les moins intenses. Elles sont en général données par le potentiel d'interaction de Newton que nous étudierons plus loin, dans les cas très fréquents où il n'est pas nécessaire de faire entrer en ligne de compte la relativité générale (qui est une théorie géométrique de la gravitation).

L'interaction gravitationnelle fait que tous les objets sur la surface de la Terre restent liés à la planète. Bien que la force gravitationnelle soit la plus faible des 4 interactions, elle est la moins sélective car elle agit sur toutes les particules (même les photons et toutes les autres particules de masse nulle). Étant de portée illimitée et seulement attractive, la gravité gouverne le cosmos à grande échelle, elle maintient la Terre sur son orbite autour du Soleil, maintient le Soleil à l'intérieur de la Galaxie qui contient environ cent milliards d'étoiles et son action s'étend sur quelques cent milliards de galaxies qui constituent l'Univers tel qu'on le conçoit. Si elle était beaucoup plus intense, elle aurait empêché l'expansion de l'Univers et provoqué son anéantissement en faisant s'effondrer les galaxies les unes sur les autres.

8.2. Interactions électromagnétiques

Les interactions électromagnétiques sont, avec les précédentes, les mieux connues.

L'interaction électromagnétique est la force de liaison des objets plus petits tels que les atomes, les molécules mais aussi les plantes et nous-mêmes. Comme pour la force gravitationnelle, les conséquences de la force électromagnétique se manifestent dans le monde macroscopique. Elle agit à l'échelle microscopique et produit des effets macroscopiques. Elle engendre par exemple les forces de frottement, produit l'étirement, l'adhérence et la cohésion. Sa portée est elle aussi illimitée mais elle peut être soit attractive soit répulsive. Elle est beaucoup plus intense que l'interaction gravitationnelle.

La forme que prend l'énergie d'interaction pour un système quelconque de particules chargées et de photons, a été précisée. La branche correspondante de la physique est *l'électrodynamique quantique*⁹ ; voici quelques-uns des domaines traités par cette science :

1. Existence et propriétés des antiparticules, création de paires, annihilation électron-positron.

2. Émission et absorption des photons par les atomes ou les particules.

3. Propriétés des atomes : dans ce cas particulier, l'essentiel de l'interaction électromagnétique est donné simplement par le potentiel de Coulomb entre électrons et noyaux. Comme ce potentiel, tout comme le potentiel de gravitation de Newton, est inversement proportionnel au carré de la distance entre les particules, on peut comparer directement l'intensité des forces gravitationnelles et électriques, par exemple entre un électron et un proton : les premières sont 10^{-39} fois moins fortes que les secondes. Le fait que, dans les situations courantes, la pesanteur semble dominer les phénomènes ordinaires tient à une compensation très fine des forces électriques, qui est due à la neutralité globale de la matière : la charge électrique de l'électron étant exactement opposée à celle du proton, la matière est, dans l'ensemble, électriquement neutre.

4. À l'échelle macroscopique, l'électrodynamique quantique admet comme cas limite l'électrodynamique classique telle qu'elle est formulée dans les équations de Maxwell et ses reformulations dite *covariante* (en relativité restreinte) ou en termes de *formes différentielles extérieures*.

8.3. Interactions faibles

L'interaction faible (force faible) est environ un million de fois plus faible que la force nucléaire forte et de portée environ cent fois plus courte, bien qu'elle soit 10^{32} fois plus forte que l'interaction gravitationnelle. Elle est par exemple responsable de la désintégration radioactive β en changeant un nucléon en un autre. Une étoile comme le Soleil tire son énergie d'un four thermonucléaire interne. Il brûle l'hydrogène, le transformant en hélium, un processus dû à la transformation graduelle des protons par interaction faible.

⁹ Dans votre cursus vous aurez d'abord à faire de l'électrodynamique classique, cf. le cours PHQ 421.

Les interactions faibles sont responsables d'un grand nombre de désintégrations de particules comme, par exemple, la désintégration β des noyaux. Une de leurs caractéristiques les plus remarquables consiste en leur violation de certaines propriétés de symétrie, comme celle de la parité (grandeur physique conservée lors des processus dont les lois sont invariantes par réflexion spatiale, ou $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$), et, plus faiblement, celle de l'invariance par renversement de signe du temps.

Leur structure a été explicitée et l'on a pu montrer qu'elles constituent avec les interactions électromagnétiques deux manifestations d'une seule et même interaction ; un pas considérable a ainsi été accompli vers ce qu'il est convenu d'appeler une théorie unitaire. La découverte en 1983 de deux particules de masse élevée, les bosons intermédiaires W et Z, qui constituent avec le photon les vecteurs de cette interaction unifiée, est venue couronner l'ensemble des confirmations expérimentales de cette théorie des interactions dites électro-faibles.

8.4. Interactions fortes

Les interactions fortes sont, de loin, les plus intenses : 10^{38} fois plus forte que la force gravitationnelle, 100 fois plus forte que l'interaction électromagnétique.

L'exemple typique en est donné par les forces nucléaires qui lient les protons et les neutrons dans le noyau. Bien que ces forces soient très grandes à courte distance, elles décroissent très rapidement (exponentiellement) avec la distance entre les particules. Au-delà de quelques fermis (10^{-15} m), elles sont devenues totalement négligeables, et ne jouent déjà plus aucun rôle à l'échelle de l'atome.

On sait à présent que les particules capables de subir des interactions fortes, comme le proton, le neutron, le méson π , sont en réalité composées d'entités plus élémentaires, les *quarks*. De nombreuses indications expérimentales amènent à penser que les interactions fortes ont une structure mathématique analogue à celle des interactions électro-faibles : elles sont invariantes en chaque point de l'espace-temps par rapport à un groupe, ce qui leur donne un caractère de théorie dite de jauge que l'on retrouve également d'ailleurs dans la relativité générale. Cela laisse augurer à terme une unification de tous les types d'interactions. De plus, elles sont portées par des bosons intermédiaires auxquels on a donné le nom de gluons et qui jouent dans leur cadre le même rôle que les photons dans l'interaction électromagnétique. Ces progrès majeurs remontent essentiellement aux années 1970.

9. Loi de la gravitation universelle

9.1. Introduction

Entre deux objets ponctuels M_1 et M_2 de masses respectives m et M , distants de r , il existe une force d'attraction gravitationnelle de grandeur :

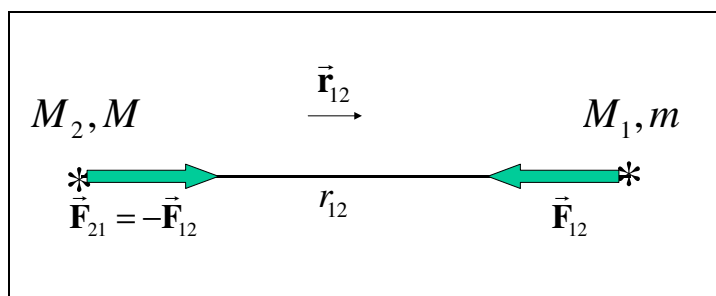
$$F_g = \frac{GmM}{r^2},$$

où $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI est la constante de la gravitation universelle (aussi appelée constante de Cavendish¹⁰ dans certains ouvrages).

Plus précisément, la force exercée par le corps 2 sur le corps 1, $\vec{F}_{12}$, peut s'écrire :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GmM}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

avec r_{12} la distance entre les deux corps, et $\vec{r}_{12}$ un vecteur unité dirigé du corps 2 vers le corps 1. Quant à elle, la force exercée par le corps 1 sur le corps 2, $\vec{F}_{21}$, s'obtient en vertu du principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Voir figure ci-dessous.



On peut alors préciser ce que l'on appelle le *poids* d'un objet : le poids est la force gravitationnelle qui agit sur un corps. Entre deux corps de masses m et M , distants de r , il existe une force d'attraction de grandeur :

$$F_g = \frac{GmM}{r^2} = m \times \frac{GM}{r^2} = mg$$

où l'on a noté g la norme de l'accélération gravitationnelle due au corps de masse M ,

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Dans la future section sur le problème de Kepler nous verrons comment Newton a abouti à la loi de la gravitation universelle.

¹⁰ Henry Cavendish (Nice 1731 - Londres 1810). Physicien et chimiste britannique. Il détermina, à l'aide de la balance de torsion, la densité moyenne de la Terre, fut l'un des créateurs de l'électrostatique, isolait l'hydrogène et réalisa la synthèse de l'eau.

9.2. Accélération de la gravitation à la surface d'un astre

Un astre sphérique de masse M et de rayon R est à l'origine d'une accélération gravitationnelle de grandeur (relation valable à la surface de l'astre):

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

9.3. Troisième loi de Kepler dans le cas particulier du mouvement circulaire¹¹

Autour d'un corps sphérique de masse M , nous avons la relation suivante entre la période orbitale T et le rayon de l'orbite *circulaire* r d'un satellite de masse m très petite devant M (G est la constante de la gravitation universelle),

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

En effet, la vitesse orbitale, nécessairement uniforme dans le cas d'un tel mouvement circulaire, vaut :

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

et sachant que l'on a égalité de la force centrifuge (de grandeur mv^2/r) avec la force gravitationnelle centripète (de grandeur GmM/r^2) :

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$$

Finalement on a bien:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

On a aussi,

¹¹ Nous traiterons le cas général de la 3^{ème} loi de Kepler pour le mouvement conique (i.e. elliptique, parabolique ou hyperbolique) dans une future section.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

qui provient directement de,

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$$

10. Forces électromagnétiques

Elles interviennent lorsque les particules sont chargées et sont alors bien plus importantes que les forces gravitationnelles ($\sim 10^{39}$ fois plus grandes pour un proton et un électron). On distingue les forces électriques, ou coulombiennes, des forces magnétiques qui s'ajoutent aux forces électriques lorsque les particules sont en mouvement relatif.

Ces forces seront étudiées avec beaucoup de détails dans les cours d'électromagnétisme (notamment la relation avec la relativité restreinte).

10.1. Force électrique de Coulomb

L'expression de la force électrique ressemble beaucoup à celle de la force gravitationnelle, mais la force peut-être attractive ou répulsive, suivant le signe des charges q_1, q_2 . La force subie par la charge 1 vaut :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

Cette expression est valable dans le vide, q_1 et q_2 , sont les charges exprimées en coulombs (C) et ϵ_0 (permittivité électrique du vide) est une constante qui est reliée par la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ à la perméabilité magnétique du vide μ_0 ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ S.I.}$) et à la vitesse c de la lumière ($c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$), ce qui donne $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ (S.I.)}$. Autre valeur utile: $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9 \text{ F/m}$ (farads par mètre ou Nm^2/C^2).

Comme nous l'avons vu pour la force gravitationnelle, il est souvent commode de définir un champ électrique $\vec{E}$ par analogie avec le champ gravitationnel. En considérant l'action de q_2 sur q_1 :

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E} \quad \text{avec,}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

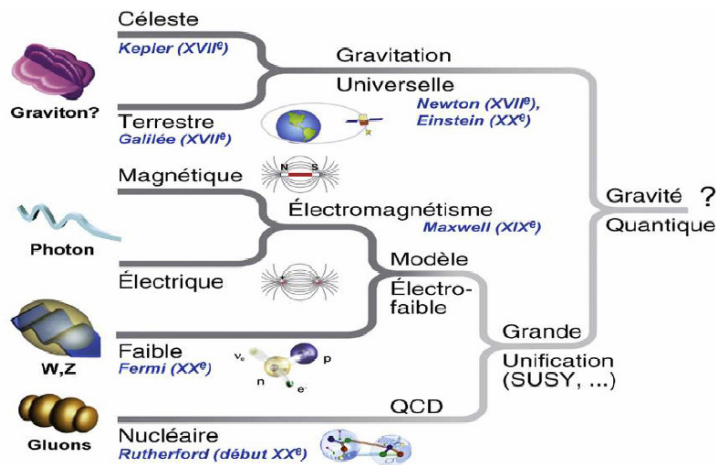
10.2. Force magnétique et force de Lorentz

Lorsque les particules sont en mouvement, une force dite magnétique s'ajoute à la force électrique. Elle se déduit totalement de la force électrique par application de transformations relativistes (comme vous le verrez dans votre cours d'électrodynamique classique) et s'écrit pour q_2 :

$$\vec{F} = q_2 \vec{v} \times \vec{B}$$

où $\vec{B}$ est le champ magnétique exprimé en teslas (T) et $\vec{v}$ la vitesse de la charge. La force magnétique est donc en permanence perpendiculaire à la vitesse de la charge. La force magnétique a généralement une intensité beaucoup plus faible que la force électrique (si on considère seulement deux charges électriques en interaction mutuelle). Quand on combine la force électrique avec la force magnétique, on obtient la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$.

11. Unification des forces fondamentales



L'ambition des scientifiques a toujours été de décrire des phénomènes variés comme des manifestations diverses de processus fondamentaux en nombre restreint. En physique, cette démarche a été couronnée de spectaculaires succès ; la reconnaissance du fait qu'un petit nombre d'interactions fondamentales – l'électromagnétisme, les interactions nucléaires faible et forte, la gravitation – sont à l'origine de tous les mouvements des corps matériels, mais aussi de leurs liaisons et de leur

évolution, est un des plus solides acquis de la science classique. Les révolutions conceptuelles du début du XX^e siècle n'ont pas nié cet acquis ; au contraire, elles ont étendu l'ambition unificatrice aux objets mêmes des théories physiques – l'espace et le temps, les particules et les ondes – et ont inventé un contenu dynamique à la diversification des forces. Si la mise à l'épreuve expérimentale de ces théories n'est pas près d'être achevée, les indications issues de la physique des particules élémentaires plaident de façon convaincante en faveur de la pertinence de cette démarche.

11.1. L'unification newtonienne

C'est vers 1680 qu'Isaac Newton affirma que la pesanteur et le mouvement des planètes étaient deux manifestations d'une unique force. Cette unification de la gravité *terrestre* et de la gravité *céleste* dépasse la simple reconnaissance que les lois de la physique s'appliquent aussi

bien au monde sub-lunaire qu'au reste de l'Univers, comme Galilée l'avait suggéré en expliquant la formation des ombres sur la Lune. La reconnaissance de l'attraction universelle des corps massifs et sa description en termes mathématiques par une équation, mettant en jeu la constante de gravitation G , ouvrait la voie à la physique moderne.

Un siècle plus tard, la mécanique analytique de Lagrange réécrivait la dynamique newtonienne en s'appuyant sur la notion de potentiel gravitationnel et sur le principe de moindre action (« le chemin que tient la lumière est celui pour lequel la quantité d'action est moindre ») que Pierre Louis Moreau de Maupertuis avait formulé dès 1744 en généralisant une description de l'optique due à Fermat. Le cadre mathématique était alors fixé qui allait permettre aux physiciens du XIX^e siècle d'expliquer les multiples phénomènes liés à la propagation et aux propriétés variées des corps chargés et des rayonnements.

11.2. L'unification électromagnétique

Découvrir que la foudre, l'orientation des boussoles et les lois de l'optique procèdent d'une même force fondamentale nécessitait qu'un nombre considérable d'expériences, effectuées avec des moyens techniques de plus en plus perfectionnés, dégagent les lois auxquelles ces phénomènes obéissent. Dès la fin du XVIII^e siècle, les expériences de Benjamin Franklin, de Henry Cavendish et de Charles de Coulomb montraient l'existence d'une force électrostatique variant avec la distance, à l'instar de la force de Newton. Les physiciens du XIX^e siècle furent nombreux à conjuguer leurs efforts, mais c'est à Michael Faraday, André Marie Ampère et James Clerk Maxwell que l'on attribue généralement la réalisation de cet ambitieux programme unificateur. Faraday, en particulier, expérimentateur de génie, découvrit en 1831 l'induction, c'est-à-dire l'apparition d'un champ électrique au voisinage d'un champ magnétique variable, et proposa de décrire l'action de l'électricité en termes d'influence plutôt que de mouvement ; le concept de *champ*, qui reprend cette intuition, allait se révéler extrêmement fécond.

Maxwell généralisa et formalisa ces résultats en leur donnant en 1872 une forme quasi définitive. Désormais, les phénomènes électriques et magnétiques se comprenaient tous comme la propagation d'ondes se déplaçant à une vitesse dont la mesure révélait qu'elle était si proche de celle de la lumière que Maxwell en inféra que les phénomènes lumineux n'étaient rien d'autre que des oscillations d'un champ électromagnétique. Les équations de Maxwell réalisaient l'unification de tous les phénomènes non gravitationnels connus. La découverte des ondes radio en 1888 par Heinrich Hertz et l'invention par Édouard Branly, Nikola Tesla et Guglielmo Marconi de la T.S.F. (télégraphie sans fil) allaient consacrer la maîtrise humaine des phénomènes électromagnétiques et inaugurer leur utilisation dans le domaine de la communication à longue distance. L'unification électromagnétique se déploie aussi dans le bouleversement épistémologique apporté par la théorie de la relativité restreinte, énoncée en 1905 par Albert Einstein, et qui concerne l'unification de deux concepts clés de l'appréhension du monde physique : l'espace et le temps.

11.3. La géométrisation de l'espace

L'unification impliquée par la théorie de la relativité générale – développée par Einstein entre 1912 et 1915 – est peut-être encore plus révolutionnaire, puisqu'il s'agit d'exprimer l'interaction gravitationnelle comme une *courbure géométrique de l'espace-temps*. Au lieu du

rôle de substrat passif qu'on attribuait à l'espace lorsqu'on décrivait le mouvement des corps, Einstein propose que l'espace-temps et sa métrique deviennent les principaux acteurs d'une description cosmique. Le caractère courbe de cet espace-temps permet de décrire les trajectoires comme des *géodésiques*, ces lignes réalisant le plus court trajet entre deux points ; les effets de l'attraction gravitationnelle sont alors entièrement pris en compte par la géométrie. Le bien-fondé de cette extrême mathématisation de la physique a été confirmée par de spectaculaires succès expérimentaux : avance du périhélie des planètes, déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil, décalage des fréquences dans un champ gravitationnel, mirages gravitationnels. En sont issues une astrophysique moderne aux objets spectaculaires (pulsars, trous noirs...) et une cosmologie qui part d'un *big bang* suivi d'une étape d'expansion observée avant de retourner peut-être vers un éventuel *big crunch*. Elle ouvre naturellement la voie à une entreprise ambitieuse : expliquer toute la physique en termes de géométrie. C'est ce qu'Einstein a tenté d'accomplir jusqu'à sa mort.

11.4. L'unification quantique

La quantification de l'énergie rayonnée par les atomes, dès 1900 par Max Planck, mais surtout l'invention du photon par Einstein en 1905 et la proposition d'associer une onde à toute particule par Louis de Broglie en 1924 marquent l'unification de la physique des corps avec celle des ondes en une mécanique ondulatoire, qui allait rapidement évoluer vers la physique quantique, fondement actuel de la description microscopique de la matière. Mathématiquement, cette unification se traduit par la place centrale jouée par une *fonction d'onde*, amplitude de probabilité de présence satisfaisant à une équation de propagation calquée sur celles que la physique classique assignait aux ondes. Les spectaculaires résultats obtenus dans des expériences de diffraction d'électrons ou de neutrons, d'une part, et dans les collisions de photons sur des noyaux, d'autre part, ont amplement démontré la véracité de cette unification.

11.5. La théorie électrofaible

Les travaux visant à unifier les forces fondamentales mobilisent aujourd'hui les efforts des physiciens des particules. En 1967, le Pakistanais Abdus Salam et l'Américain Steven Weinberg avaient quasi simultanément proposé que l'électromagnétisme et l'interaction nucléaire faible soient issus d'une même interaction dite électro-faible, dont les particules médiatrices étaient un triplet de bosons massifs (notés W^+ , W^- et Z^0) et le photon. Confirmé dès 1973 par des expériences menées au C.E.R.N., à Genève (Suisse), le modèle standard électro-faible de Weinberg-Salam valut à ses auteurs (et à l'Américain Sheldon Glashow, pour l'importance de ses travaux de précurseur) le prix Nobel de physique en 1979 et constitue maintenant avec la chromodynamique quantique le modèle standard des interactions fondamentales.

Mis en service en juillet 1989, le grand collisionneur électron-positon européen (L.E.P., Large Electron Positron Collider), situé près de Genève, a accumulé pendant six ans des données dont l'analyse se poursuit ; les résultats obtenus aujourd'hui confirment avec une précision inégalée la théorie électro-faible. En 1996, la mise en place de la deuxième phase d'exploitation du L.E.P. avec un doublement de l'énergie de ses faisceaux, permet de tester une propriété spécifique de cette théorie – l'existence d'un couplage fondamental entre les trois bosons

massifs –, et d'explorer un domaine d'énergie supérieure pour y déceler les traces d'éventuelles nouvelles particules.

12. Systèmes de particules

12.1. Barycentre et centre de masse pour une distribution discrète de points

Soient $(M_1, \mu_1), (M_2, \mu_2), (M_3, \mu_3), \dots, (M_n, \mu_n)$, n points de l'espace affectés des pondérations $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$.

Soit une origine O de l'espace.

Le *barycentre* G de cet ensemble de points est par définition :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mu_1 \overrightarrow{OM_1} + \mu_2 \overrightarrow{OM_2} + \dots + \mu_n \overrightarrow{OM_n}}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}$$

Dans le cas particulier où les pondérations sont des masses ($\mu_1 = m_1, \mu_2 = m_2, \mu_3 = m_3, \dots, \mu_n = m_n$), le barycentre est appelé *centre de masse* :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

La relation vectorielle précédente est équivalente aux trois relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_G = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ Y_G = \frac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2 + \dots + m_n Y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ Z_G = \frac{m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{array} \right.$$

Dans les trois relations précédentes on note (X_G, Y_G, Z_G) les coordonnées du point G , et (X_i, Y_i, Z_i) les coordonnées du point M_i dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

12.2. Centre de masse pour une distribution continue de points

Dans ce cas, il convient d'isoler des volumes élémentaires de masse élémentaire dm dans le corps considéré. Les deux derniers encadrés précédents prennent alors la forme (chaque point M du corps a pour coordonnées (X, Y, Z) ; le corps a une masse totale $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int_{\text{corps}} \overrightarrow{OM} dm$$

ou,

$$\left\{ \begin{array}{l} X_G = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \rightarrow X_G = \frac{1}{M} \int_{\text{corps}} X dm \\ Y_G = \frac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2 + \dots + m_n Y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \rightarrow Y_G = \frac{1}{M} \int_{\text{corps}} Y dm \\ Z_G = \frac{m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \rightarrow Z_G = \frac{1}{M} \int_{\text{corps}} Z dm \end{array} \right.$$

12.3. Mouvement du centre de masse pour une distribution discrète de points

Par définition, la vitesse du centre de masse G relativement à une origine O est :

$$\vec{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

En utilisant la définition du centre de masse on peut alors montrer que :

$$\vec{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \sum_i m_i \vec{V}_i = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{M}$$

où,

$$\vec{V}_i = \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}$$

Démonstration :

$$\vec{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)$$

$$\vec{V}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} + \dots + \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \frac{d\overrightarrow{OM_n}}{dt}$$

$$\vec{V}_G = \frac{m_1}{M} \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} + \dots + \frac{m_n}{M} \frac{d\overrightarrow{OM_n}}{dt} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_n \vec{V}_n}{M}$$

$$\boxed{\vec{V}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{M}}$$

12.4. Quantité de mouvement d'un ensemble discret de points

Nous avons :

$$\boxed{\vec{V}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{M} \Leftrightarrow M \vec{V}_G = \sum_i m_i \vec{V}_i}$$

La dernière égalité signifie que la quantité de mouvement totale d'un ensemble de points ($\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i = \sum_i \vec{P}_i$) est égale à la quantité de mouvement du centre de masse affecté de la masse totale M ($M \vec{V}_G$).

12.5. Accélération du centre de masse pour une distribution discrète de points

En dérivant par rapport au temps la relation $\vec{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, on obtient l'accélération du centre de masse :

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{M} \right) = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{V}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \\ \vec{a}_G &= \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i \\ \vec{a}_G &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{M} \end{aligned}$$

car pour chaque particule i on a $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$.

$$\boxed{M\vec{a}_G = \sum_i \vec{F}_i}$$

Ainsi, le centre de masse accélère comme le ferait une particule ponctuelle de masse $M = \sum_i m_i$ qui serait soumise à la force extérieure résultante $\sum_i \vec{F}_i$ (la somme des forces subies par toutes les particules du système considérées individuellement).

12.6. Mouvement du centre de masse quand la somme des forces extérieures appliquées est nulle

Si $\sum_i \vec{F}_i$ est nulle, alors :

$$\boxed{M\vec{a}_G = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_G = \vec{cte}}$$

En d'autres termes, si $\sum_i \vec{F}_i$ est nulle, alors $\vec{V}_G$ est un vecteur constant, i.e. *le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme*. Attention, cela ne signifie pas que les points soient eux-mêmes immobiles dans le cas général !

12.7. Énergie cinétique d'un système de particules ou 1^{er} théorème de Koenig

Soient n points M_i affectés des masses m_i , (M_1, m_1) , (M_2, m_2) , (M_3, m_3) , ..., (M_n, m_n) .

L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$\boxed{E_c(\text{totale}) = \frac{1}{2} M V_{G/O}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{M_i/G}^2}$$

où $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ est la masse totale, $V_{G/O}$ la vitesse du centre de masse par rapport à l'origine O, $V_{M_i/G}$ la vitesse de la particule M_i par rapport au centre de masse G.

Cette dernière relation nous prouve que l'énergie cinétique totale du système est la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de masse affecté de toute la masse M et de la somme des énergies cinétiques de chaque point du corps affecté de la masse m_i et de la vitesse $V_{M_i/G}$ mesurée par rapport au centre de masse G (cette somme est l'énergie cinétique dite *interne* du système).

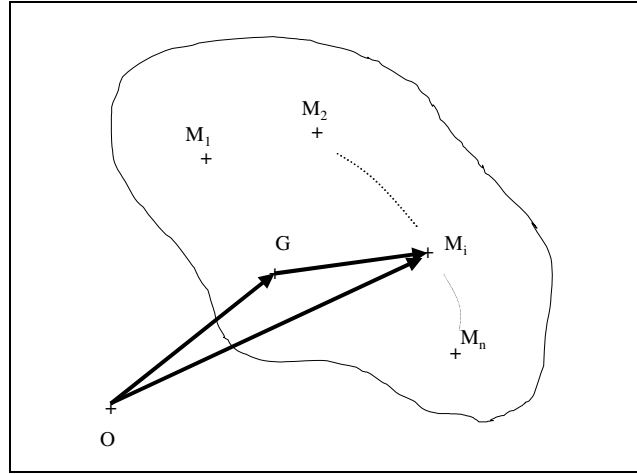
Remarque : si le système de particules est tel que les points M_i sont immobiles par rapport à G ($\forall i=1, \dots, n, V_{M_i/G} = 0$), l'énergie cinétique est simplement donnée par :

$$E_c(\text{totale}) = \frac{1}{2} M V_{G/O}^2$$

Démonstration du 1^{er} théorème de Koenig:

Posons :

$$\forall i=1, \dots, n, \quad \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}$$



En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient :

$$\vec{V}_{M_i/O} = \vec{V}_{G/O} + \vec{V}_{M_i/G}$$

Or, pour tout vecteur $\vec{A}$, nous avons $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ (car $\vec{A} \cdot \vec{A} = A \times A \times \cos 0^\circ$). Alors, nécessairement,

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M_i/O} \cdot \vec{V}_{M_i/O} &= V_{M_i/O}^2 \\ (\vec{V}_{G/O} + \vec{V}_{M_i/G}) \cdot (\vec{V}_{G/O} + \vec{V}_{M_i/G}) &= V_{M_i/O}^2 \end{aligned}$$

En distribuant l'addition vectorielle par rapport au produit scalaire on trouve :

$$\vec{V}_{G/O} \cdot \vec{V}_{G/O} + \vec{V}_{M_i/G} \cdot \vec{V}_{M_i/G} + 2\vec{V}_{G/O} \cdot \vec{V}_{M_i/G} = V_{M_i/O}^2$$

En utilisant encore une fois la propriété $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$, on obtient,

$$V_{G/O}^2 + V_{M_i/G}^2 + 2\vec{V}_{G/O} \cdot \vec{V}_{M_i/G} = V_{M_i/O}^2$$

Multiplions tous les membres de cette équation par $\frac{1}{2}m_i$:

$$\frac{1}{2}m_i V_{G/O}^2 + \frac{1}{2}m_i V_{M_i/G}^2 + \frac{1}{2}m_i 2\vec{V}_{G/O} \cdot \vec{V}_{M_i/G} = \frac{1}{2}m_i V_{M_i/O}^2$$

$$\frac{1}{2}m_i V_{G/O}^2 + \frac{1}{2}m_i V_{M_i/G}^2 + m_i \vec{V}_{G/O} \cdot \vec{V}_{M_i/G} = \frac{1}{2}m_i V_{M_i/O}^2$$

Faisons maintenant une sommation sur i :

$$\sum_i \frac{1}{2}m_i V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i V_{M_i/G}^2 + \sum_i m_i \vec{V}_{G/O} \cdot \vec{V}_{M_i/G} = \sum_i \frac{1}{2}m_i V_{M_i/O}^2$$

Pour achever notre démonstration, remarquons que,

$$\vec{V}_{G/O} = \frac{m_1}{M} \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} + \dots + \frac{m_n}{M} \frac{d\overrightarrow{OM_n}}{dt}$$

Donc (si nous nous référons à l'origine G au lieu de O),

$$\vec{V}_{G/G} = \frac{m_1}{M} \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} + \dots + \frac{m_n}{M} \frac{d\overrightarrow{GM_n}}{dt}$$

Il est alors trivial que $\vec{V}_{G/G} = \vec{0}$ (G est immobile par rapport à lui-même !), donc,

$$\vec{V}_{G/G} = \frac{m_1}{M} \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} + \dots + \frac{m_n}{M} \frac{d\overrightarrow{GM_n}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow m_1 \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} + \dots + m_n \frac{d\overrightarrow{GM_n}}{dt} = \vec{0}$$

C'est-à-dire,

$$m_1 \vec{V}_{M_1/G} + m_2 \vec{V}_{M_2/G} + \dots + m_n \vec{V}_{M_n/G} = \vec{0}$$

$$\boxed{\sum_i m_i \vec{V}_{M_i/G} = \vec{0}}$$

Donc notre résultat,

$$\sum_i \frac{1}{2}m_i V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i V_{M_i/G}^2 + \sum_i m_i \vec{V}_{G/O} \cdot \vec{V}_{M_i/G} = \sum_i \frac{1}{2}m_i V_{M_i/O}^2$$

Se simplifie enfin en :

$$\begin{aligned}
 \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/G}^2 + \vec{V}_{G/O} \cdot \left(\sum_i m_i \vec{V}_{M_i/G} \right) &= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 \\
 \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/G}^2 + \vec{V}_{G/O} \cdot \vec{0} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 \\
 \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/G}^2 + \vec{0} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 \\
 \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/G}^2 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 \\
 \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/G}^2 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 \\
 \boxed{\frac{1}{2} M V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/G}^2} &= \boxed{\sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2}
 \end{aligned}$$

Cette dernière relation nous prouve bien que l'énergie cinétique totale (calculée pour chaque particule relativement à l'origine O, cf. membre de droite de l'équation) est la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de masse affecté de la masse totale M et de la somme des énergies cinétiques de chaque point du corps affecté de la masse m_i et de la vitesse $V_{M_i/G}$ mesurée par rapport au centre de masse G.

13. Forces macroscopiques

13.1. Notion de pression

Si une force de grandeur F est appliquée perpendiculairement à une surface A , elle exerce sur celle-ci une pression P qui, par définition, vaut:

$$P = \frac{F}{A}$$

Dans le système international d'unités (SI), la pression P s'exprime en pascals (Pa) :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

L'air qui nous entoure exerce sur nous une *pression atmosphérique* voisine de 10^5 N/m^2 .

13.2. Variation de la pression avec la profondeur dans un liquide

La pression hydrostatique d'un liquide est créée par le poids du liquide sur le fond d'un récipient.

La pression augmente avec la profondeur selon la loi (démontrée plus bas):

$$P = P_0 + \rho gh,$$

avec P la pression à la profondeur h , P_0 la pression à la surface libre du liquide, ρ la masse volumique (densité) du liquide et g l'accélération gravitationnelle.

La pression d'un liquide au fond d'un récipient ne dépend pas de la forme du récipient, mais uniquement de la hauteur de liquide et de l'aire du fond.

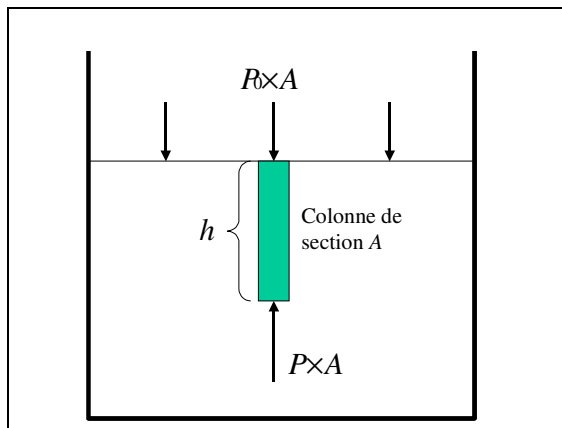
Démonstration :

Pour établir la relation $P = P_0 + \rho gh$, il suffit d'établir le poids d'une colonne de liquide et de l'égaliser à la force issue d'une différence de pression.

Si la pression à la surface vaut P_0 , la force exercée sur la section supérieure A (à la surface) vaut $P_0 \times A$. Identiquement, la force exercée à la base de la colonne de liquide vaut $P \times A$. La force associée à la différence de pression vaut exactement le poids du volume de liquide (m est la masse totale de la colonne de liquide envisagée):

$$P \times A - P_0 \times A = mg = (\rho Ah)g$$

$$P - P_0 = \rho gh$$



La relation $P - P_0 = \rho gh$ peut aussi s'écrire de manière différentielle,

$$\frac{dP}{dh} = \rho g$$

13.3. Principe de Pascal

Si un liquide se trouve dans les branches d'un tube en U, les deux niveaux de liquide se trouvent à la même hauteur, même lorsque les sections transversales sont différentes. Alors (si les deux niveaux sont identiques c'est parce que la pression est la même aux extrémités des deux branches) :

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

13.4. Principe d'Archimède

Si un corps plonge dans un liquide, la poussée d'Archimède est une force verticale égale et opposée au poids du volume déplacé :

$$F_{\text{Archi}} = \rho V g$$

avec ρ la masse volumique du liquide, V le volume du liquide déplacé et g l'accélération gravitationnelle.

Pour savoir si un corps flotte ou coule dans un fluide, il faut comparer son poids à sa poussée d'Archimède.

Remarques : la poussée d'Archimède s'applique au centre de gravité du *volume déplacé*. Le poids s'applique quant à lui au centre de gravité du *corps au complet*. En général (par exemple pour un bateau qui flotte correctement) la non coïncidence des deux centres de gravité implique des mouvements oscillants du type *tangage* ou *roulis* lorsqu'on se trouve hors de l'équilibre.

13.5. Estimation (grossière) de la pression atmosphérique

Le globe terrestre est entouré d'une atmosphère constituée d'un mélange gazeux nommé air, qui s'étend de la surface du sol jusqu'à une altitude d'environ 150 kilomètres.

La pression de l'air au niveau de la mer a longtemps servi d'unité de pression (1 atmosphère ; 1 atm) ; elle décroît si l'on s'élève et, vers 130 kilomètres, le vide est comparable à celui que l'on peut obtenir en laboratoire avec les meilleures pompes à vide. L'air conditionne

fondamentalement la quasi-totalité des formes de la vie terrestre ; selon l'activité qu'il fournit, un humain en consomme entre 3 000 et 5 000 litres par vingt-quatre heures. L'abondance quasi sans limite de ce mélange gazeux, son coût nul (pour combien de temps encore ?) et son omniprésence en ont fait un sujet d'étude de choix dès l'Antiquité. Les chimistes ont cherché à en déterminer la nature et les physicien(ne)s se sont intéressés aux problèmes de sa masse et de sa pression.

L'expérience du physicien et mathématicien italien Evangelista Torricelli (1608-1647), conçue en 1643, n'avait aucune visée météorologique. Elle consistait seulement à montrer l'existence du poids de l'air. Pour cela, Torricelli remplit un tube de mercure qu'il retourne dans une cuve remplie elle aussi de mercure. Ce métal liquide descend dans le tube puis se stabilise lorsqu'il est équilibré par le poids de l'air extérieur, affirme-t-il. Blaise Pascal (1623-1662) reprend l'expérience en 1647 et ajoute une échelle graduée. Par la fameuse expérience du Puy de Dôme (massif central, France), effectuée en 1648 par Florin Périer (son beau-frère), il confirme l'observation de l'Italien en montrant que la hauteur du mercure dans le tube dépend de l'altitude. La notion de pression atmosphérique est née, mais il faudra attendre quelques années avant que l'on repère les variations de la hauteur du mercure en fonction du temps qu'il fait. Les premiers véritables baromètres naissent au cours du dernier tiers du XVII^e siècle, de la main des physiciens tout d'abord. Ceux qui sont commercialisés à cette époque sont plus rudimentaires, indiquant seulement les changements de temps.

Calculons approximativement le poids d'une colonne d'air de 1 m² par 10 km (épaisseur caractéristique et effective de l'atmosphère : la densité est tellement faible au-delà qu'on peut négliger les couches les plus supérieures de l'atmosphère). Le volume correspondant est 10⁴ m³ ou encore 10⁷ litres. Un tel volume correspond donc à environ 10⁷/22,4 moles, soit en gros 446000 moles d'air (on néglige les variations de température avec l'altitude dans cette approximation). Si on considère maintenant que l'air est essentiellement constitué de molécules d'azote N₂ (environ 28 g par mole; on néglige les autres atomes et molécules ainsi que la vapeur d'eau), alors la masse estimée de la colonne d'air considérée est 12488 kg. Le poids de la colonne d'air est alors obtenu en multipliant cette masse par l'accélération gravitationnelle, 9,81 m/s² (on néglige aussi la variation de g avec l'altitude). On trouve environ 122000 N. La pression vaudrait donc environ 1,2×10⁵ Pa. En réalité, au niveau de la mer et dans des conditions normales de températures et d'humidité la pression atmosphérique vaut environ 1,01325×10⁵ Pa mais notre calcul donne le bon ordre de grandeur.

13.6. Forces élastiques ou de cohésion

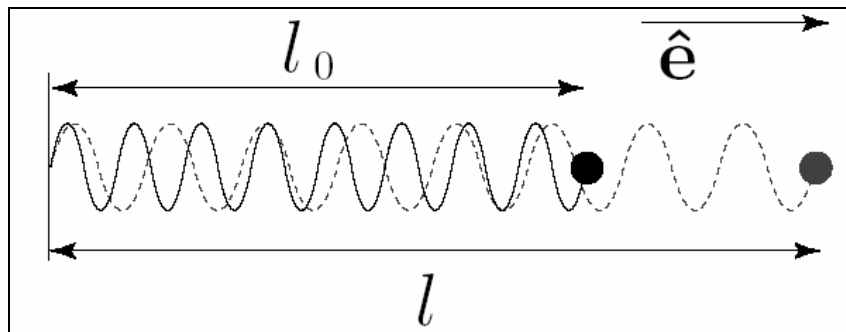
Des quatre interactions fondamentales, les forces électromagnétiques ont une importance particulière : elles sont à l'origine de la structure atomique, de la liaison chimique, des forces intermoléculaires, etc. Bref, les forces électromagnétiques sont à la base des forces macroscopiques. Cependant, vu l'imposante chaîne de complexité qui part de l'électron pour aboutir à un objet ordinaire, il est illusoire de vouloir décrire précisément les forces macroscopiques en fonction des forces électromagnétiques élémentaires. On adopte plutôt une attitude *phénoménologique* (i.e. une attitude *descriptive* des phénomènes ou d'un ensemble de

phénomènes), qui permet d'étudier les forces macroscopiques sans se soucier de leur origine précise. C'est ce qui sera fait dans cette section.

13.6.1. Loi de Hooke

Les objets solides légèrement déformés par une action extérieure exercent une force de réaction sur l'agent qui les déforme. En première approximation, la force de réaction est proportionnelle à la déformation imposée. L'exemple le plus courant est celui d'un ressort en spirale dont la longueur d'équilibre est ℓ_0 . Si ce ressort est comprimé d'une longueur $\Delta\ell$, il exerce une force proportionnelle à $\Delta\ell$ (en première approximation) dans la direction contraire à la compression; de même, s'il est étiré d'une longueur $\Delta\ell$, il exerce la même force, mais dans la direction opposée. Si $\hat{e}$ désigne le vecteur unité dans la direction du ressort (à partir de son point d'attache) et ℓ est la longueur du ressort après déformation, la force exercée par le ressort est,

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\hat{e}$$



La dépendance linéaire de la force dans la déformation est appelée loi de Hooke (que l'on peut généraliser dans le cas des milieux continus avec une écriture dite tensorielle). La constante k est simplement appelée « constante élastique » ou « constante du ressort ». Remarquons cependant que la valeur de k ne dépend pas que de la composition du ressort, mais aussi de sa longueur.

En effet, si un ressort de constante k est coupé en deux parties égales, chacune des deux parties aura une constante élastique deux fois plus grande. Pour voir ceci, imaginons justement qu'un ressort comprimé d'une longueur $\Delta\ell$ est en fait la juxtaposition de deux ressorts identiques, chacun comprimé d'une longueur $\Delta\ell/2$. Comme chacun des ressorts exerce à l'une ou l'autre de ses extrémités la même force que le ressort original (qui peut dire, à l'extrémité du deuxième ressort, si la force qu'il exerce est la sienne propre ou celle du ressort entier ? La distinction n'a pas de sens), la constante k' du demi ressort est donc telle que,

$$k\Delta\ell = k' \frac{\Delta\ell}{2} \Rightarrow k' = 2k$$

Bref, la constante de ressort k est en fait inversement proportionnelle à la longueur d'équilibre du ressort, la constante de proportionnalité B étant maintenant une caractéristique propre du matériau dont est fait le ressort et de la façon dont le ressort est enroulé :

$$k = \frac{B}{\ell_0}$$

13.6.2. Force de contrainte

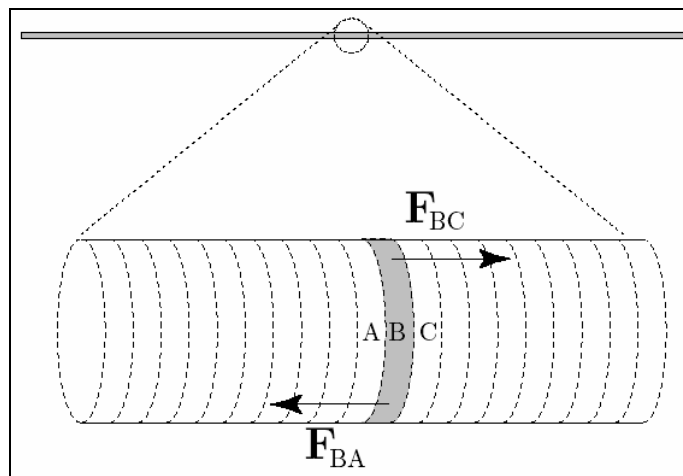
Lorsqu'un objet est contraint de se mouvoir le long d'une surface, le long d'un fil, etc., une force mécanique est nécessaire pour imposer cette contrainte. Cette force est souvent appelée force normale, parce qu'elle est dirigée dans la direction perpendiculaire au mouvement permis à l'objet.

Par exemple, un objet contraint de se mouvoir sur un plan horizontal subit une force exercée par ce plan et opposée à la force de gravité qui le tire vers les bas. Physiquement, cette force normale est la somme des forces exercées par les molécules du plan sur les molécules de l'objet à l'interface.

La grandeur de cette force s'ajuste en conséquence à la somme des forces qui lui sont opposées, de manière à ce qu'aucun mouvement ne soit possible dans la direction perpendiculaire au plan, vers l'intérieur de celui-ci. On peut considérer une telle force de contrainte comme une force élastique de constante k extrêmement élevée, de sorte qu'une très grande force peut être exercée sans qu'une déformation soit perceptible. À moins d'avis contraire, on supposera dans ces notes qu'il n'y a pas de force d'adhésion qui pourrait empêcher que l'objet perde contact avec le plan, s'il est tiré vers le haut.

13.6.3. Force d'étirement ou de tension

On rencontre souvent en mécanique des situations où une force est « transmise » par l'intermédiaire d'une corde ou d'un fil. L'origine physique de cette force est bien sûr la cohésion intermoléculaire et intramoléculaire des fibres qui forment la corde. La notion de tension peut facilement être l'objet de confusions et requiert une définition claire. Considérons la figure ci-dessous, qui illustre une corde qu'on imagine divisée en secteurs, telle un saucisson finement tranché :



Chaque tranche peut être considérée comme un objet ponctuel et subit une force de la part des deux tranches voisines. La tranche B subit ainsi une force $\vec{F}_{BA}$ exercée par la tranche A et une force $\vec{F}_{BC}$ exercée par la tranche C. Si la corde est en état de mouvement uniforme ou au repos, ces deux forces sont égales et opposées et se compensent exactement. Leur grandeur est ce qu'on appelle la tension de la corde. Bref, la tension d'une corde est la force que chaque segment exerce sur son voisin et, par répercussion, la force que l'extrémité de la corde exerce sur la personne ou le dispositif auquel elle est attachée.

Supposons maintenant que la corde est en accélération a (positive vers la droite). Soit λ la densité de la corde (la masse par unité de longueur) et dx la largeur de chaque tranche. Dans ce cas, la deuxième loi de Newton appliquée au segment B donne :

$$\vec{F}_{BC} - \vec{F}_{BA} = \lambda dx a$$

Il est clair dans ce cas que la tension varie d'un point à l'autre de la corde. Soit $T(x)$ la tension au point x le long de la corde. Le membre de gauche de l'équation ci-dessus n'est autre que $T(x+dx) - T(x)$, ou encore $T'(x)dx$, avec $T'(x)$ la dérivée de la fonction $T(x)$. On obtient donc l'équation,

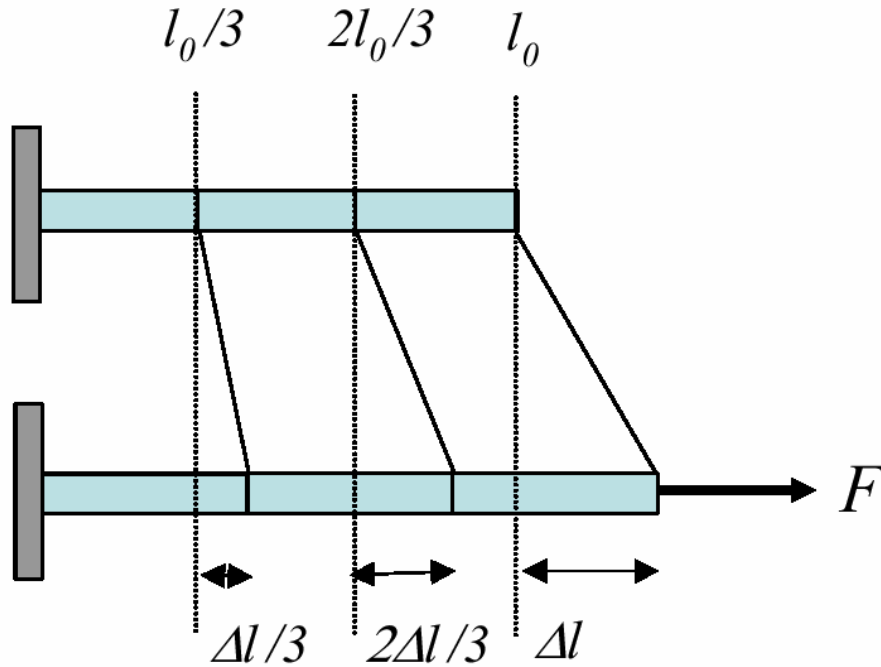
$$T'(x) = \lambda a \rightarrow T(x) = T(0) + \lambda ax$$

Si L est la longueur de la corde, la différence de tension entre les deux extrémités est donc $\Delta T = \lambda a L$. Si la densité de la corde est très petite, on peut donc négliger cette différence de tension et dans ce cas la corde « transmet la tension » de manière intégrale d'une extrémité à l'autre, même s'il y a accélération.

Conséquences :

1. Si la tige a pour longueur totale L , alors la différence de tension entre les deux extrémités vaut $\Delta T = \lambda a L$. La différence de tension n'est donc plus nulle s'il y a une accélération.

2. Pour une force donnée (i.e. une accélération a donnée) et une masse linéique *constante*, la différence de tension est la même d'une section à l'autre de la tige. Si cette différence de tension est à l'origine d'un allongement de la tige, cet allongement est le même d'une section à l'autre. Bilan : plus on s'éloigne du point de fixation de la tige, plus l'allongement résultant croît. Voir figure ci-dessous.



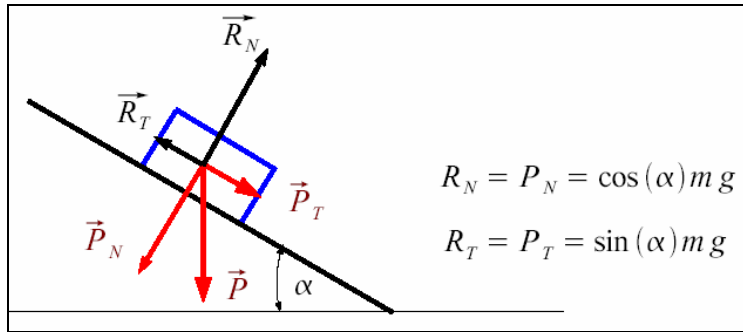
13.7. Frottement et viscosité : les forces de contact

Les forces de contact résultent d'une multitude de forces élémentaires (interactions précédentes) exercées simultanément sur un même système. Elles sont la manifestation au niveau macroscopique des interactions fondamentales.

13.7.1. Forces de frottement solide

13.7.1.1. Frottement statique

Solide qui ne bouge pas sur un plan incliné :



$$\tan \alpha = \left| \frac{R_T}{R_N} \right|$$

Par définition, et pour tous les cas de figure, on pose :

$$\tan \alpha_s = k_s ,$$

avec α_s l'angle à partir duquel on observe une amorce de glissement et k_s le coefficient de frottement statique.

Le coefficient de frottement est indépendant de R_T, R_N et ne dépend que de la nature des surfaces en contact (matériaux, forme, structure moléculaire...).

Condition de frottement statique (pas de mouvement relatif) :

$$k_s \geq \left| \frac{R_T}{R_N} \right|$$

Tant que le rapport $\frac{R_T}{R_N}$ est inférieur à k_s , le système est à l'équilibre statique.

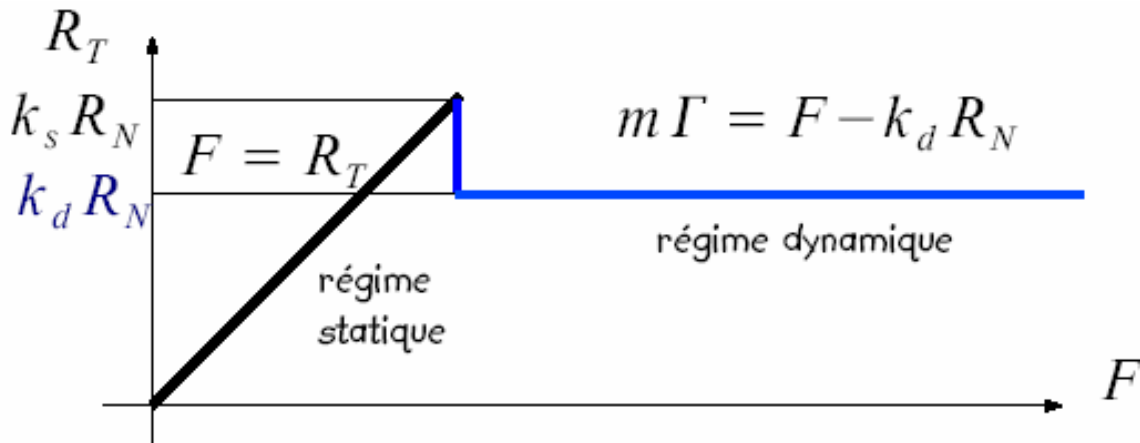
13.7.1.2. Frottement dynamique

De même que précédemment, on obtient une condition de dynamisme du système :

$$k_d = \left| \frac{R_T}{R_N} \right|$$

on obtient cette fois une égalité dès que le mouvement est lancé.

Le coefficient de frottement dynamique est dans la plupart des cas inférieur au coefficient de frottement statique :



Note : ces notions correspondent bien sûr à une modélisation simplifiée. Dans la réalité, les frottements sont souvent très complexes.

Exemples de coefficients de frottement:

	k_s	k_d
Acier / Acier, dur et sec	0,78	0,42
Acier / Acier, dur et gras	0,1	0,05
Acier / Acier, surfaces polies	100	100
Bois / bois, sec	0,5	0,3
Métal / glace	0,03	0,01
Pneu sur route sèche	0,8	0,6
Pneu sur route mouillée	0,15	0,1
Téflon / téflon	0,04	0,04

13.7.2. Force de frottement visqueux

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide, ou l'inverse, il est soumis à des forces de frottements visqueux. Ce frottement se décompose en une force de frottement opposée à la vitesse (la traînée) et aussi une force orthogonale à la vitesse (la portance). Nous ne nous intéresserons qu'à la traînée, unique force de frottement pour les solides présentant une symétrie dans le sens de la vitesse.

- A vitesse faible, on dit qu'on est en *régime laminaire*¹² ou *linéaire*. La force de frottement a pour grandeur :

$$\overline{\mathbf{F}}_f = -\phi \cdot \eta \cdot \overline{\mathbf{V}}$$

η est la viscosité du fluide (en Pa.s ou Poiseuilles) et ϕ un facteur de forme du solide en m.

¹² En mécanique des fluides, un régime laminaire est un régime dans lequel les vecteurs vitesses de toutes les particules du fluide après un obstacle restent parallèles.

Pour une sphère, on a $\phi = 6\pi R$.

Liquide	η en $Pa\ s$	Gaz	η en $Pa\ s$
eau 0° C	$1,8 \cdot 10^{-3}$	Air 0° C	$1,7 \cdot 10^{-5}$
eau 20° C	$1 \cdot 10^{-3}$	Air 20° C	$1,8 \cdot 10^{-5}$
eau 40° C	$0,66 \cdot 10^{-3}$	Air 40° C	$1,9 \cdot 10^{-5}$
Glycérine	$1,49$	H ₂	$0,93 \cdot 10^{-5}$
Huile	$1 \cdot 10^{-2}$	Ammoniaque	$0,97 \cdot 10^{-5}$
Alcool	$0,37 \cdot 10^{-3}$	CO ₂	$1,5 \cdot 10^{-5}$

- A vitesse élevée, on dit qu'on est en *régime quadratique* (i.e. qui varie avec le carré de la vitesse) :

$$\vec{F}_f = -\frac{1}{2} C_x S \rho V^2 \cdot \vec{T} \text{ où,}$$

C_x est le coefficient de pénétration dans l'air (sans dimension), S la surface (m²) apparente du solide (dans un plan perpendiculaire au mouvement), ρ la masse volumique du fluide (kg / m³) et $\vec{T}$ un vecteur unitaire tangent à la trajectoire du solide.

	C_x (sans dimension)
Carré, disque	1,1
Cycliste	0,8 à 1,1
Sphère	0,51
Voiture	0,3 à 0,5
Aile d'avion	0,01

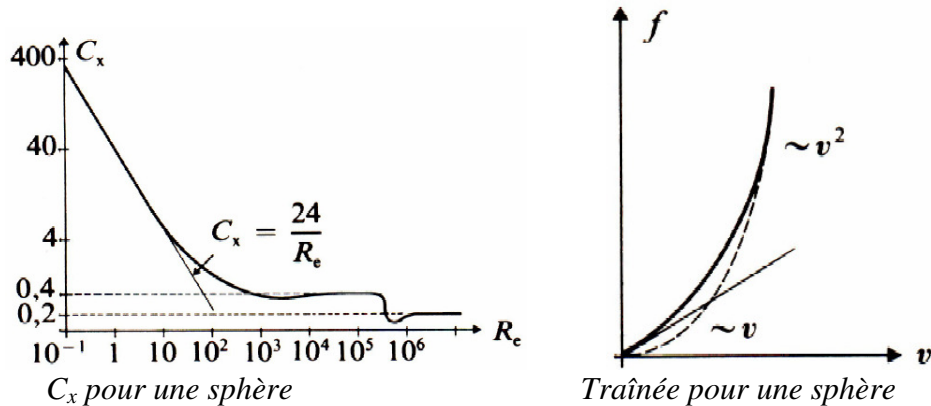
- La formulation générale du frottement visqueux est :

$$\vec{F}_f = -f(V) \cdot \vec{T} = -\frac{1}{2} C_x(R_e) S \rho V^2 \cdot \vec{T}$$

Le C_x est cette fois un coefficient qui éventuellement varie et dépend d'un nombre appelé nombre de Reynolds (R_e , sans dimension) qui caractérise les propriétés de l'écoulement du fluide :

$$R_e = \frac{\rho d}{\eta} V \text{ avec,}$$

d la dimension linéaire du solide ($d=2R$ pour une sphère) exprimée en mètres.



On peut aussi calculer la vitesse V_e pour laquelle les deux types de régimes sont identiques et ainsi avoir une idée du régime dans lequel on se situe :

$$\frac{1}{2} C_x S \rho V_e^2 = 6\pi\eta R V_e \Rightarrow V_e = \frac{12\eta}{C_x R \rho}$$

Si $V \ll V_e$ (environ dix fois plus petite) la force est linéaire.

Si $V \gg V_e$ (environ dix fois plus grande) la force est quadratique.

Pour l'air comme pour l'eau, et pour un diamètre de 1 m, cette vitesse est inférieure au millimètre par seconde. Autant dire que, dans la vie de tous les jours, même si nous n'avons pas spécialement la forme d'une sphère, nous subissons une force en V^2 .

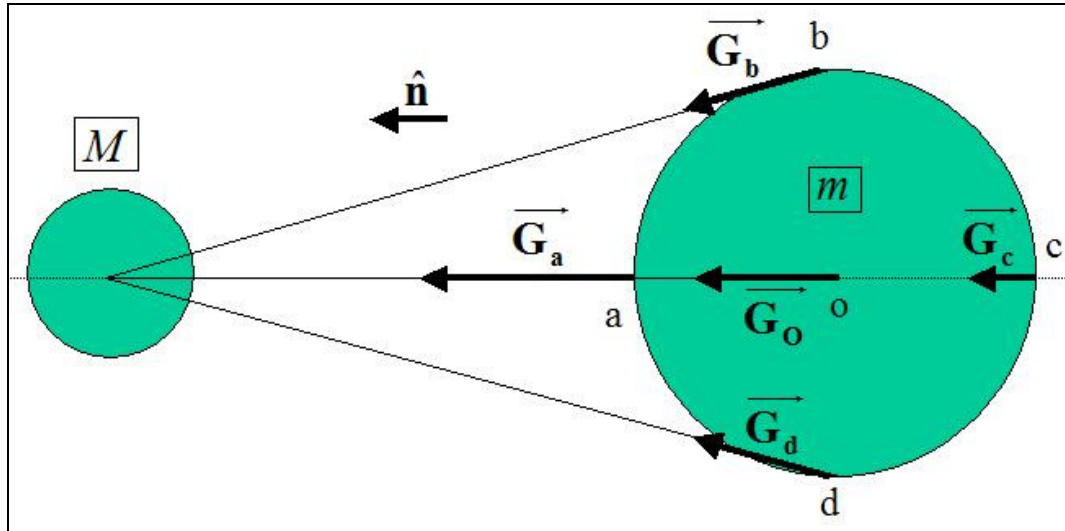
Annexe : une application des forces d'inertie pour expliquer les forces de marées gravitationnelles

Généralités théoriques

Les *marées gravitationnelles*, d'une manière générale, sont attribuables à la non uniformité, en tout point d'un corps *non ponctuel* de masse m , du champ de gravitation produit par un corps de masse M . Dans toute la suite on suppose que $M \gg m$ et que le rayon de m est très petit devant la distance D qui sépare les centres des deux corps. On suppose, pour simplifier, que les deux corps sont sphériques.

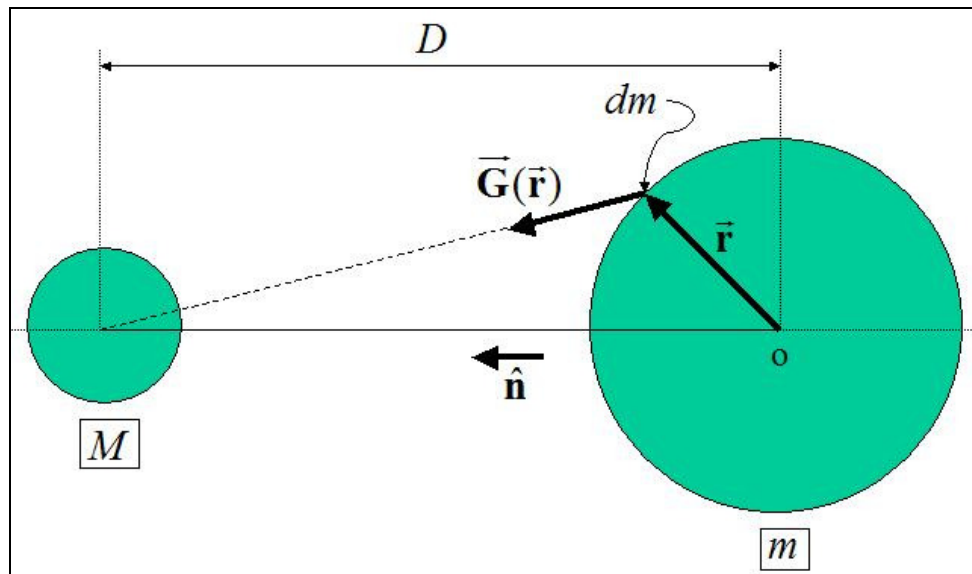
On suppose dans tout ce qui suit que le corps m orbite autour du corps M selon une trajectoire circulaire parcourue avec une vitesse de grandeur constante (l'hypothèse $M \gg m$ rend cette dernière assertion exacte puisque dans ce cas le centre de masse du système est confondu avec le centre de M). Le champ gravitationnel causé par le corps de masse M au centre du corps de masse m est (voir le schéma suivant qui n'est pas à l'échelle; $\hat{n}$ est un vecteur de norme 1 horizontal, dirigé du centre de m vers le centre de M),

$$\vec{G}_o = GM \frac{\hat{n}}{D^2}$$



D'autre part, $\vec{a}_1 = \vec{G}_o$ s'avère être l'accélération centripète de m par rapport à M . Ainsi, le corps m ne constitue pas un référentiel inertiel, puisqu'il est accéléré par rapport à M . Si nous notons $\vec{G}(\vec{r})$ le champ gravitationnel causé par le corps de masse M en un point de la surface de m repéré par le vecteur $\vec{r}$ (voir figure suivante), alors la force (du point de vue du référentiel supposé inertiel M) subie par une petite masse dm en $\vec{r}$ vaut,

$$\vec{F} = dm \vec{G}(\vec{r})$$



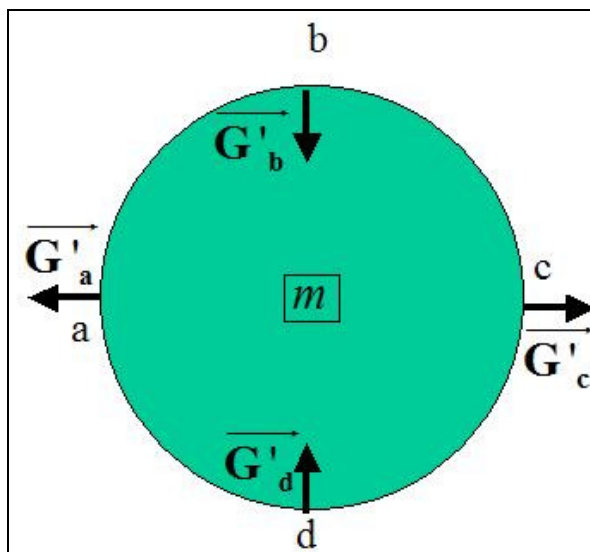
Du point de vue du référentiel non galiléen m , la force subie par cette même petite masse dm en $\vec{r}$ vaut nécessairement (relisez les sections 6.3 page 35 et 7.5 page 42; on fait intervenir ici une force d'inertie *centrifuge*),

$$\vec{F}' = \vec{F} - dm\vec{a}_1 = \vec{F} - dm\vec{G}_o = dm(\vec{G}(\vec{r}) - \vec{G}_o)$$

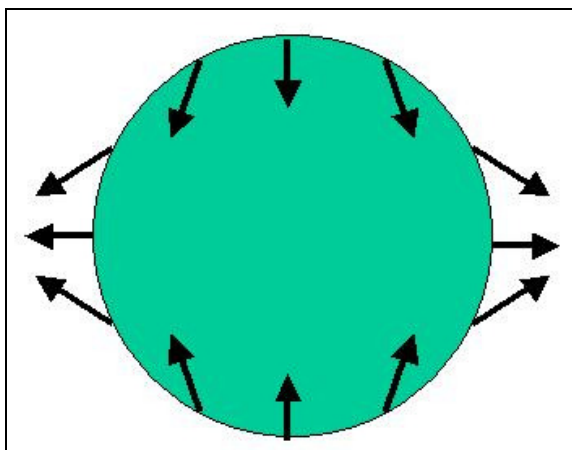
On peut donc associer à la force apparente $\vec{F}'$ un champ gravitationnel effectif,

$$\vec{G}'(\vec{r}) = \frac{\vec{F}'}{dm} = \vec{G}(\vec{r}) - \vec{G}_o$$

Une illustration du champ gravitationnel apparent pour le référentiel m est donné dans la figure ci-dessous, on constate que le corps m tend à s'aplatir verticalement et à s'allonger le long de la direction horizontale,



En d'autres points que ceux indiqués sur la figure précédente, la relation vectorielle $\vec{G}'(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) - \vec{G}_o$ nous permettrait de prévoir l'allure suivante du champ gravitationnel,



Il faut donc s'attendre à ce qu'une sphère tende à prendre la forme d'un ellipsoïde.

À présent, tâchons d'évaluer les champs gravitationnels en a et b (les champs en c et d s'en déduisent directement par symétrie du problème). Si on note R le rayon du corps m , on a,

$$G_a = \frac{GM}{(D-R)^2}$$

$$G'_a = G_a - G_0 = \frac{GM}{(D-R)^2} - \frac{GM}{D^2} = GM \left(\frac{1}{(D-R)^2} - \frac{1}{D^2} \right) = \frac{GM}{D^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{R}{D}\right)^2} - 1 \right)$$

Puisque le rayon de m est très petit devant la distance qui sépare les centres des deux corps on a $R \ll D$ et¹³,

$$G'_a = \frac{GM}{D^2} \left(\left(1 - \frac{R}{D}\right)^{-2} - 1 \right) \approx \frac{GM}{D^2} \left(1 + \frac{2R}{D} + \dots - 1 \right) \approx \frac{2GMR}{D^3}$$

En c on a aussi facilement,

$$G'_c = -G_c + G_0 = -\frac{GM}{(D+R)^2} + \frac{GM}{D^2} = GM \left(-\frac{1}{(D+R)^2} + \frac{1}{D^2} \right) = \frac{GM}{D^2} \left(-\frac{1}{\left(1 + \frac{R}{D}\right)^2} + 1 \right)$$

$$G'_c = \frac{GM}{D^2} \left(-\left(1 + \frac{R}{D}\right)^{-2} + 1 \right) \approx \frac{GM}{D^2} \left(-1 + \frac{2R}{D} + \dots + 1 \right) \approx \frac{2GMR}{D^3}$$

En b et d , on trouverait,

$$G'_b = G'_d \approx \frac{GMR}{D^3}$$

En effet, la relation vectorielle $\vec{G}'(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) - \vec{G}_0$ entraîne que l'angle α sous lequel on voit le rayon R depuis le corps M est tel que $\tan \alpha = R/D = G'_b/G_0$.

Précisions sur les variations d'accélération centrifuge au sein de l'astre subissant les marées

¹³ $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ dès que $|x| \ll 1$.

La relation vectorielle $\vec{G}'(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) - \vec{G}_0$ suppose implicitement que le champ d'accélération centrifuge, $\vec{G}_0 = GM \frac{\hat{n}}{D^2}$, est uniforme dans tout le volume de l'astre de masse m . En réalité cela n'est qu'une approximation : en raison du caractère non ponctuel de l'astre de masse m , il faut s'attendre à ce qu'en son sein il y ait des variations d'accélération centrifuge et ce, même si la vitesse angulaire ω de rotation autour de la masse M est constante.

Dans notre traitement simplifié des forces de marées, on a seulement pris en compte les variations du champ de gravité de point en point, $\vec{G}(\vec{r})$. Ici, nous nous proposons de voir à quelle condition cette approche est justifiée ou, en d'autres termes, de voir sous quelle condition on se doit de prendre aussi en compte les variations d'accélération centrifuge.

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse v , l'accélération centrifuge d'un point de m situé à la distance r du centre de M a pour grandeur :

$$a_{\text{centri}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = r\omega^2$$

L'accélération gravitationnelle (causée par la masse M) y a par contre la grandeur :

$$a_{\text{grav}} = \frac{GM}{r^2}$$

Comparons les variations de a_{centri} et a_{grav} lorsque r change (on suppose $\omega = \text{cte}$; on se sert aussi du fait que $d(\ln x) = dx/x$ et l'on transforme l'opérateur de différentiation d en Δ pour signifier la prise en compte de variations non infinitésimales des variables concernées) :

$$\begin{aligned} \ln a_{\text{centri}} &= \ln(r\omega^2) = \ln r + 2 \ln \omega \\ \frac{\Delta a_{\text{centri}}}{a_{\text{centri}}} &= \frac{\Delta r}{r} + 2 \times \frac{\cancel{\Delta \omega}}{\omega} = \frac{\Delta r}{r} \end{aligned}$$

Donc,

$$\Delta a_{\text{centri}} = \frac{\Delta r}{r} a_{\text{centri}} = \frac{\Delta r}{r} r\omega^2 = \omega^2 \Delta r$$

Ainsi, si r augmente (i.e. $\Delta r > 0$), a_{centri} augmente. D'autre part,

$$\begin{aligned} \ln a_{\text{grav}} &= \ln\left(\frac{GM}{r^2}\right) = \ln(GM) - 2 \ln r \\ \frac{\Delta a_{\text{grav}}}{a_{\text{grav}}} &= \frac{\cancel{\Delta(GM)}}{GM} - 2 \frac{\Delta r}{r} = -2 \frac{\Delta r}{r} \end{aligned}$$

Donc,

$$\Delta a_{\text{grav}} = -2 \frac{\Delta r}{r} a_{\text{grav}} = -2 \frac{\Delta r}{r} \frac{GM}{r^2} = -2 \frac{GM}{r^3} \Delta r$$

Ainsi, si r augmente (i.e. $\Delta r > 0$), a_{grav} diminue. Pour que les variations de a_{centri} soient négligeables devant celles de a_{grav} il faut que :

$$\begin{aligned} |\Delta a_{\text{centri}}| &\ll |\Delta a_{\text{grav}}| \\ \omega^2 |\Delta r| &\ll 2 \frac{GM}{r^3} |\Delta r| \\ \omega^2 &\ll 2 \frac{GM}{r^3} \end{aligned}$$

Si la période de révolution de m autour de M est T , on a $\omega = 2\pi/T$ et il faut donc satisfaire :

$$\frac{2\pi^2 r^3}{GMT^2} \ll 1$$

Dans le cas des marées causées par la Lune sur les océans de la Terre, on a $r \approx 384400$ km et $T \approx 27,32$ j (27 j 7 h 43 min 11 s) avec $M = M_{\text{Lune}} \approx 7,3 \times 10^{22}$ kg. La période de révolution autour de la Terre est égale à la période de rotation de la Lune sur elle-même (27,32 jours : mois sidéral). À cause de cette égalité entre révolution et rotation¹⁴, la Lune dirige toujours la même face – appelée face visible – vers la Terre. Le mois dit lunaire est associé aux phases de la Lune vues depuis la Terre : ce cycle (mois synodique) dure 29 j 12 h 44 min 3 s. C'est le temps nécessaire pour que la Lune, vue de la Terre, occupe la même position dans le ciel par rapport au Soleil. La différence entre le mois sidéral et le mois synodique est reliée au fait que la Terre bouge elle aussi par rapport au Soleil. Avec ces données on peut facilement constater que la condition $\frac{2\pi^2 r^3}{GMT^2} \ll 1$ n'est pas vérifiée puisque $\frac{2\pi^2 r^3}{GMT^2} \approx 41$.

Dans le cas des marées causées par le Soleil sur la Terre, on a $r \approx 149 \times 10^6$ km et $T \approx 365,2564$ j avec $M = M_{\text{Soleil}} \approx 2 \times 10^{30}$ kg. Ici $\frac{2\pi^2 r^3}{GMT^2} \approx 0,4 < 1$ ce qui est mieux. Cela étant, dans le cas du système Terre-Lune il convient de remarquer que les variations d'accélération centrifuge relativement au centre de la Terre vont dans le bon sens : elles accentuent les

¹⁴ Ce synchronisme est la conséquence du freinage de la rotation de la Lune par les marées créées sur cette dernière par la Terre. Ce freinage s'est poursuivi jusqu'à ce que le synchronisme soit atteint. Dès ce moment, le bourrelet créé par la Terre sur la Lune est devenu fixe et n'a plus causé aucun freinage. Les seules marées sur la Lune sont actuellement provoquées par la variation d'amplitude de ce bourrelet due à la fluctuation de la distance Terre-Lune du fait de l'excentricité de l'orbite.

déformations causées par les variations d'accélération gravitationnelle, ce qui ne change rien à la discussion qualitative de la section précédente.

Application : précisions sur les marées océaniques

La marée est un phénomène d'oscillation périodique du niveau des mers, dû aux forces gravitationnelles différentielles qu'exercent la Lune et le Soleil sur la Terre et ses océans. L'influence de la Lune l'emporte sur celle du Soleil (le coefficient M/D^3 qui intervient dans la section précédente est en effet dans le rapport 2,178 à l'avantage de la Lune). Par le jeu de leurs forces gravitationnelles, Terre et Lune forment un système qui pivote autour d'un axe de rotation commun.

Lorsque la Lune se trouve à la verticale d'un océan, elle attire ses eaux qui s'élèvent tandis que, sur la face opposée de la Terre, le mouvement de rotation du système Terre-Lune (plus précisément celui de la Lune par rapport à la Terre) exerce une force centrifuge qui fait également s'élever les eaux, provoquant des marées hautes dans les deux cas. Au contraire, dans les océans qui ne se trouvent pas alignés sur la Lune, les forces gravitationnelles et centrifuges s'opposent et provoquent la marée basse.

Si le Soleil et la Lune se trouvent à angle droit par rapport à la Terre, ce qui arrive tous les quinze jours, leur force d'attraction se contrarient, donnant lieu à des marées de faible amplitude : ce sont les *mortes eaux*. Lorsque la Lune et le Soleil sont alignés avec la Terre, leurs forces s'additionnent, ce qui provoque les marées de *vives eaux*.

Application : cohésion d'un satellite et limite de Roche¹⁵

Petite expérience de pensée : si la Lune s'approchait très près de la Terre, elle prendrait une forme d'ellipsoïde allongé et, à un moment donné, la différence d'attraction exercée par notre planète entre son bord intérieur et son bord extérieur serait telle que ses forces de cohésion ne pourraient l'empêcher de se disloquer. En fait, si la Lune se trouvait à seulement 18 000 km de la Terre (le rayon moyen de l'orbite lunaire autour de la Terre est en réalité de 384 000 km), elle volerait en éclats.

En effet, lorsqu'un objet se trouve proche d'un astre ou planète, l'attraction gravitationnelle différentielle (ou force de marée) entre l'astre et chaque point de l'objet considéré, peut briser le corps de grosse taille ou empêcher sa formation. Chaque point n'étant pas situé exactement à la même distance que les autres points constituant cet objet, chaque point subit donc de la part de l'astre, une force d'attraction gravitationnelle légèrement différente de celle subie par ses voisins. Il en résulte une force qui tend à casser l'objet en mille morceaux. En comparant cette force de rupture, à l'attraction propre qu'exerce l'un sur l'autre chaque point de l'objet, on peut montrer qu'il existe autour d'une planète de rayon R_{plan} et de densité ρ une

¹⁵ Édouard-Albert Roche (1820-1883) : mathématicien et astronome français qui calcula la distance limite d'un objet proche d'un astre qui subit des forces de marées brisant ce corps.

distance limite D_{Roche} , en dessous de laquelle tout objet de densité ρ' est brisé par l'attraction différentielle de la planète:

$$D_{Roche} \approx 2,4554 \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{1/3} R_{plan}$$

Le rayon de cette orbite de dernier équilibre est appelé *limite de Roche*, en hommage aux travaux du mathématicien et astronome É.-A. Roche (1820-1883), qui en a formulé le concept en 1849 à partir de l'interprétation de l'anneau de Saturne comme un satellite qui n'aurait pu s'agréger (une autre limite est désignée *lobe de Roche* en hommage à ses études sur les figures et la surface limite des atmosphères de deux corps célestes en présence).

On peut facilement trouver une justification de ce résultat fondamental en considérant un satellite de masse $2m$ et de rayon $2R$ en orbite autour d'une planète de masse M (D : rayon de l'orbite supposée circulaire pour simplifier ; on suppose aussi $R \ll D$). Imaginons à présent que le satellite soit en fait constitué de deux petits sous-satellites, chacun de masse m et de rayon R . D'après les sections qui précèdent, on s'attend à ce que le satellite au complet subisse une force d'étirement totale dans le plan orbital de l'ordre de,

$$F' \approx 2mG' = 2m \frac{2GMR}{D^3} = \frac{4GmMR}{D^3}$$

Dès que cette force est plus grande que la force de cohésion du satellite (si le satellite est *liquide*, cette force de cohésion est essentiellement la force de gravitation entre les deux petites masses m séparées de la distance $2R$; si le satellite est solide, il faut prendre en compte des forces de cohésion électrostatiques ce que nous ne traiterons pas ici), le satellite se brise,

$$F_c = \frac{Gmm}{(2R)^2} = \frac{Gm^2}{4R^2}$$

$$F_c < F' \Leftrightarrow \frac{Gm^2}{4R^2} < \frac{4GmMR}{D^3}$$

$$\frac{m}{M} < 16 \left(\frac{R}{D} \right)^3$$

Avec des corps sphériques, $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho'$ et $M = \frac{4}{3}\pi R_{plan}^3 \rho$ (ρ et ρ' : densités respectives de la planète et du satellite; R_{plan} le rayon de la planète) on a :

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho'}{\frac{4}{3}\pi R_{plan}^3 \rho} < 16 \left(\frac{R}{D} \right)^3$$

$$D < 16^{1/3} \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{1/3} R_{plan} \rightarrow D_{Roche} \approx 2,52 \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{1/3} R_{plan}$$

La facteur exact 2,45, au lieu de 2,52 obtenu ci-dessus, provient de la prise en compte de l'effritement rendu plus facile par la forme ovoïde causée par la marée (la zone où la marée est la plus forte est plus éloignée du centre de l'astre que son rayon moyen et la cohésion gravitationnelle s'en trouve diminuée) et en tenant aussi compte de la rotation du satellite sur lui-même (les forces centrifuges associées facilitent la brisure du satellite).

Deux cas intéressants : Phobos (« terreur » ou « combat », en grec) et Deimos (« panique » ou « tuerie », en grec), les deux seuls satellites de Mars. Autour de Mars la limite de Roche se situe à 10 400 km. Deimos est bien au-delà de cette limite (23 259 km). Mais pas Phobos qui se trouve à 9 378 km. De plus il s'approche de Mars à raison de 3 à 4 cm par an. Phobos, se trouverait donc dans la limite de Roche, et son écrasement sur Mars est prévu dans environ 30 millions d'années. Les fractures visibles de sa surface seraient le signe du début de la dislocation, par suite de l'action des marées.

Autour de Saturne, un satellite se trouve proche de cette limite, c'est Atlas. Il se trouve à 2,276 rayons saturniens. En réalité, son orbite se situe au-delà de la limite de Roche : Atlas est un corps de roches et de glace de densité entre 1,15 et 1,45. Avec ces valeurs, la limite n'est que de 2 rayons saturniens seulement.

Pour la comète Shoemaker-Levy 9, la limite a été franchie et elle en est morte. C'est le 24 mars 1993 que Shoemaker et Lévy découvrent cet objet étrange, avec un halo très allongé de 160 000 km. Il s'agissait des blocs de la comète, qui étaient les uns derrière les autres. La comète dont la longueur a été estimée à 1,5 km, avait en effet été fractionnée au cours d'un premier passage à proximité de la planète géante Jupiter, par les forces de marées gravitationnelles. Elle est passée à 1 million de km, le 16 mai 1992. Mais, le 8 juillet 1992, elle passe à 1,6 fois le rayon de Jupiter (soit moins de 120 000 km). Elle se brise en une vingtaine de morceaux, dont certains atteignent quelques centaines de mètres. Ils s'étendent sur 20 minutes d'arc apparentes depuis la Terre, soit 5 millions de km. Fin juillet 94, le « train de comètes » rase Jupiter à 45 000 km. Le démantèlement est total. Les fragments pénètrent la haute atmosphère de Jupiter à 200 000 km/h. Celle-ci s'est embrasée, tandis qu'à l'endroit de l'impact se formait un panache de gaz énorme, montant à 3 000 km. Autour du panache, apparu 5 min après l'impact, s'est formée une vague gigantesque de nuages qui s'étendait à la vitesse de 15 000 km/h. Un trou de 12 000 km fut laissé par l'impact dans l'atmosphère. L'énergie libérée durant les impacts correspond à quelques dizaines de millions de fois l'énergie dispersée par la bombe d'Hiroshima.



Ce montage de quatre images obtenues par la sonde Galileo montre l'évolution de l'atmosphère de Jupiter après l'impact du fragment « G » du noyau de la comète Shoemaker-Levy 9 sur la planète géante. De bas en haut et de gauche à droite: 5 minutes après l'impact, le 18 juillet 1994; une heure et demie après l'impact; le 21 juillet, 3 jours après l'impact (et 1,3 jour après l'impact d'un autre fragment du noyau de la comète, « L »); le 23 juillet, 5 jours après l'impact. Cet impact a dévoilé des couches profondes dans l'atmosphère de Jupiter.

Un peu d'histoire

Limite de Roche, lobe de Roche, deux notions à présent largement utilisées comme critères d'investigation dans de multiples domaines de l'astronomie, tant en planétologie (origine de la Lune, satellites et anneaux planétaires...), qu'en astrophysique (étoiles doubles, trous noirs, galaxies en interaction...). Et pourtant, à l'exception d'une poignée de théoriciens du premier quart du XXème siècle, tel Poincaré qui enseigne ses travaux à la Sorbonne (Université de Paris), et outre-Manche Darwin et Jeans, il s'écoule quasiment un siècle avant que les contributions de Roche ne deviennent d'actualité.

Deux facteurs permettent d'expliquer ce laps de temps entre la formulation de ses concepts et leur application. D'une part, la personnalité même de Roche, savant solitaire et discret, préférant le paisible Montpellier (ville du sud de la France) d'alors au creuset de la vie parisienne. D'autre part, les progrès de l'astrophysique, mettant en évidence dans les années 1920 et 1930 une répartition de densité au sein des étoiles assimilable au modèle de Roche. À la suite de Chandrasekhar et de Kopal, des prolongements s'opèrent avec un modèle de Roche généralisé, idéalement adapté aux étoiles doubles. Quant à la limite de Roche des satellites, elle doit son regain d'intérêt à l'exploration du système solaire, dans les années 1980. Des applications qui valent à Roche un cratère de la Lune dédié à son souvenir, et surtout d'être de plus en plus cité dans l'histoire de l'astronomie.

Annexe : Une application de la transformation galiléenne des vitesses, l'aberration des étoiles

L'*aberration* est un effet optique dû à la valeur finie de la vitesse de la lumière qui se compose avec la vitesse d'un observateur. Celui-ci ne voit donc pas l'astre dans la direction où il se trouve réellement.

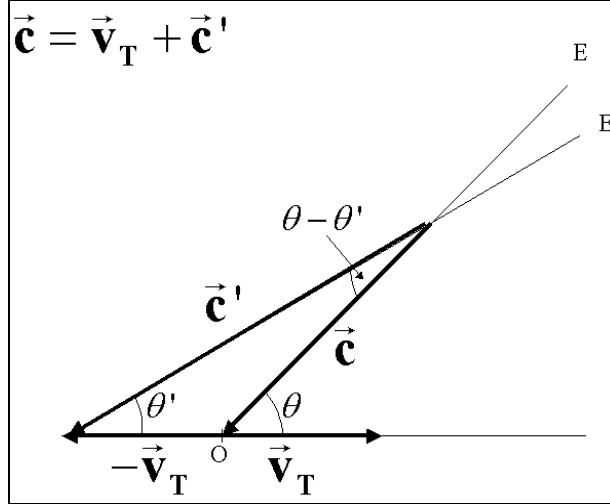
On distingue l'*aberration annuelle*, produite par le mouvement annuel de la Terre autour du Soleil, et l'*aberration diurne*, due à la rotation de la Terre sur elle-même en une journée.

Le traitement classique est particulièrement simple, et fait appel à la transformation des vitesses déduite de la transformation de Galilée. La direction réelle d'une étoile E par rapport à un observateur O immobile par rapport à l'étoile fait un angle θ avec l'horizontale. On note $\vec{c}$ un vecteur de grandeur c (la vitesse de la lumière dans le vide), et de direction celle d'un rayon lumineux issu de E. C'est un vecteur vitesse mesuré dans un référentiel inertiel R où l'étoile est fixe. On note $\vec{c}'$ le vecteur de direction la direction d'un rayon lumineux issu de la direction apparente de l'étoile, E'. C'est un vecteur vitesse mesuré dans le référentiel terrestre R' qui à un instant donné est confondu avec O. Si v_T est la vitesse de la Terre par rapport à R on a donc,

$$\vec{c} = \vec{v}_T + \vec{c}'$$

d'où,

$$\boxed{\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}_T}$$



On a la relation des sinus qui dans le triangle de la figure ci-dessus nous donne :

$$\frac{\sin(\theta - \theta')}{v_T} = \frac{\sin \theta'}{c} \Rightarrow \sin(\theta - \theta') = \frac{v_T}{c} \sin \theta' \text{ mais } v_T \ll c \text{ donc (puisque } \sin \theta' \text{ est d'ordre 1 et parce que } \theta \approx \theta'),$$

$$\sin(\theta - \theta') \approx \theta - \theta' \approx \frac{v_T}{c} \sin \theta$$

$$\boxed{\theta - \theta' \approx \frac{v_T}{c} \sin \theta}$$

On peut aussi écrire la relation exacte (avec un tout petit peu plus de géométrie dans la figure ci-dessus),

$$\boxed{\tan \theta' = \frac{c \sin \theta}{v_T + c \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{v_T}{c} + \cos \theta}}$$

Dans le cas de l'aberration annuelle, on a v_T de l'ordre de 30 km/s (une orbite quasiment circulaire de rayon 149 millions de kilomètres est parcourue en une année), donc pour une étoile qui serait réellement située au zénith de l'observateur ($\theta = \pi/2$), l'observateur la verrait environ 20 secondes d'arc plus basse¹⁶.

¹⁶ L'aberration des étoiles fait intervenir la vitesse de la lumière mesurées dans deux référentiels galiléens mais, bien sûr, une foule d'autre phénomènes peuvent être abordés avec la même approche. Dans le cas de flocons de neige chutant verticalement vers le sol (i.e. $\theta = 90^\circ$) avec une vitesse de l'ordre du mètre par seconde (la vitesse des flocons par rapport au sol), lorsqu'on se trouve dans une automobile filant à 100 km/h (le référentiel entraîné) on a très nettement l'impression que les flocons frappent le pare-brise quasiment horizontalement (on trouve $\theta' \approx 2^\circ$ vs. $\theta = 90^\circ$).

14. Applications des lois du mouvement

Rappelons qu'on suppose généralement ici que les forces exercées sur une particule ne dépendent que de sa position et de sa vitesse, ce qui revient à dire que les objets qui causent ces forces sont stationnaires. Cette hypothèse nous évite d'avoir à considérer simultanément le mouvement des autres objets. La deuxième loi de Newton prend alors la forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (5.1)$$

ou, si on l'exprime en composantes,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Il s'agit donc d'un système de trois **équations différentielles** couplées (on suppose que l'on connaît explicitement les trois fonctions F_x , F_y et F_z). Ces équations différentielles sont appelées **équations du mouvement**.

Remarques :

1. On a supposé ici que la force dépend de la vitesse de la particule comme de sa position. La dépendance en la vitesse peut survenir notamment dans le cas d'un champ magnétique, d'une force de Coriolis (cf. chapitre 10) ou de la résistance de l'air ou d'un autre milieu.
2. Les équations du mouvement (5.2) sont du deuxième ordre en dérivées. Cela signifie que leur résolution demande que l'on spécifie des **conditions initiales** suffisantes, en l'occurrence la position initiale et la vitesse initiale de la particule. Une fois ces quantités spécifiées, l'avenir de cette particule est tout tracé car la solution aux équations (5.2) est alors entièrement déterminée, comme le stipule le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles.¹ C'est la manifestation la plus simple du **déterminisme classique**.
3. Le fait que la solution des équations (5.2) existe ne veut pas dire qu'elle puisse être exprimée analytiquement. En fait, le nombre de problèmes ayant une solution analytique complète, c'est-à-dire une expression explicite de la fonction $\mathbf{r}(t)$, est très petit. Même le problème de Kepler, celui du mouvement d'une particule dans un champ de gravité en $1/r^2$, n'admet pas de solution explicite pour la position en fonction du temps. Cependant, il est en général simple de résoudre ces équations si diverses contraintes (mécaniques ou autre) font qu'une seule coordonnée varie dans le temps. Le problème est alors effectivement unidimensionnel.
4. L'absence de solution analytique n'empêche pas le calcul numérique de la solution des équations (5.2). Pour une seule particule (ou un petit nombre de particules), ce problème est numériquement simple, sauf que la précision des solutions obtenues se dégrade progressivement au cours du temps. La contemplation des solutions numériques a non seulement l'avantage de favoriser

¹ Les conditions d'application de ce théorème sont en pratique toujours réunies dans les situations physiques, car le contraire impliquerait des forces infinies.

l'intuition du problème, mais permet aussi de poser des diagnostics sur la nature chaotique ou non du mouvement.

Une conséquence extrême du déterminisme classique fut tirée par Pierre Simon de Laplace à la fin du XVIII^e siècle : si un être d'une intelligence infinie (ci-après nommé le *démon de Laplace*) connaissait avec précision les positions et les vitesses de toutes les particules de l'Univers, incluant bien sûr celles dont sont constitués les cerveaux de tous les humains, cet être pourrait en principe calculer la position et les vitesses des mêmes particules à des temps ultérieurs arbitrairement éloignés, ce qui implique que l'avenir de l'Univers, dans ses moindres détails (les actions de chaque individu, etc.), est déterminé à l'avance. Ce déterminisme radical est bien sûr en contradiction avec le sentiment de libre arbitre que chacun ressent, mais est accepté par une proportion importante de scientifiques comme allant de soi. Les travaux plus récents sur le chaos ont apporté la nuance que les conditions initiales doivent être connues avec une précision infinie pour que les prédictions classiques soient applicables à des temps éloignés. Comme une précision infinie implique des distances extrêmement petites, elle est impossible à réaliser dans le cadre de la physique classique et nous amène dans celui de la physique quantique. Dès lors, la notion de déterminisme est beaucoup plus subtile car la mécanique quantique fait intervenir la notion d'observateur et d'appareil de mesure et l'application de ces notions à l'Univers considéré comme un tout semble à première vue problématique. Donc le déterminisme radical est une position envisageable philosophiquement, mais difficile à défendre physiquement.

14.1. Projectiles

Considérons une particule en mouvement dans un champ gravitationnel uniforme, comme l'est approximativement celui à la surface de la Terre. Choisissons nos axes cartésiens de sorte que $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ et que la vitesse initiale de la particule soit dans le plan xz (l'origine est placée à la position initiale de la particule). On écrit donc

$$\mathbf{v}_0 = v_0(\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta) \quad (5.3)$$

où v_0 est la grandeur de la vitesse initiale et θ est l'angle de tir.

Les équations du mouvement sont

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad (5.4)$$

Cette équation simple a déjà été étudiée à la section 2.3. Reprenons rapidement le calcul ici. Une première intégration donne

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0 \quad (5.5)$$

alors qu'une deuxième intégration (en tenant compte de la condition initiale $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$) donne

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0t \quad (5.6)$$

Une fois obtenue la solution des équations du mouvement sous forme paramétrique (c.-à-d. x et z en fonction de t) on peut aussi s'intéresser à la **trajectoire** de la particule, c.-à-d. exprimer z en fonction de x , en éliminant t . Comme $v_0t = x/\cos \theta$, ceci donne simplement

$$z(x) = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (5.7)$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole.

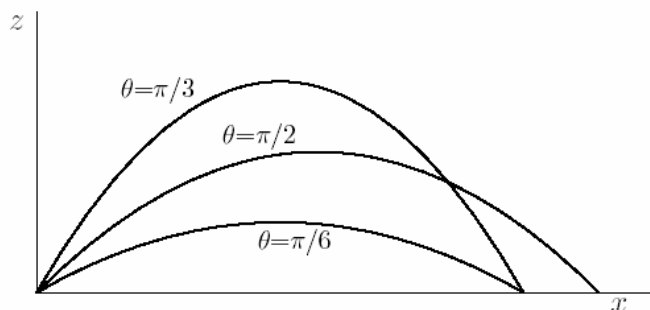


Figure 5.1. Trajectoires paraboliques d'un projectile associées à trois valeurs différentes de l'angle de tir θ , pour une vitesse de tir v_0 donnée.

Portée

La portée d'un projectile est la distance entre le point de tir et le point de retour au sol. Si le projectile est tiré à partir du sol et que celui-ci est parfaitement horizontal, la portée x_p s'obtient en résolvant l'équation (5.7) pour $z = 0$. La solution est soit $x = 0$ (le point de départ), soit

$$x_p = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (5.8)$$

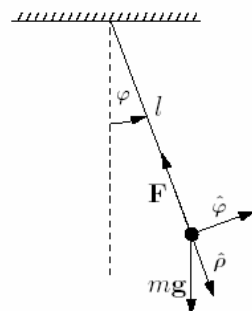
En fonction de θ , cette portée est maximale quand $\theta = \pi/4$. D'autre part, la portée augmente avec v_0 et diminue avec g . Remarquons cependant que l'angle de portée maximale n'est plus le même si la résistance de l'air est prise en compte, ou si le projectile n'est pas lancé du niveau du sol. Supposons, en particulier, que le projectile est lancé d'une hauteur h au-dessus du sol. On montre que la portée du projectile est alors

$$x_p = \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \sin 2\theta + \sqrt{\frac{8gh}{v_0^2} \cos^2 \theta + \sin^2 2\theta} \right\} \quad (5.9)$$

où on a bien sûr négligé encore une fois la résistance de l'air.

14.2. Le pendule

Considérons un pendule simple, tel qu'illustré ci-contre. La tige du pendule a une longueur ℓ et une masse négligeable, alors que la masse du pendule lui-même est m . Les forces en présence sur le pendule sont la force gravitationnelle $m\mathbf{g}$ et la tension $\mathbf{F}$ de la tige, dirigée le long de la tige (cette tension dépend évidemment de l'angle que fait la tige avec la verticale et donc dépend du temps). Nous désirons écrire l'équation du mouvement du pendule et la résoudre dans l'approximation des oscillations de faible amplitude. Nous supposons que le pendule est contraint (par les conditions initiales) de se déplacer dans un plan.



Utilisons pour cela un repère local en coordonnées polaires planes (c.-à-d. cylindriques) avec comme origine le point d'attache de la tige. La tige pointe alors dans la direction $\hat{\rho}$, l'angle entre la tige et la verticale est φ et le pendule est en mouvement alternativement dans la direction $\hat{\varphi}$ et $-\hat{\varphi}$. La position du pendule est alors $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho}$. L'équation du mouvement est

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} \quad (5.10)$$

Utilisons maintenant l'expression (2.30) de l'accélération en coordonnées cylindriques, que nous répétons ici :

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (5.11)$$

Dans le cas qui nous occupe, ρ est une constante égale à ℓ et l'accélération se réduit à

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ell(-\dot{\varphi}^2\hat{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \quad (5.12)$$

Les forces en présence se décomposent comme suit dans le repère local :

$$\mathbf{F} = -F\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad m\mathbf{g} = mg(\cos\varphi\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \quad (5.13)$$

La deuxième loi de Newton s'exprime donc comme suit en coordonnées cylindriques :

$$m\ell(-\dot{\varphi}^2\hat{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = -F\hat{\boldsymbol{\rho}} + mg(\cos\varphi\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \quad (5.14)$$

ou, en composantes,

$$\begin{aligned} -m\ell\dot{\varphi}^2 &= -F(\varphi) + mg\cos\varphi \\ m\ell\ddot{\varphi} &= -mg\sin\varphi \end{aligned} \quad (5.15)$$

Insistons sur le fait que la tension $F(\varphi)$ dépend de l'angle que fait le pendule avec la verticale. La première des deux équations ci-haut n'est donc pas immédiatement utile. La deuxième de ces équations peut s'écrire comme suit :

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0 \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (5.16)$$

Une fois connue la solution de cette équation différentielle, la première des équations (5.15) nous fournit la valeur de F en fonction du temps.

Approximation des petits angles

Au lieu de s'attaquer directement à l'Éq. (5.16), faisons l'approximation que le pendule ne s'écarte jamais beaucoup de la verticale, de sorte que l'angle φ (en radians) est suffisamment petit pour faire l'approximation $\sin\varphi \approx \varphi$. Dans ce cas, l'Éq. (5.16) devient

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (5.17)$$

Cette équation différentielle linéaire du second ordre possède comme solution générale une fonction circulaire :

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \xi) \quad (5.18)$$

où ξ et A sont déterminés par les conditions initiales. Cette solution peut aussi s'écrire

$$\varphi(t) = B \sin\omega t + C \cos\omega t \quad (5.19)$$

où $B = A \cos\xi$ et $C = A \sin\xi$. En supposant que $\varphi(0) = 0$ et que la valeur maximale de φ soit φ_0 (l'amplitude de l'oscillation), alors la solution recherchée est

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\omega t \quad (5.20)$$

Cette solution décrit une oscillation harmonique (c'est-à-dire sinusoïdale) du pendule, avec une fréquence angulaire ω , correspondant à une période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (5.21)$$

La période d'oscillation du pendule est donc indépendante de l'amplitude φ_0 de l'oscillation, comme l'a remarqué en premier Galilée au début du XVIIe siècle.

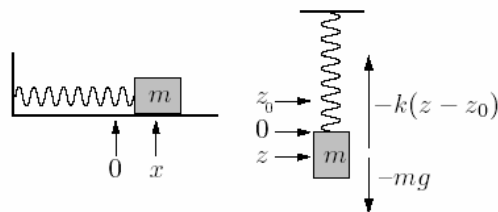


Figure 5.2. Système masse-ressort (horizontal et vertical).

Analogie avec un système masse-ressort

Le mouvement du pendule dans l'approximation des petits angles est analogue à celui d'une masse attachée à un ressort qui suit la loi de Hooke. Supposons en effet qu'un tel ressort soit fixé à un mur et que la masse puisse glisser sans frottement sur une surface horizontale, de sorte que la seule force agissant sur la masse est la force de rappel du ressort. Plaçons l'origine à la position d'équilibre du ressort, de sorte que la force exercée par le ressort sur la masse lorsqu'elle est située à une position x soit $-kx$ (le problème et la notation sont unidimensionnels et un signe négatif signifie ici que la force est dirigée vers la gauche si x est positif et vice-versa). La deuxième loi de Newton, ou l'équation du mouvement, est ici

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.22)$$

L'équation (et sa solution) est la même que dans le problème du pendule dans l'approximation des petits angles. Donc la solution générale est encore

$$x(t) = A \sin(\omega t + \xi) \quad (5.23)$$

Le problème est à peine différent si le pendule est suspendu au plafond et que la masse est en mouvement d'oscillation vertical, sous l'influence combinée du ressort et de la gravité. Dans ce cas, il est pratique de placer l'origine des coordonnées à la position d'équilibre de la masse, c'est-à-dire à l'endroit où la force de rappel du ressort compense exactement la force de gravité exercée sur la masse. Si z_0 désigne la position à l'équilibre du ressort en l'absence de gravité, la force exercée par le ressort à la nouvelle position d'équilibre (en présence de gravité) est $kz_0 = mg$ (cette force est positive, car dirigée vers le haut). La force totale ressentie par la masse à une position z quelconque est $F = -k(z - z_0) - mg = -kz$, car $kz_0 - mg = 0$. L'équation du mouvement est alors $m\ddot{z} = -kz$, la même qu'on aurait en l'absence de gravité, mais avec une position d'équilibre située à l'origine.

15. Travail, énergie, forces conservatives

15.1. Travail d'une force constante

Soit une force $\vec{F}$ constante le long d'un chemin vectoriel rectiligne $\vec{s}$. On définit le travail, W , de la force dans le déplacement considéré par le produit scalaire (θ est l'angle entre les directions des deux vecteurs) suivant:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \text{base orthon.} \quad = \quad F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z = F s \cos \theta$$

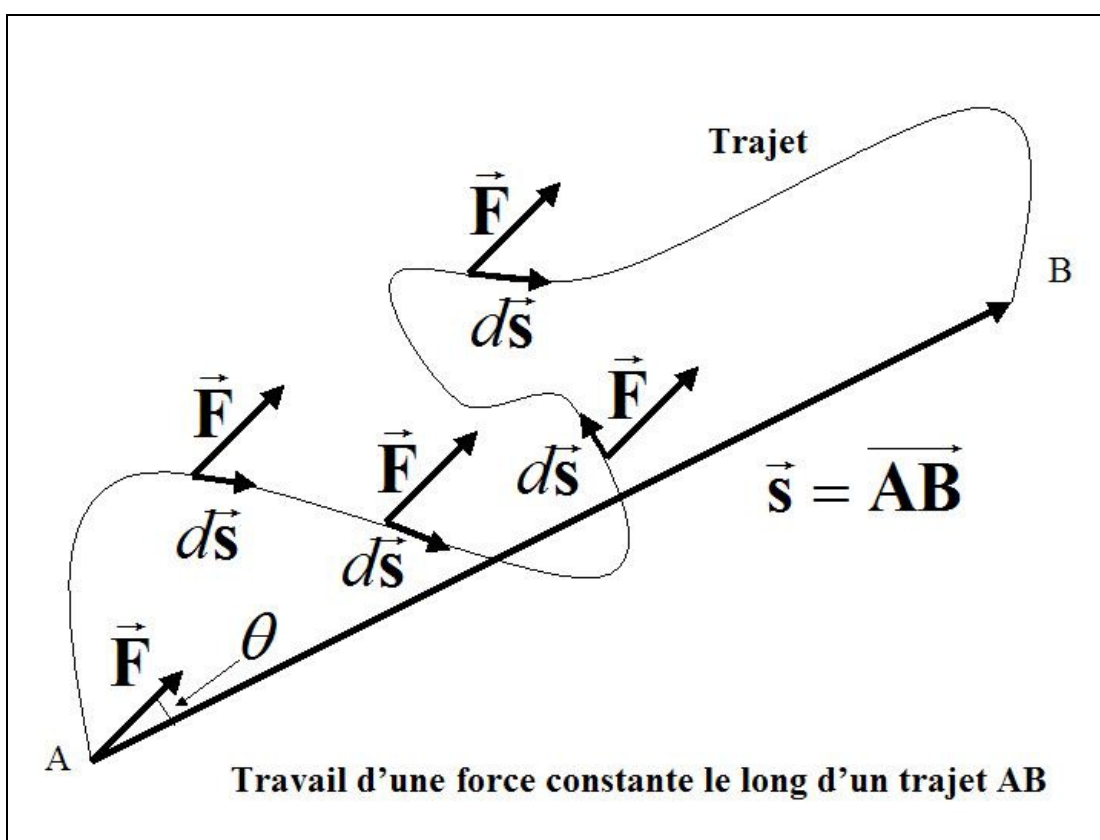
(la deuxième égalité développe ce produit scalaire dans une base orthonormée.)

Dans le système international, l'unité de travail est le joule (J), c'est-à-dire des N m (newtons mètres).

La force $\vec{F}$ peut aussi être la résultante d'un ensemble de forces (dans ce cas, le travail total est la somme des travaux de chaque force considérée individuellement):

$$W = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{s} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \vec{s}) = \sum_i W_i$$

D'une manière générale, on peut considérer le travail d'une *force constante* $\vec{F}$ le long d'un trajet quelconque, d'un point A vers un point B (voir figure ci-dessous).



Il n'est alors pas très difficile de montrer que le travail ne dépend effectivement que du point de départ A et du point d'arrivée B, i.e. d'un vecteur $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} \text{Travail élémentaire : } dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{base orthon.} = F_x ds_x + F_y ds_y + F_z ds_z \\ W &= \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (F_x ds_x + F_y ds_y + F_z ds_z) = F_x \int_A^B ds_x + F_y \int_A^B ds_y + F_z \int_A^B ds_z \\ W &= F_x (x_B - x_A) + F_y (y_B - y_A) + F_z (z_B - z_A) \end{aligned}$$

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

15.2. Travail du poids (comme cas particulier de force constante)

Dans les cas où l'accélération gravitationnelle terrestre g peut être considérée constante (c'est-à-dire localement, et pour des altitudes raisonnables), on peut s'intéresser au poids d'un point matériel de masse m qui est alors un cas particulier de force constante (si la masse elle-même est aussi supposée constante, bien sûr).

On a $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$ (on choisit un repère orthonormé avec le vecteur de base $\vec{j}$ orienté vers le haut). Pour un déplacement quelconque $\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k}$, on peut calculer le travail du poids :

$$W_{poids} = \vec{P} \cdot \vec{s} = (m\vec{g}) \cdot (s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k}) = (-mg\vec{j}) \cdot (s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k}) = -mgs_y$$

(tous les produits scalaires sont nuls, sauf $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$.)

La relation précédente prouve que le travail du poids ne dépend que du dénivelé $h = s_y$ (i.e. seulement des ordonnées initiale et finale du mouvement), ce que l'on écrit souvent :

$$W_{poids} = mgh \text{ (avec } h \geq 0 \text{ si on fait une chute, et } h \leq 0 \text{ si on s'élève)}$$

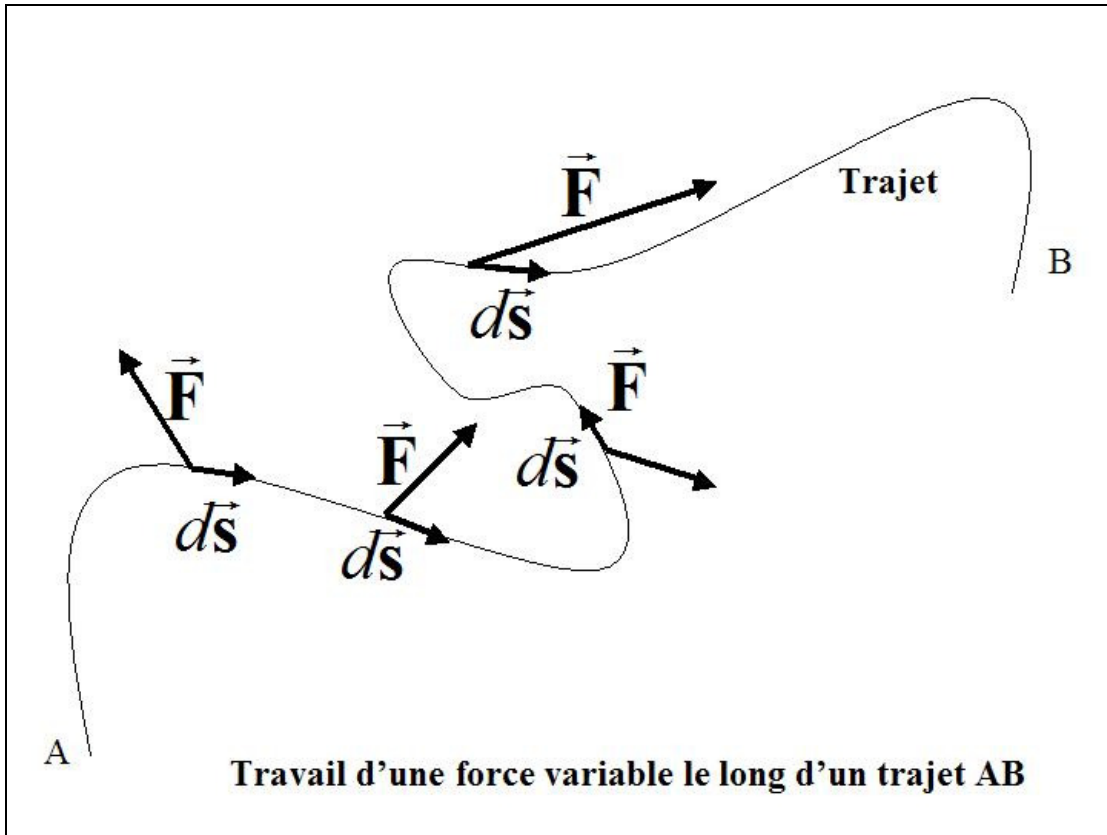
15.3. Travail d'une force variable

Si on s'intéresse au travail d'une force variable dans l'espace $\vec{F}$, il faut considérer des déplacements élémentaires $d\vec{s}$ le long desquels la force peut être considérée constante. Sur chaque petit déplacement élémentaire on peut donc calculer un travail élémentaire dW . Le travail total sur un trajet complet est alors obtenu par intégration (i.e. une somme) des travaux élémentaires sur la totalité du trajet parcouru par le mobile:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ (travail élémentaire)}$$

$$W = \int_{\text{trajet parcouru}} dW = \int_{\text{trajet parcouru}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ (travail total)}$$

Cette fois-ci, contrairement au cas d'une force constante le long d'un trajet, on ne peut pas exprimer le travail simplement à partir du début et de la fin du trajet. Le cas des forces dites conservatives nous permettra de retrouver une situation dans laquelle seuls les points de départ et d'arrivée compteront.



15.4.Exemple de travail d'une force variable : force de rappel d'un ressort (loi de Hooke)

Si un ressort est écarté de sa position d'équilibre, une force dite de rappel tend à le ramener vers sa position initiale. Si l'écart à la position d'équilibre vaut y (on considère ici un ressort vertical), alors la force de rappel est (loi de Hooke) :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -ky\vec{j}$$

(si on étire le ressort vers le bas y est négatif et la force est dirigée vers le haut, ainsi le ressort tend à se comprimer; k est la constante de rappel).

Il est donc manifeste que la force de rappel n'est pas constante puisqu'elle dépend explicitement de l'écart à la position d'équilibre.

Soit un déplacement vertical élémentaire $d\vec{s} = dy\vec{j}$, alors le travail à fournir (il est donc négatif) pour écarter le ressort de sa position d'équilibre vaut :

$$W = \int_0^y dW = \int_0^y \vec{F}_{\text{rappel}} \cdot d\vec{s} = \int_0^y (-ky\vec{j}) \cdot (dy\vec{j}) = -\int_0^y kydy = -k \int_0^y ydy = -\frac{1}{2}ky^2$$

15.5. Théorème de l'énergie cinétique¹⁷

Dans un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$, la variation d'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (entre un état final f et un état initial i) d'un mobile A de masse m est égale à la somme *algébrique* des travaux des forces appliquées,

$$E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \sum_j^{\text{trajet}} W_j$$

Remarque très importante : dans un référentiel non inertiel $\mathcal{R}'$ on peut encore appliquer ce théorème mais il convient alors de prendre en compte les travaux des forces d'inertie !

Démonstration :

Dans un référentiel d'inertie on peut écrire la deuxième loi de Newton,

$$\sum_j \vec{F}_j = m\vec{a}$$

Calculons le travail total (effectué pendant la durée dt) pour un déplacement élémentaire $d\vec{s}$ réalisé par le mobile ayant la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}}$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_j \vec{F}_j \right) \cdot d\vec{s} &= m\vec{a} \cdot d\vec{s} \\ \sum_j (\vec{F}_j \cdot d\vec{s}) &= m\vec{a} \cdot d\vec{s} = m\ddot{\vec{s}} \cdot d\vec{s} \quad (\text{car } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{s}}) \\ \text{mais } d\vec{s} &= \dot{\vec{s}}dt, \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\sum_j (\vec{F}_j \cdot d\vec{s}) = m\ddot{\vec{s}} \cdot \dot{\vec{s}}dt$$

D'autre part,

$$\ddot{\vec{s}} \cdot \dot{\vec{s}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{s}} \cdot \dot{\vec{s}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{s}}^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2)$$

donc,

$$\sum_j (\vec{F}_j \cdot d\vec{s}) = \sum_j dW_j = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) dt$$

Donc, après intégration sur un trajet déterminé,

¹⁷ Ce théorème est aussi appelé « théorème travail-énergie » ou « théorème des forces vives ».

$$E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \sum_j^{\text{trajet}} W_j$$

15.6. Puissance

La puissance P s'exprime en watts (W; i.e. des joules par seconde) et est définie par (dérivée du travail par rapport au temps utilisé pour réaliser ce travail) :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

La puissance d'une force $\vec{F}$ qui dans l'intervalle de temps dt parvient à mouvoir un mobile de la distance $d\vec{s}$ (i.e. lui confère la vitesse $\vec{v} = d\vec{s}/dt$) peut s'écrire,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

15.7. Forces conservatives à une dimension (1D)

Une force $\vec{F}$ est dite *conservative* (on dit aussi que « la force dérive d'un potentiel U ») quand son travail ne dépend ni de la façon dont le mouvement est effectué au cours du temps, ni du parcours suivi mais *seulement des positions initiale et finale*.

Pour un mouvement ayant lieu relativement à la seule variable d'espace x (mouvement à une dimension), mathématiquement la contrainte serait donc d'avoir le travail de la force proportionnel à la différentielle de l'énergie potentielle :

$$F_x dx \propto dU$$

En effet, dans ce cas,

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F_x dx \propto \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

et le travail ne dépend effectivement que de la différence d'énergie potentielle entre les points A et B, i.e. des positions initiale et finale.

En pratique, il faut fixer la constante de proportionnalité entre $F_x dx$ et dU . On choisit conventionnellement la valeur -1 pour qu'un travail positif corresponde à une perte d'énergie potentielle. Cette convention prendra son sens un peu plus loin quand on traitera le théorème de l'énergie mécanique (section 15.9). Avec la constante de proportionnalité à -1 on a donc la définition d'une force conservative 1D :

$$F_x = -\frac{dU}{dx}(x)$$

15.8. Exemples de forces conservatives 1D

L'énergie potentielle de gravitation dans un champ de gravitation uniforme vaut tout simplement $U_y = mgy + cte$ puisque la force qui dérive de ce potentiel donne la bonne expression du poids :

$$F_y = -\frac{dU_y}{dy} = -mg$$

(force dirigée vers le bas !).

L'énergie potentielle d'un ressort vaut $U_x = \frac{1}{2}kx^2 + cte$ (x est l'écart à la position d'équilibre) puisque :

$$F_x = -\frac{dU_x}{dx} = -kx$$

(le ressort veut donc retrouver sa forme initiale dès qu'on l'écarte de sa position d'équilibre, i.e. dès que $x \neq 0$).

15.9. Théorème de l'énergie mécanique 1D

Si les forces appliquées sont conservatives (i.e. dérivent d'un potentiel) l'énergie mécanique (i.e. la somme des énergies cinétique et potentielle) se conserve au cours du mouvement :

$$E_c + U = \text{constante}$$

Remarque : si des forces non conservatives entrent en jeu, l'énergie mécanique n'est plus conservée, la différence est due au travail des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel.

Démonstration :

Si les forces appliquées sont conservatives on a par définition,

$$dU = -F_x dx$$

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Donc la variation d'énergie potentielle est l'opposée du travail de la force conservative sur le trajet qui passe de x_i à x_f :

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -W_{conservative}$$

$$\Delta U + W_{conservative} = 0$$

Mais, d'après le théorème de l'énergie cinétique, le travail en question est aussi donné par la variation d'énergie cinétique :

$$W_{conservative} = \Delta E_c$$

Donc,

$$\Delta U + \Delta E_c = 0$$

$$U_f - U_i + E_{cf} - E_{ci} = 0$$

$$U_f + E_{cf} = U_i + E_{ci}$$

Cette dernière relation traduit le fait que la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique (i.e. l'énergie mécanique) se conserve au cours du mouvement pour des forces conservatives.

15.10. Forces conservatives, cas général

15.10.1. Introduction

Dans le cas à une seule dimension d'espace, on a défini une force conservative comme une force dont le travail est l'opposé de la différentielle de l'énergie potentielle :

$$F_x dx = -dE_p$$

Cette définition assure donc que le travail total de la force effectué sur un trajet donné ne dépend ni de la façon dont le mouvement est effectué au cours du temps, ni du parcours suivi mais *seulement des positions initiale et finale*.

Notre problème, à présent, est de voir comment cette dernière contrainte peut se traduire mathématiquement dans le cas d'un mouvement non nécessairement unidimensionnel. Nous avons ici besoin d'introduire un opérateur vectoriel appelé *gradient*.

15.10.2. Notion de gradient

Le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ est un vecteur noté $\vec{\nabla}f$ (les notations ∇f ou $\overrightarrow{\text{grad}}f$ sont également courantes¹⁸) dont les composantes dans une base orthonormée sont les dérivées partielles de f par rapport à chaque variable :

$$\vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On parle également, sans faire de référence à une quelconque fonction f , de l'opérateur gradient :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Une propriété fondamentale du gradient de f est la suivante :

$$\boxed{df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}}$$

Démonstration :

La variation d'une fonction f entre les deux points (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ est :

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$$

On rappelle que pour une fonction quelconque g , si sa dérivée en un point x existe on a :

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = \lim_{\substack{h \neq 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Autrement dit, pour h suffisamment petit, on peut écrire :

¹⁸ ∇ est un symbole qui se lit « nabra ».

$$g(x+h) \approx h \frac{dg}{dx} + g(x)$$

Pour une fonction de plusieurs variables, on peut évidemment écrire (quand on dérive partiellement par rapport à disons la variable x , les autres variables sont supposées constantes, etc.),

$$g(x+dx, y, z) \approx \frac{\partial g}{\partial x} dx + g(x, y, z)$$

$$g(x, y+dy, z) \approx \frac{\partial g}{\partial y} dy + g(x, y, z)$$

$$g(x, y, z+dz) \approx \frac{\partial g}{\partial z} dz + g(x, y, z)$$

Ainsi, pour la variable x ,

$$f(x+dx, y+dy, z+dz) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + f(x, y+dy, z+dz)$$

donc,

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + f(x, y+dy, z+dz) - f(x, y, z)$$

On peut ensuite appliquer le même traitement à la valeur $f(x, y+dy, z+dz)$ pour la variable y :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + f(x, y, z+dz) - f(x, y, z)$$

Et si on réserve le même sort à la variable z :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + f(x, y, z) - f(x, y, z)$$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz}$$

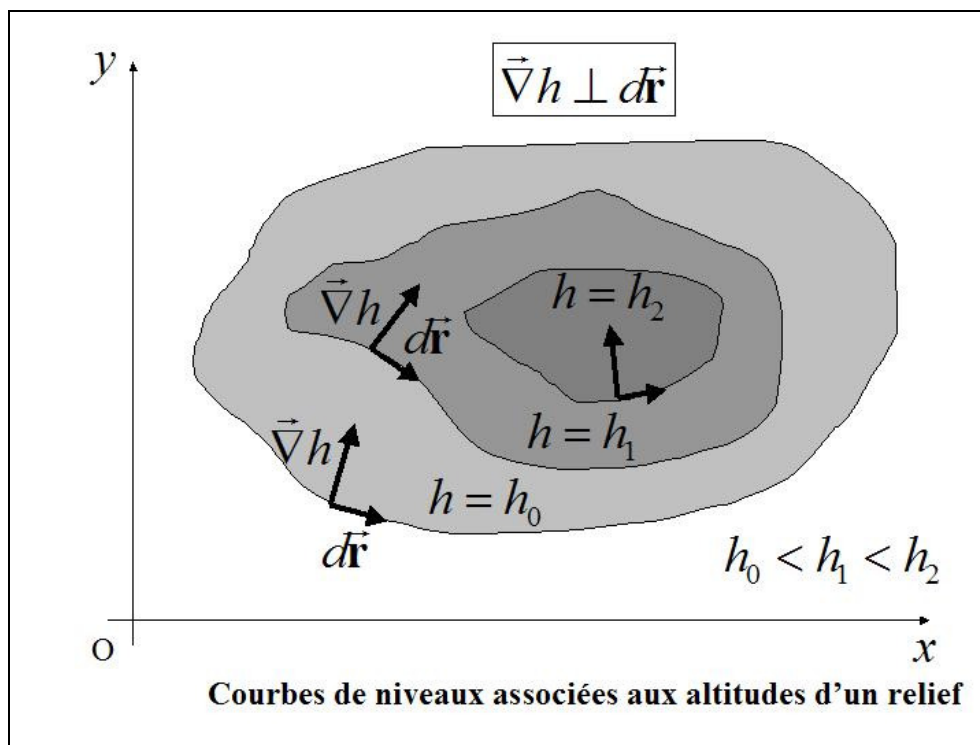
Finalement, on peut interpréter cette dernière relation comme le produit scalaire des vecteurs $\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ et $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, ce qu'il fallait démontrer,

$$df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}$$

15.10.3. Exemple d'usage du gradient : courbes de niveau

Il nous faut maintenant correctement interpréter la relation $df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}$.

Le plus simple est de considérer un cas où le gradient est un vecteur à deux composantes seulement, $\vec{\nabla}h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$ pour une fonction h représentant les altitudes d'un relief. En un point (x, y) du plan, on associe l'altitude $h(x, y)$. On a toujours la relation suivante vérifiée, $dh = \vec{\nabla}h \cdot d\vec{r}$. Sur les courbes d'égales altitudes (ou courbes de niveau de la fonction h) on a $d\vec{r}$ tangent aux courbes et, de plus, $\vec{\nabla}h \cdot d\vec{r} = 0$ car sur ces courbes $dh = 0$, i.e. le vecteur gradient est orthogonal à $d\vec{r}$. Ainsi, le gradient de h est un vecteur dont la direction pointe toujours dans la direction des plus grandes variations de h .



15.10.4. Forces conservatives : définition générale

La notion de gradient nous permet de donner une définition plus générale d'une force conservative. On dit qu'une force $\vec{F}$ est conservative si elle peut être mise en relation avec un potentiel U tel que (on dit encore que $\vec{F}$ dérive du potentiel U):

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}U}$$

Dans le cas 1D, cette définition nous redonne bien la définition de la section 15.7 page 91, tout simplement parce que la dérivée partielle $\partial/\partial x$ devient une dérivée ordinaire d/dx :

$$\vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, 0, 0 \right) = \frac{dU}{dx} \vec{i} \text{ et } \vec{F} = F_x \vec{i},$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = F_x \vec{i} = -\frac{dU}{dx} \vec{i} \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$$

D'autre part, on peut aisément s'assurer que le travail d'une telle force ne dépend en effet que des points de départ et d'arrivée d'un trajet donné (ce qui justifie l'expression « la force dérive d'un potentiel ») car,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla}U \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} = -dU \\ W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = U(A) - U(B) \end{aligned}$$

Ainsi, pour une force conservative, revenir à son point de départ ($A = B$, i.e. parcourir une *trajectoire fermée* Γ) correspond à un travail globalement nul, $W = 0$, et ce, indépendamment du chemin suivi :

$$W = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Exemple: une force centrale est toujours conservative

En effet, soit une force centrale $\vec{F}$, i.e. une force de la forme $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ avec $\vec{r}$ le vecteur position de norme r et f une fonction qui ne dépend que de la distance au centre de force.

Supposons la force conservative et voyons si l'on peut déduire de cette hypothèse un potentiel adéquat.

Si la force $\vec{F}$ est conservative, on peut écrire $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ donc $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} = -dU$ et puis $\frac{f(r)}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -dU$.

Finalement, puisqu'en coordonnées polaires on a $\vec{r} = r\hat{r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \rightarrow d\vec{r} = \dot{r}dt\hat{r} + r\dot{\theta}dt\hat{\theta}$:

$$dU = -\frac{f(r)}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{f(r)}{r} (r\hat{r}) \cdot (\dot{r}dt\hat{r} + r\dot{\theta}dt\hat{\theta}) = -f(r) \frac{dr}{dt} dt$$

d'où,

$$U = -\int f(r) \frac{dr}{dt} dt + cte = -\int f(r) dr + cte$$

Puisqu'on peut toujours déterminer un potentiel U à partir de f (via l'intégrale ci-dessus ; attention, cela ne veut pas dire que l'intégrale est toujours facile à calculer !), la force centrale est conservative.

15.10.5. Le potentiel associé à la force gravitationnelle

Un peu plus loin, nous montrerons que le gradient de la fonction $1/r$ vaut ($\|\vec{r}\| = r$),

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Cette dernière relation nous permet de clarifier l'expression du potentiel U associé à la force centrale de gravitation. Nous avons en effet la force de gravité exercée par un corps 2 (de masse M) sur un corps 1 (de masse m),

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GmM}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

avec r_{12} la distance entre les deux corps, et $\vec{r}_{12}$ un vecteur de norme 1 dirigé du corps 2 vers le corps 1. D'autre part,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}U$$

Remarquons maintenant que,

$$\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^2} \times \frac{r_{12}}{r_{12}} = \frac{r_{12} \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

avec $\vec{r} = r_{12} \vec{r}_{12}$ un vecteur de norme r_{12} dirigé du corps 2 vers le corps 1. La propriété générale $\vec{\nabla}(1/r) = -\vec{r}/r^3$ se traduit donc ici par,

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GmM}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \rightarrow \vec{F}_{12} = -\frac{GmM}{r_{12}^3} \vec{r} = GmM \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -\vec{\nabla}U$$

d'où,

$$U = -\frac{GmM}{r_{12}} + cte$$

Si on choisit de noter r la distance entre les deux corps, on a donc pour l'énergie potentielle de gravité entre deux corps de masses m et M ,

$$U = -\frac{GmM}{r} + cte$$

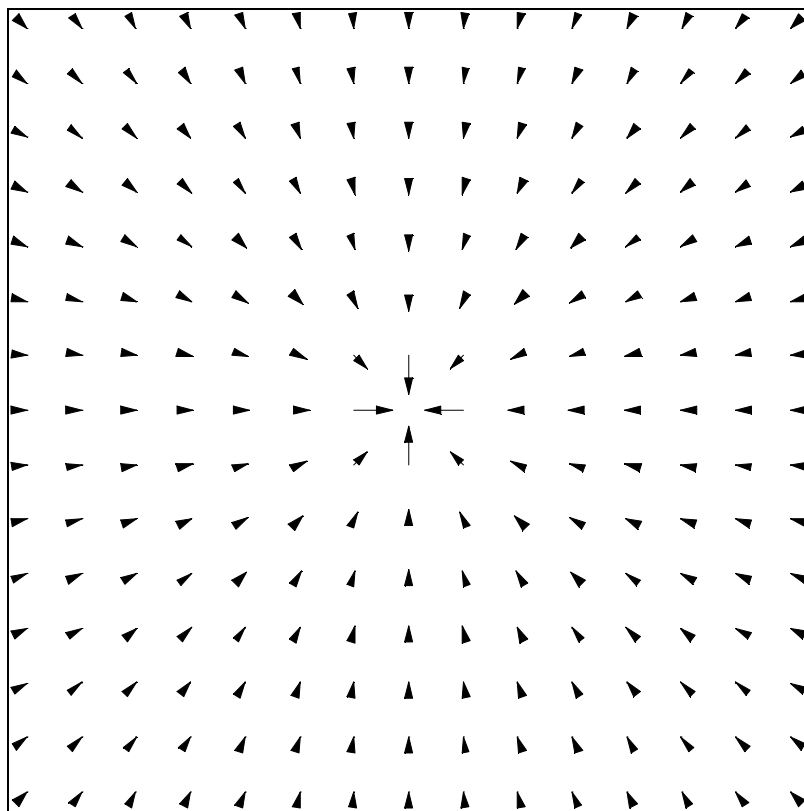
A présent, démontrons,

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Nous avons $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et,

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x \\ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y \\ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{r^3} \\ -\frac{y}{r^3} \\ -\frac{z}{r^3} \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Voici l'allure du gradient de $1/r$ dans le plan $z = 0$ (attention le champ de gradient n'est pas défini en $r = 0$):



15.10.6. Énergie potentielle gravitationnelle à g constant

Puisque l'énergie potentielle gravitationnelle en un point de l'espace situé à la distance $r=R+h$ du centre de masse d'un astre sphérique de rayon R et de masse M vaut (on considère donc un point de masse m situé à l'altitude h au-dessus du sol),

$$U(r = R + h) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R + h},$$

pour des *altitudes* h *petites* devant le rayon de l'astre de rayon R ($h \ll R$), on a :

$$\boxed{U(h) = mgh + cte}$$

Remarque : souvent, on prend la constante apparaissant dans la relation précédente égale à 0 (puisque ce qui compte est essentiellement, en vertu du théorème de l'énergie mécanique, la variation d'énergie potentielle et non la valeur précise de cette grandeur).

Démonstration :

$$U(R + h) = -\frac{GMm}{R + h} = -\frac{GMm}{R(1 + \frac{h}{R})} = -\frac{GMm}{R} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}$$

Or, quand $|x|$ est très petit devant 1,

$$\boxed{(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x}$$

Donc,

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{R}$$

(car ici $x = h / R$ est effectivement supposé très petit devant 1, et $\alpha = -1$).

Donc,

$$U(R + h) = -\frac{GMm}{R} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} \approx -\frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMmh}{R^2} = mgh + U(R) = mgh + cte$$

avec,

$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}},$$

l'accélération de la gravité à la *surface* de l'astre de masse M .

15.10.7. Notion de rotationnel et comment vérifier qu'une force est conservative

Pour vérifier qu'une force est conservative, on peut essayer de trouver une fonction U dont l'opposé du gradient donne justement la force considérée. Autrement dit, on peut essayer de calculer une « primitive » (au sens du gradient) de la force. Cela est parfois très compliqué. Il est souvent plus simple d'introduire l'opérateur vectoriel *rotationnel*.

Soit un *champ de vecteurs* $\vec{\mathbf{F}}$, i.e. une application qui à un point de $\mathbb{R}^3$ associe un vecteur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ a = (x, y, z) \mapsto F(a) = (F_x(a), F_y(a), F_z(a)) \end{array} \right.$$

Avec F_x , F_y et F_z des applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ (ce sont des *champs scalaires*). Le rotationnel de $\vec{\mathbf{F}}$ au point a est par définition le champ de vecteurs suivant,

$$\vec{\nabla} \times F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y}(a) - \frac{\partial F_y}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial F_x}{\partial z}(a) - \frac{\partial F_z}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial F_y}{\partial x}(a) - \frac{\partial F_x}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Si $\vec{\mathbf{F}}$ dérive d'un potentiel deux fois différentiable et continu U on a,

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

puis,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(la dernière égalité utilise le fait que l'ordre de différentiation est indifférent dès que la fonction U est deux fois différentiable et continue.)

donc,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = \vec{\mathbf{0}}$$

Ainsi, comme nous venons de le démontrer assez facilement, le rotationnel d'un gradient est toujours nul. En mathématiques on démontre aussi la réciproque (démonstration plus difficile par contre): *si un champ de vecteurs a un rotationnel nul alors ce champ de vecteurs peut s'écrire comme le gradient d'une certaine fonction scalaire (à tout le moins sur un domaine de l'espace qui ne présente pas de bizarreries... demandez à votre professeur(e) de mathématiques de vous préciser ce que j'entends par là. En pratique les domaines utiles en physique ont les bonnes caractéristiques).*

Ainsi, pour vérifier qu'une force est conservative, il suffit de vérifier que son rotationnel est le vecteur nul !

Exemple: une force centrale est toujours conservative

En effet, soit une force centrale $\vec{F}$, i.e. une force de la forme $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ avec $\vec{r}$ le vecteur position de norme $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et f une fonction qui ne dépend que de la distance au centre de force (il s'agit donc d'une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$).

On a,

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} x \vec{i} + \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} y \vec{j} + \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} z \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} x \\ \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} y \\ \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} z \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} y \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} x \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} z \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} x \right) \end{pmatrix}$$

On a,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} z \right) = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} f(r) + \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{df}{dr}$$

Cette dernière expression ne change pas quand on échange les variables y et z , il en résulte que la première composante du rotationnel est nulle. On montrerait de même que les deux autres composantes du rotationnel sont nulles. Ainsi, puisque le rotationnel d'une force centrale est le vecteur nul, nécessairement elle est conservative.

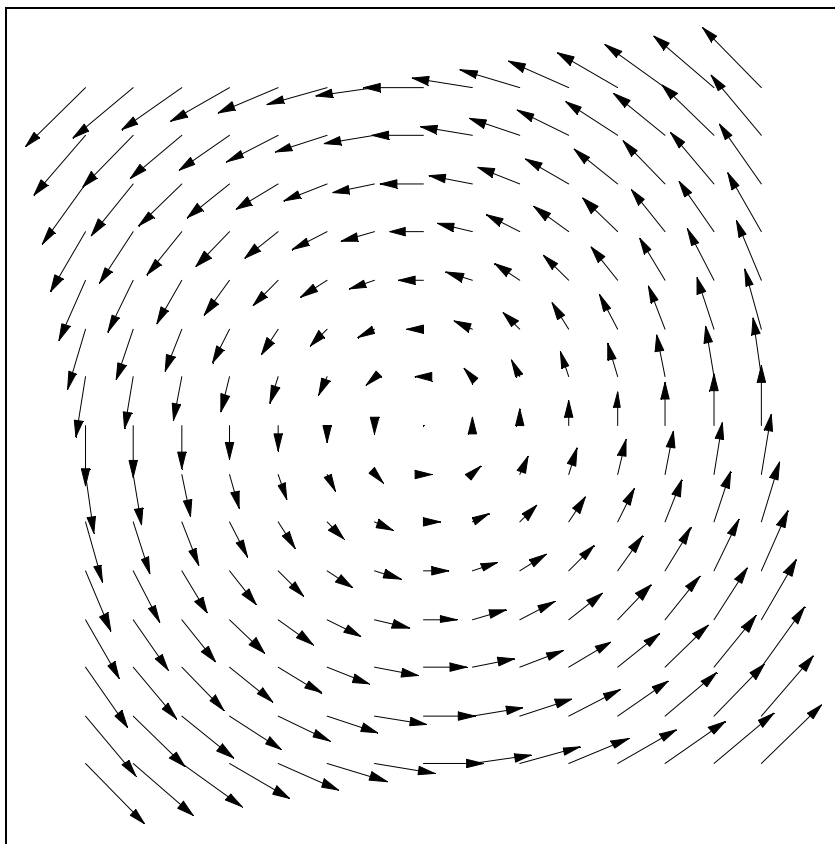
15.11. *Rotationnel et mouvement de rotation*

Le mot rotationnel suggère un mouvement de rotation. Dans cette section nous allons montrer qu'en effet cet opérateur donne un résultat particulièrement simple quand on l'applique à un champ de vecteurs caractéristique d'un mouvement de rotation (solide).

En général, la vitesse en coordonnées cylindriques s'écrit : $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$.

Supposons que nous avons affaire à un mouvement circulaire et uniforme dans le plan $z = 0$. Dans ce cas la vitesse à la distance r de l'origine est $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} \rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta} = r\omega\hat{\theta}$. Mais $\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} + 0\hat{z}$ (cf. section 5.4 page 28). Donc, $\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} + 0\hat{z} = -\frac{y}{r}\hat{x} + \frac{x}{r}\hat{y} + 0\hat{z}$ et $\vec{v} = r\omega\hat{\theta} = -\omega y\hat{x} + \omega x\hat{y} + 0\hat{z}$.

Dans la figure qui suit on montre l'allure d'un tel champ de vecteurs.

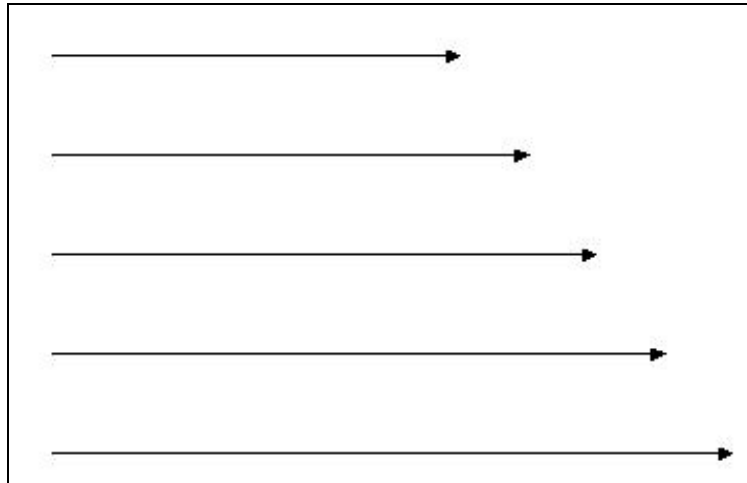


Donc,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ +\omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$$

Donc, pour un mouvement de rotation simple, le rotationnel est un vecteur colinéaire à l'axe de rotation dont la grandeur est le double de la vitesse angulaire.

Remarquons que dans le champ de vecteurs considéré du champ des vitesses de rotation, si on considère les vecteurs vitesse autour d'une direction θ fixée, les vecteurs semblent colinéaires les uns par rapport aux autres. On peut donc observer des champs de vecteurs de rotationnel *non nul* ayant cet aspect (qui au premier abord ne semble guère associé à un mouvement de rotation, et pourtant...) :



15.12. Théorème de l'énergie mécanique, cas général

15.12.1. Théorème de l'énergie mécanique en dimension trois

Si les forces appliquées sont conservatives (i.e. dérivent d'un potentiel via un gradient) l'énergie mécanique (i.e. la somme des énergies cinétique et potentielle) se conserve au cours du mouvement :

$$E_c + U = \text{constante}$$

Remarque : si des forces non conservatives entrent en jeu, l'énergie mécanique n'est plus conservée, la différence est due au travail des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel.

Démonstration :

Si les forces appliquées $\vec{F}$ sont conservatives on a par définition un potentiel U tel que,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = -dU$$

Donc la variation d'énergie potentielle entre un état initial et un état final est l'opposée du travail de la force conservative :

$$\Delta U = U_f - U_i = \int_{initial}^{final} dU = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{conservative}$$

$$\Delta U + W_{conservative} = 0$$

Mais, d'après le théorème de l'énergie cinétique, le travail en question est aussi donné par la variation d'énergie cinétique :

$$W_{conservative} = \Delta E_c$$

Donc,

$$\Delta U + \Delta E_c = 0$$

$$U_f - U_i + E_{cf} - E_{ci} = 0$$

$$U_f + E_{cf} = U_i + E_{ci}$$

Cette dernière relation traduit le fait que la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique (i.e. l'énergie mécanique) se conserve au cours du mouvement pour des forces conservatives.

15.12.2. Vitesse de libération

Il s'agit de la vitesse *minimale* requise pour qu'une particule de masse m liée par la seule gravitation à un astre de masse M et de rayon R puisse s'échapper du champ gravitationnel de cet astre. On a :

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Démonstration :

Puisque la particule de masse m est uniquement soumise à la force gravitationnelle (force conservative) produite par l'astre de masse M , l'énergie mécanique doit se conserver dans le mouvement.

Mécanique classique et relativité restreinte

Quand on communique à une particule de masse m initialement au repos une vitesse v_{lib} lorsqu'elle est à la surface de l'astre de masse M et de rayon R , l'énergie mécanique vaut :

$$"E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}" \rightarrow E_m(\text{surface}) = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{GMm}{R}$$

Quand la particule atteint l'infini avec une vitesse nulle, i.e. la particule avait la vitesse minimale requise pour quitter le champ gravitationnel de l'astre de masse M , on a :

$$"E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}" \rightarrow E_m(\text{infini}) = 0$$

Donc,

$$E_m(\text{surface}) = E_m(\text{infini})$$

$$\frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_{lib}^2 = \frac{GMm}{R}$$

$$v_{lib}^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

15.13. Énergie potentielle et stabilité

Pour les fins de la présente discussion, considérons une particule qui se déplace en une seule dimension, décrite par une coordonnée x . Le champ de force est alors une simple fonction $F(x)$ et la force pointe vers la droite si $F > 0$, vers la gauche si $F < 0$. Le potentiel de cette force est une fonction $U(x)$ dont la dérivée est ainsi reliée à la force :

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (6.46)$$

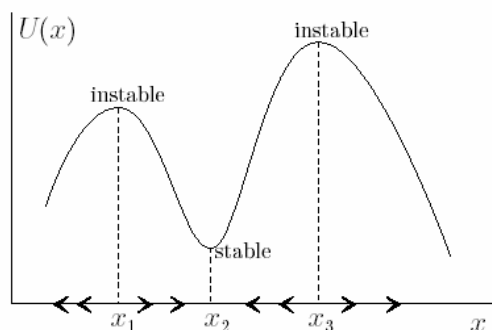


Figure 6.2. Points d'équilibres stable (x_2) et instable (x_1 et x_3) sur un graphique d'énergie potentielle en une dimension. Les flèches sur l'axe indiquent la direction de la force dans chacune des régions.

On dit que le point x_0 est un **point d'équilibre** si la force est nulle à cet endroit : $F(x_0) = 0$; autrement dit, si la dérivée du potentiel s'annule à x_0 . On qualifie l'équilibre de **stable** si, lorsqu'on déplace la particule légèrement de x_0 , la force tend à la faire revenir vers x_0 . Cette condition est remplie si la dérivée de la force est négative au point x_0 . En effet, en effectuant un développement de Taylor de $F(x)$ autour du point x_0 , on trouve

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \dots \quad (6.47)$$

Dans l'hypothèse que $F(x_0) = 0$ et $F'(x_0) < 0$, la force est négative (c.-à-d. vers la gauche) si $x > x_0$ et positive (c.-à-d. vers la droite) si $x < x_0$, ce qui correspond bien à la notion de stabilité. Dans le cas contraire, si $F'(x_0) > 0$, la force a tendance à éloigner la particule de x_0 si cette dernière en est légèrement déplacée : l'équilibre est qualifié d'**instable**. En fonction du potentiel U , un point d'équilibre stable x_0 correspond aux conditions $U'(x_0) = 0$ et $U''(x_0) > 0$, alors qu'un

point d'équilibre instable correspond aux conditions $U'(x_0) = 0$ et $U''(x_0) < 0$. Le développement de Taylor de l'énergie potentielle $U(x)$ autour d'un point d'équilibre x_0 s'écrit

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

(le terme linéaire en $x - x_0$ s'annule puisque $U'(x_0) = 0$). Si $x - x_0$ reste petit, c'est-à-dire si la particule ne s'éloigne pas beaucoup du point d'équilibre, alors on peut tronquer la série de Taylor au terme quadratique sans faire une trop grande erreur. L'énergie potentielle affecte alors la forme d'une parabole. Si l'équilibre est stable, le potentiel a alors la même forme que pour une masse liée à un ressort obéissant à la loi de Hooke, avec une constante de rappel $k = U''(x_0)$.

Si la dérivée deuxième du potentiel s'annule ($U''(x_0) = 0$) au point d'équilibre, alors il faut se rendre jusqu'au terme cubique dans le développement de Taylor :

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{6}U^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

et l'équilibre est alors instable, car la force a le même signe de part et d'autre du point d'équilibre, de sorte que l'objet s'éloigne de x_0 si on le déplace légèrement vers la gauche (si $U^{(3)}(x_0) > 0$) ou vers la droite (si $U^{(3)}(x_0) < 0$). Plus généralement, c'est le premier coefficient non nul de la série de Taylor (autre que le terme constant) qui détermine la nature de l'équilibre. Si tous les coefficients sont nuls sauf le terme constant, alors l'énergie potentielle est simplement une constante dans cette région de l'espace et la force est nulle. On parle alors d'équilibre **indifférent**.

La notion de stabilité s'applique aussi très facilement aux systèmes qui, sans être strictement unidimensionnels, n'ont qu'un seul degré de liberté. Considérons par exemple un pendule rigide, c'est-à-dire une masse m attachée à l'extrémité d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ , dont l'autre extrémité est fixée à un pivot, comme à la section précédente. L'énergie potentielle du pendule en fonction de l'angle d'inclinaison φ est

$$U(\varphi) = -mg\ell \cos \varphi \quad (6.48)$$

La force correspondante est obtenue en appliquant le gradient en coordonnées cylindriques :

$$F_\varphi(\varphi) = -\frac{1}{\ell} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mg \sin \varphi \quad (6.49)$$

Il y a deux points d'équilibre : $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$. La dérivée de la force est

$$F'_\varphi(\varphi) = -\frac{1}{\ell} U''(\varphi) = -mg \cos \varphi \quad (6.50)$$

L'équilibre est donc stable à $\varphi = 0$ ($U''(0) > 0$) et instable à $\varphi = \pi$ ($U''(\pi) < 0$).

La généralisation à plusieurs dimensions et plusieurs particules de la notion de stabilité est plus délicate. Encore que la condition d'équilibre soit bien évidemment donnée par $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$, l'expression mathématique de la condition de stabilité est plus compliquée. Il faut que le système en son entier ait tendance à revenir à son point d'équilibre si on le déplace légèrement et ce, quelque soit la direction de ce déplacement. Ceci n'est pas toujours possible. En particulier, on montre qu'une particule se déplaçant dans un champ gravitationnel (ou un champ électrique) ne peut pas jouir d'un équilibre stable, mais seulement d'un équilibre instable. Ce serait le cas, par exemple, d'une particule située à un point intermédiaire entre la Terre et la Lune où les forces gravitationnelles exercées par ces deux astres se compensent mutuellement. Dans ce cas, l'équilibre pourrait sembler stable dans une direction, mais il serait instable dans une autre direction.

Annexe : Champs de vecteurs et formes différentielles

Champ de vecteurs : définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

On appelle champ de vecteurs de classe C^k (i.e. continu et k fois différentiable) toute application :

$$\left\{ \begin{array}{l} F : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ a = (x, y, z) \mapsto F(a) = (P(a), Q(a), R(a)) \end{array} \right.$$

avec P, Q, R des applications de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$ (champs de scalaires).

Exemple: Si f est un champ de scalaires de classe C^1 , alors le gradient est un champ de vecteurs tout naturel :

$$F = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

On dit alors que F dérive du potentiel scalaire f .

Divergence d'un champ de vecteurs

$\mathbb{R}^3$ est supposé muni d'une base orthonormée directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $F : a \mapsto F(a) = (P(a), Q(a), R(a))$ un champ de vecteurs de classe C^1 , on appelle divergence de F en a le réel:

$$\vec{\nabla} \cdot F(a) = \vec{i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(a) + \vec{j} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(a) + \vec{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(a) = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial x}(a) + \frac{\partial R}{\partial x}(a)$$

Si f est un champ de scalaires de classe C^2 , on appelle Laplacien de f la divergence de son gradient :

$$\nabla^2 f(a) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f(a)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)$$

Rotationnel d'un champ de vecteurs

On appelle rotationnel de F en a le vecteur :

$$\vec{\nabla} \times F(a) = \vec{i} \times \frac{\partial F}{\partial x}(a) + \vec{j} \times \frac{\partial F}{\partial y}(a) + \vec{k} \times \frac{\partial F}{\partial z}(a)$$

$$\vec{\nabla} \times F(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial R}{\partial x}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial R}{\partial y}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial R}{\partial z}(a) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times F(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial R}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}(a) \\ 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(a) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

On peut facilement montrer (cf. section 15.10.7 page 100) que si un champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire, alors son rotationnel est nul.

Formes différentielles (petite introduction)

On appelle forme différentielle sur U , un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$, toute application de U dans le dual $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Le dual $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Le dual est un espace vectoriel (en effet, la combinaison linéaire de deux applications linéaires est encore une application linéaire). Cet espace vectoriel a en outre la dimension 3.

Exemple fondamental:

Si l'on note (dx, dy, dz) la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (c-à-d. les applications linéaires $dx: (x, y, z) \mapsto x$, $dy: (x, y, z) \mapsto y$ et $dz: (x, y, z) \mapsto z$), toute forme différentielle s'écrit donc sur cette base,

$$\omega = P dx + Q dy + R dz$$

avec P, Q, R des applications de U dans $\mathbb{R}$.

Donc, si f est une application de classe C^1 sur U , l'application $a \mapsto df_a$ est une forme différentielle.

La forme différentielle est dite de classe C^k si et seulement si le champ de vecteurs (P, Q, R) est de classe C^k .

Une forme différentielle est dite exacte si et seulement si il existe f de classe C^1 sur U telle que :

$$\omega = df$$

On dit alors que f est une primitive de ω sur l'ouvert U .

Une forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^3 P_i dx_i$ de classe C^1 est dite fermée sur l'ouvert U si et seulement si :

$$\forall a \in U, \forall i, j, \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(a)$$

Théorème: Toute forme différentielle exacte sur U est fermée sur U .

démonstration: admise.

Réciproque: Théorème de Poincaré (admis)

Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé U est exacte sur U .

Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Soit Γ un arc de classe C^1 paramétré par $([a, b], (x(t), y(t), z(t)))$ dont le support est inclus dans U .

Soit $\omega = P dx + Q dy + R dz$ une forme différentielle sur U .

On définit l'intégrale curviligne de la forme différentielle ω le long de la courbe Γ par :

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b P dx + Q dy + R dz = \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \right) dt$$

Cas d'une forme différentielle exacte : $\int_{\Gamma} df = f(B) - f(A)$ avec $A \begin{vmatrix} x(a) \\ y(a) \\ z(a) \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} x(b) \\ y(b) \\ z(b) \end{vmatrix}$

Formule de Green-Riemann (admise) :

Soit Δ une partie "simple" du plan dont la frontière est un arc Γ , paramétré par une application de classe C^1 et orienté dans le sens trigonométrique.

Soit P et Q deux applications de classe C^1 définies sur un ouvert contenant Δ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

Application aux calculs d'aires :

L'aire de Δ est l'intégrale double $A = \iint_{\Delta} dx dy$. La formule de Green-Riemann permet d'affirmer:

$$A = \int_{\Gamma} x dy = \int_{\Gamma} -y dx = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

Passage aux coordonnées polaires:

Soit D la partie décrite par (r, θ) pour que $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ décrive Δ . Soit Γ' la frontière orientée de D . On a :

$$A = \iint_{\Delta} dx dy = \iint_D r dr d\theta = \int_{\Gamma'} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

16. Le problème de Kepler

16.1. Les lois de Kepler et Newton

Un problème de Kepler (1571–1630) est une situation mettant en jeu deux masses (ou deux charges électriques) qui s'attirent (ou peuvent même se repousser dans le cas de charges électriques de mêmes signes) avec une force telle que la force de gravitation universelle ou la force électrique de Coulomb, sans aucune autre influence extérieure. Autrement dit, un problème de Kepler est celui mettant en jeu une force d'interaction en r^{-2} .

Le plus connu des problèmes de Kepler est celui mettant en jeu les planètes du système solaire. Un tel système se comporte de telle façon que son centre de masse se trouve animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Suivant les cas, on peut observer des trajectoires hyperboliques, paraboliques ou elliptiques, ce que nous démontrerons un peu plus loin.

Kepler était un *héliocentriste* et il aura tout fait pour démontrer la validité de cette hypothèse. Après de nombreuses années de travaux et de calculs pour reproduire *exactement* le mouvement des planètes à l'aide d'épicycles¹⁹, il aura l'idée d'abandonner les orbites circulaires pour passer aux orbites elliptiques, en plaçant le Soleil à l'un des foyers de l'ellipse.

Les deux premières lois de la dynamique planétaire de Kepler ont été publiées en 1609 dans son *Astronomia Nova*. La 3ème loi a été publiée 10 années plus tard, dans *Harmonices Mundi* :

- **1ère loi** : l'orbite d'une planète autour du Soleil est elliptique et ce dernier occupe l'un des foyers de l'ellipse ;
- **2ème loi (loi des aires)** : une ligne reliant une planète au Soleil balaie des aires égales durant des intervalles de temps égaux ;
- **3ème loi** : le carré de la période orbitale, T , d'une planète est proportionnel au cube de sa distance moyenne au Soleil, a :

$$T^2 \propto a^3 \quad (3)$$

Les lois de Kepler ont été obtenues par la seule voie observationnelle et cela constitue une vraie prouesse pour l'époque.

¹⁹Mouvement sur un cercle, dont le centre, à son tour, se déplace autour d'un cercle plus grand. Ce mouvement était un aspect fondamental du modèle géocentrique du système solaire proposé par Ptolémée (100-170).

Dans son traité *Principia* (publié en 1687), Newton énonce trois lois qui traitent du mouvement mécanique des corps :

- **1ère loi (loi de l'inertie) :** relativement à un référentiel galiléen, tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si les forces qui lui sont appliquées se compensent exactement ou bien sont inexistantes ;

- **2ème loi (principe fondamental de la dynamique) :** dans un référentiel galiléen, la somme des forces qui s'exercent sur un point matériel de masse m est proportionnelle à son accélération :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (4)$$

- **3ème loi (principe de l'action et de la réaction) :** tout corps exerçant sur un autre une force quelconque reçoit de ce dernier une force égale (en intensité) et opposée (en sens) :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (5)$$

16.2. Loi de la gravitation universelle

C'est en combinant ses lois du mouvement à la troisième loi de Kepler que Newton trouve sa loi de la gravitation universelle.

Considérons en effet le cas du mouvement d'un objet de masse m en orbite circulaire (de rayon r) autour d'un corps d'une masse beaucoup plus grande, M .

La 3ème loi de Kepler impose :

$$T^2 = kr^3 \quad (6)$$

où k vaut simplement 1 si la période est en années et la distance r en unités astronomiques (UA : La Terre tourne autour du Soleil en se déplaçant approximativement sur une ellipse d'excentricité 0,01673 et de demi grand axe 149 598 600 kilomètres, qui est, par définition l'unité astronomique de distance).

Puisque le long d'une orbite circulaire la vitesse v de l'objet est constante, on a également :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (7)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = kr^3 \quad (8)$$

et donc la norme de la force centrifuge est,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{kr^3} = \frac{m4\pi^2}{kr^2} \quad (9)$$

Alors le terme de droite doit donner la grandeur de la force (centripète) qui maintient l'objet de masse m en orbite autour de la masse M , la fameuse force gravitationnelle :

$$F_g = \frac{m4\pi^2}{kr^2} \quad (10)$$

Pour obtenir une symétrie entre les deux masses m et M (symétrie requise en vertu de la 3ème loi de Newton), Newton réécrivit cette force ainsi :

$$\boxed{F_g = \frac{GmM}{r^2}} \quad (11)$$

pour enfin obtenir la loi de la gravitation universelle et où G est la constante de la gravitation universelle.

Justifions plus en détail le passage de (10) à (11) :

Si le corps de masse m subit une force,

$$F_g = \frac{m4\pi^2}{kr^2} \quad (12)$$

on s'attend, par symétrie (égalité en termes de normes de l'action et de la réaction), à ce que le corps de masse M subisse une force de norme identique mais d'expression:

$$F_g = \frac{M4\pi^2}{k'r'^2} \quad (13)$$

où r' est le rayon de l'orbite circulaire parcourue par la masse M . Évidemment, la masse M parcourt son orbite avec la même période orbitale T ce qui impose l'existence d'une constante k' telle que $T^2 = kr^3 = k'r'^3$. Nous avons donc,

$$\frac{m4\pi^2}{kr^2} = \frac{M4\pi^2}{k'r'^2}$$

$$\frac{m}{kr^2} = \frac{M}{k'r'^2} \quad (14)$$

et en multipliant cette dernière égalité par les rapports $m/m=1$ et $M/M=1$:

$$\frac{m}{kr^2} \frac{M}{M} = \frac{M}{k'r'^2} \frac{m}{m}$$

$$\frac{1}{kr^2 M} m M = \frac{1}{k'r'^2 m} m M \quad (15)$$

On doit donc avoir :

$$kr^2 M = k'r'^2 m$$

$$kr^2 Mr = k'r'^2 mr$$

$$kr^3 M = k'r'^3 M = k'r'^2 mr \quad (16)$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{m}{M}$$

La dernière égalité impose donc que les deux masses orbitent autour de leur centre de masse commun.

En considérant les dernières relations de (14) et (16) on peut finalement montrer que :

$$\frac{k'}{k} = \frac{M^3}{m^3} \quad (17)$$

Enfin, la dernière relation de (16) combinée à (17) montre que,

$$\frac{4\pi^2}{kM} = \frac{4\pi^2}{k'} \frac{M^2}{m^3} \quad (18)$$

(18) nous prouve donc que la force gravitationnelle peut s'écrire,

$$F_g = \frac{GmM}{r^2} \quad (19)$$

avec $G = 4\pi^2/(kM)$ la constante de la gravitation universelle puisque l'on a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi^2 m}{kr^2} &= \frac{4\pi^2 M}{k'r'^2} \\
 \frac{4\pi^2 m}{kr^2} \frac{M}{M} &= \frac{4\pi^2 M}{k'r'^2} \frac{m}{m} \\
 \frac{GmM}{r^2} &= \frac{4\pi^2 M}{k \frac{M^3}{m^3} r'^2} \frac{m}{m} = \frac{4\pi^2}{kr'^2} \frac{m^3}{M^2} \\
 \frac{GmM}{r^2} &= \frac{4\pi^2}{kr^2} \frac{m^3}{\frac{m^2}{M^2}} = \frac{4\pi^2}{kr^2} m = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2} \\
 \frac{GmM}{r^2} &= \frac{GmM}{r^2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

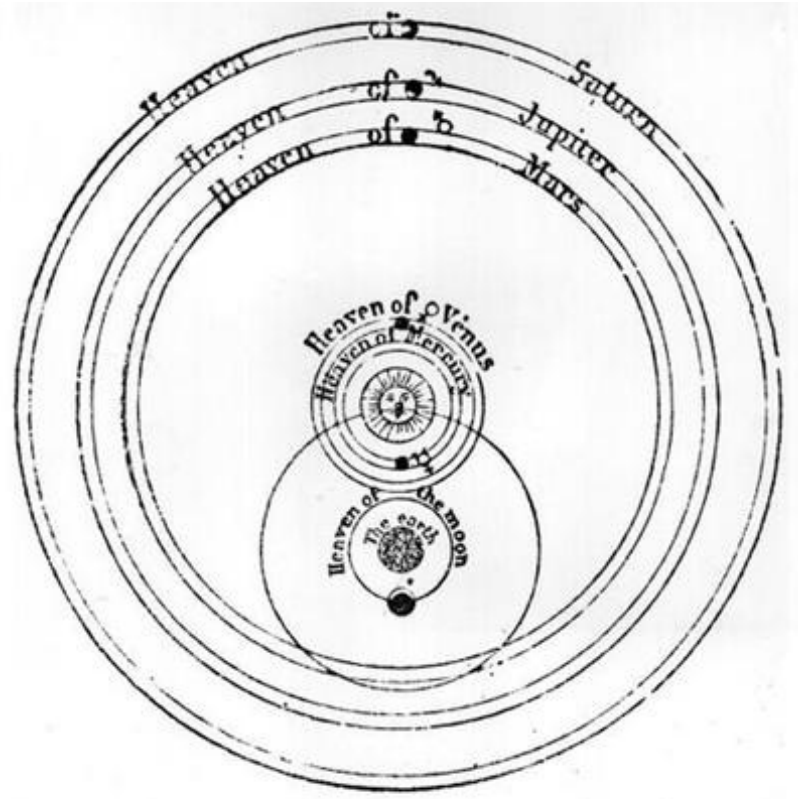
Ayant obtenu cette loi, Newton fut capable de démontrer les lois de Kepler ainsi que de les généraliser (ce que nous allons faire un peu plus loin). En effet, il montra qu'on obtient des orbites elliptiques dans tout système impliquant une force centrale en r^{-2} à condition que l'énergie mécanique totale du système soit négative (le système est alors dit *lié*). On obtient des orbites paraboliques dans le cas limite où l'énergie mécanique totale est identiquement nulle (système *libre*) et des orbites hyperboliques si l'énergie mécanique est positive (encore un système dit *libre*).

Il montra également que la première loi de Kepler doit être légèrement modifiée ; en fait, c'est le centre de masse du système qui doit se trouver au foyer de l'ellipse. Par exemple, dans le cas du système Soleil-Jupiter, le centre de masse se trouve juste à la surface du Soleil. C'est la raison de l'imprécision de la formulation de Kepler, qui ne reposait que sur des mesures de position des planètes.

16.3. Un peu d'histoire sur les systèmes du Monde

16.3.1. Brahe, Copernic et Kepler

À la fin du XVI^e siècle, l'astronome Danois Tycho Brahe effectue de nombreuses observations relatives au mouvement des planètes. Il espérait pouvoir les utiliser pour valider son modèle du système solaire dans lequel le Soleil tournait autour de la Terre et toutes les autres planètes autour du Soleil.



Le système de Tycho Brahe.

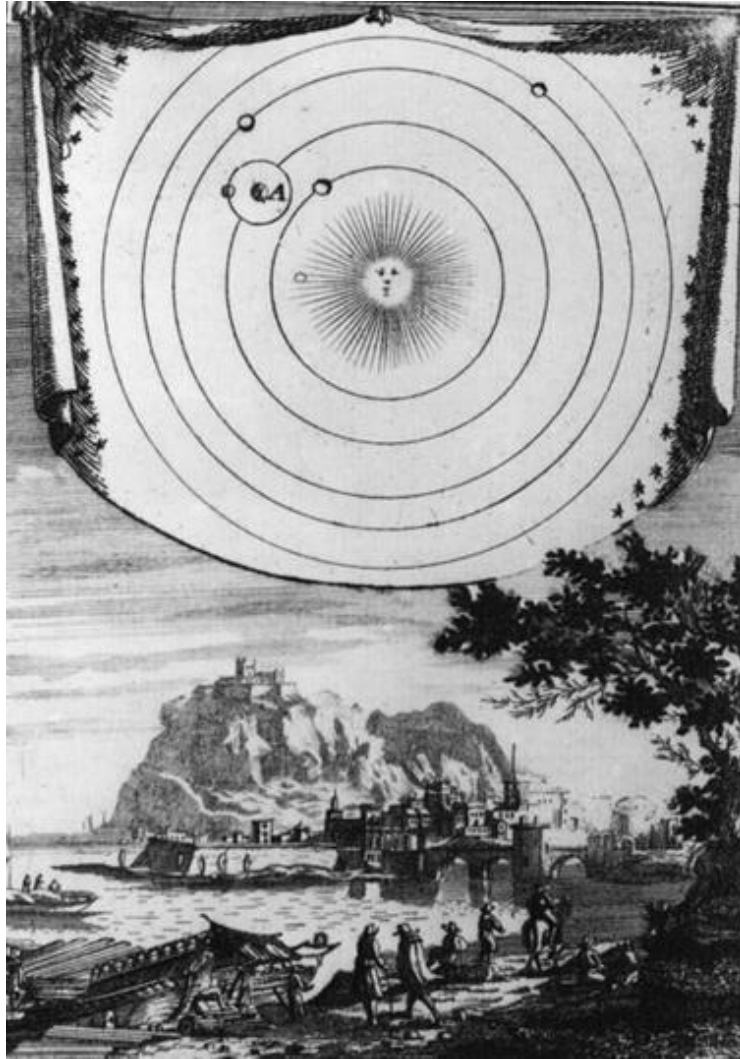
En revanche, l'astronome polonais Nicolas Copernic (1473-1543) est universellement connu pour son système héliocentrique, dans lequel la Terre et toutes les autres planètes tournent autour du Soleil.

Dans un manuscrit – *De hypothesibus motuum caelestium a se constitutis commentariolus*, plus connu sous le titre abrégé de *Commentariolus* – distribué discrètement à des amis sûrs en 1512 ou 1513 (en tout cas avant le 1^{er} mai 1514), Nicolas Copernic formule les principes de sa théorie héliocentrique du monde, mais celle-ci ne sera publiée entièrement que dans son *De revolutionibus orbium caelestium* (*De la révolution des orbites célestes*), édité à Nuremberg (Allemagne) immédiatement après sa mort, qui survient le 24 mai 1543.

Bien que Copernic mette le Soleil et non pas la Terre au centre du monde, sa théorie du mouvement des astres n'est pas essentiellement différente de celle que Ptolémée exposait vers 141 dans son *Almageste* : elle est aussi à base de cercles et de mouvements uniformes, et les arguments de Copernic contre Ptolémée sont davantage d'ordre philosophique que fondés sur l'observation. De fait, il n'était pas réellement possible à l'époque de prouver que c'est le Soleil et non pas la Terre qui est au centre du monde : le système de Copernic est seulement plus simple sur le plan géométrique.

Cependant, Copernic améliorera de beaucoup les valeurs numériques de Ptolémée, et son système permettra au mathématicien allemand Erasmus Reinhold de calculer des éphémérides astronomiques excellentes, les *Tables pruteniques*, imprimées en 1551. Copernic sera très estimé de ses contemporains pour avoir amélioré et remplacé Ptolémée, mais son système héliocentrique

ne sera considéré que comme une théorie ingénieuse, et non pas comme une vérité. Il faudra attendre Kepler et Galilée pour que ce système commence à s'imposer.



Le système de Copernic.

À la mort de Brahe en 1601, son assistant, Johannes Kepler, hérita des données ainsi accumulées. Après les avoir analysées, il énonça ses trois lois : les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers (1609) ; les aires balayées par les rayons vecteurs allant du centre du Soleil au centre de la planète sont proportionnelles au temps employé à les décrire (1609) ; les carrés des temps de révolution des planètes sont proportionnels au cube des demi grands axes des orbites (1619).

Avec Galilée, Johannes Kepler peut être considéré comme le premier chercheur moderne : *ils n'accordent de confiance qu'à l'observation ou à l'expérience, quitte à rejeter les dogmes établis.*

La confrontation des observations très précises de la position de Mars faites par son maître Tycho Brahe avec les prédictions des *Tables pruteniques* convainc Kepler que l'orbite de

la planète rouge ne peut être décrite ni par un cercle ni par une combinaison de cercles, mais qu'elle est elliptique, le Soleil occupant un des foyers de l'ellipse. Il publie ce résultat – qui constitue la première loi de Kepler – en 1609 dans son *Astronomia nova* (*Astronomie nouvelle*). Il généralise cette loi à d'autres planètes dans ses *Epitome astronomiae copernicanae* de 1618-1621, qui contiennent la première description correcte du système solaire et dans lesquelles est correctement formulée la deuxième loi : les aires balayées en des temps égaux par la droite joignant la planète au Soleil sont égales. La dernière loi – le carré de la période de révolution des planètes est proportionnel au cube de leur distance moyenne au Soleil – est énoncée en 1619 dans *Harmonice mundi* (*L'Harmonie du monde*). Kepler publiera en 1627 les *Tables rudolphines* du mouvement des planètes, qui remplaceront avantageusement les *Tables pruteniques*.

16.3.2. Procès de Galilée, 12 avril-22 juin 1633.

La parution du *De revolutionibus* de Copernic, en 1543, avait bouleversé la cosmologie traditionnelle en substituant l'héliocentrisme au géocentrisme traditionnel. Les théologiens catholiques, mais aussi protestants, rejetèrent la doctrine copernicienne au nom des *affirmations bibliques* sur le Soleil qui se lève et se couche ! La reprise des arguments de Copernic est l'un des motifs du procès qui vaut à Giordano Bruno sa condamnation à mort sur le bûcher le 17 février 1600.

L'hypothèse est pourtant à nouveau soutenue dix ans plus tard par Galilée, qui s'appuie pour la première fois sur des observations réalisées avec des lunettes astronomiques de sa fabrication. En 1616, la condamnation de l'héliocentrisme de Copernic par l'inquisition romaine vise indirectement Galilée, qui est sommé de ne plus aborder le sujet. La publication du *Dialogue sur les deux plus grands systèmes du monde* où Galilée se risque à démontrer la supériorité du système copernicien entraîne sa condamnation publique en 1633 pour avoir professé une doctrine hérétique, contraire aux Écritures. Il doit abjurer lors d'une cérémonie humiliante et terminer sa vie en résidence surveillée tout en pouvant continuer ses travaux.

L'autonomie des sciences modernes fondée sur la méthode expérimentale était niée par ce jugement, retentissante expression d'une suprématie de la théologie sur toute autre science qui sera maintenue par Rome au moyen de la censure et de l'Index jusqu'au XVIII^e siècle. Si Benoît XIV finit par déclarer recevable l'héliocentrisme en 1757, c'est le pape Jean-Paul II qui a procédé à une certaine réhabilitation de Galilée le 31 octobre 1992.

16.3.3. Systèmes du monde – quelques repères chronologiques

Fin du VI^e siècle - début du V^e siècle avant J.-C.

Philolaos propose que la Terre, la Lune, le Soleil et les cinq planètes connues dans l'Antiquité – Vénus, Mercure, Mars, Jupiter et Saturne – tournent autour d'un Feu central.

IV^e siècle avant J.-C.

Aristote (385 env.-322 av. J.-C.), élève de Platon, est en faveur d'un système géocentrique, fondé sur un ensemble de sphères matérielles qui ordonnent le mouvement du Soleil, de la Lune et des planètes.

IV^e siècle avant J.-C.

Héraclide du Pont (388 env.-env. 315 av. J.-C.), un autre élève de Platon, propose que la Terre tourne sur elle-même et que la sphère céleste est fixe.

Vers 250 avant J.-C.

Aristarque de Samos (310 env.-env. 230 av. J.-C.) propose un système héliocentrique.

II^e siècle après J.-C.

Ptolémée (actif entre 127 et 151) développe dans son *Almageste* un système géocentrique très perfectionné et complexe dérivé de celui d'Aristote. Rendant assez bien compte du mouvement des planètes, ce système restera en faveur jusqu'au XVI^e siècle.

1252

Les *Tables alphonsines*, éphémérides fondées sur le système de Ptolémée, sont achevées sous l'égide d'Alphonse X le Sage, roi de Castille et de León (Espagne).

1543

Le *De revolutionibus orbium caelestium* (*Des révolutions des orbes célestes*) est imprimé à Nuremberg. Copernic (1473-1543) y propose son modèle héliocentrique du système solaire.

1551

Les *Tables pruteniques du mouvement des astres* (*Prutenicae tabulae coelestium motuum*) du mathématicien allemand Erasmus Reinhold (1511-1553), fondées sur le système de Copernic, sont imprimées à Tübingen.

1619

Dans son *Harmonices Mundi*, imprimé à Linz, Johannes Kepler (1571-1630) publie la troisième de ses lois cinématiques du mouvement des planètes ; les trois lois de Kepler ont été établies à partir des observations de Tycho Brahe (1546-1601).

22 juin 1633

L'ouvrage de Galilée *Dialogo [...] sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano* (*Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde*), paru en février 1632 à Florence, est condamné par le Saint-Office, qui interdit d'affirmer le mouvement de la Terre, même à titre d'hypothèse.

1687

Isaac Newton (1642-1727) publie dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica* la loi de la gravitation universelle et les lois physiques qui régissent le mouvement des planètes²⁰.

²⁰ Le 24 août 2006, à Prague (République Tchèque), l'assemblée générale de l'Union Astronomique Internationale a fixé de façon claire la définition de ce qu'est une planète. En conséquence Pluton a été rejetée de la liste des planètes officielles du système solaire. Ce système ne contient plus que 8 planètes : Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Pluton tient en effet plus de l'astéroïde que de la planète; voilà qui clôt une controverse qui perdurait depuis la découverte de Pluton en 1930.

16.4. Mouvement d'un point soumis à une force centrale

Le mouvement d'un point matériel A soumis à une force centrale est celui pour lequel l'énergie potentielle d'interaction U de ce point avec un centre de forces O ne dépend que de la norme r du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$. Puisque la force s'écrit ($\|\hat{r}\| = 1$):

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{dU}{dr}\hat{r} \quad (21)$$

elle est donc portée par le vecteur $\vec{r} = r\hat{r}$ et passe donc constamment par le centre O, d'où le nom de *force centrale*.

La force étant centrale, son moment en O est évidemment nul (sachant que $\vec{r} \times \hat{r} = \vec{0}$):

$$\overrightarrow{OA} \times \vec{F} = -\vec{r} \times \left(\frac{dU}{dr} \hat{r} \right) = \vec{0} \quad (22)$$

Donc le moment cinétique²¹ $\vec{L}$ en O de la particule A de masse m (i.e. $\vec{L} = \overrightarrow{OA} \times (m\vec{v})$) est un *vecteur constant* au cours du temps :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OA} \times (m\vec{v}) \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \times (m\vec{v}) + \overrightarrow{OA} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \vec{0} \quad (23)$$

Donc,

$$\boxed{\forall t : \vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \text{cte}} \quad (24)$$

Il en résulte donc aussi que la trajectoire de A est contenue dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$ passant par O. Choisissons ce plan de telle façon que la trajectoire en *coordonnées cylindriques* vérifie $z = 0$.

En coordonnées cylindriques on a :

$$\vec{L} = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + 0\hat{z}) = mr^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \quad (25)$$

et donc la relation (24) implique la constance de la norme de $\vec{L}$,

$$\|\vec{L}\| = L = mr^2\dot{\theta} = \text{cte} \quad (26)$$

²¹ On dit aussi *moment angulaire*. Il s'agit du moment de la quantité de mouvement.

La relation (26) nous apprend notamment qu'un mobile de masse constante parcourt sa trajectoire plus vite lorsqu'il est près du centre de masse (si $r \searrow$ alors $\dot{\theta} \nearrow$).

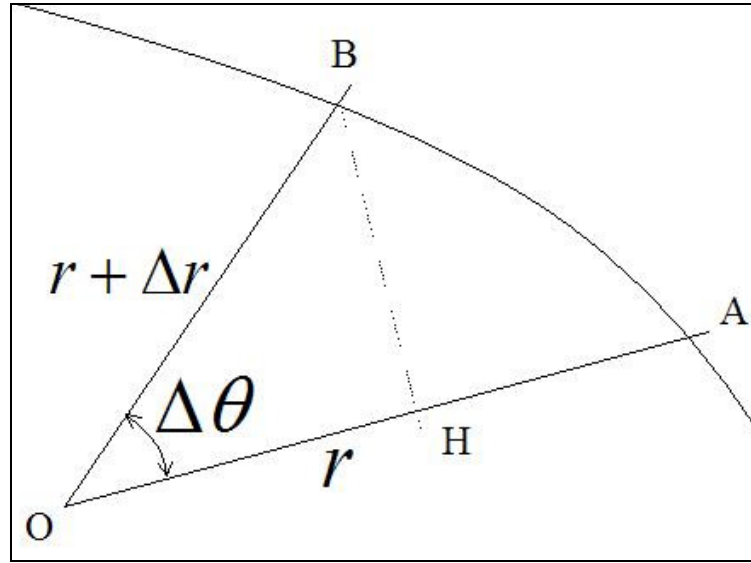
Historiquement, on a introduit la *vitesse aréolaire*,

$$\boxed{V \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dA}{dt}} \quad (27)$$

qui est la vitesse avec laquelle le vecteur position $\vec{r}$ balaye l'aire du plan Oxy :

$$V = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{r \times r \Delta \theta}{2} \right) = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{L}{2m} \quad (28)$$

Dans (28), on regarde le rapport de l'aire parcourue par le mobile pendant la durée Δt . Supposons que pendant cette durée il passe du point A au point B (voir figure).



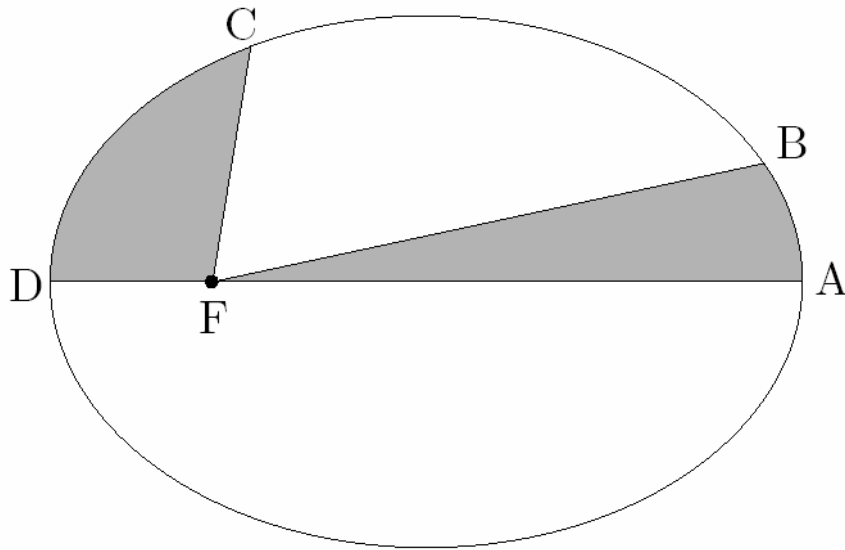
Pour Δt petit on a Δr et $\Delta \theta$ petits et la surface OAB est un triangle dont l'aire est aisément calculable (base fois hauteur divisée par deux) :

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{r \times BH}{2} = \frac{r(r + \Delta r) \sin \Delta \theta}{2} = \frac{r^2 \sin \Delta \theta}{2} + \frac{r \Delta r \sin \Delta \theta}{2} \\ \Delta A &\approx \frac{r^2 \Delta \theta}{2} + \frac{r \Delta r \Delta \theta}{2} \end{aligned} \quad (29)$$

En se limitant au terme d'ordre 1 on a :

$$\begin{aligned}\Delta A &\approx \frac{r^2 \Delta \theta}{2} \\ \frac{\Delta A}{\Delta t} &\approx \frac{r^2}{2} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \\ V &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}\end{aligned}\quad (30)$$

Remarquons que la constance de la vitesse aréolaire démontre directement la deuxième loi de Kepler. Dans le cas d'une trajectoire elliptique on pourrait l'illustrer à l'aide de la figure suivante :



Le foyer F est le centre de force. Les aires des secteurs AFB et CFD sont égales si les durées pour aller de A à B et de C à D sont égales.

On définit aussi la *constante des aires C* comme la mesure du moment cinétique par unité de masse et qui vaut donc aussi deux fois la vitesse aréolaire:

$$\boxed{C \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{L}{m} = 2V = r^2 \dot{\theta}} \quad (31)$$

16.5. Méthode de Binet dans le cas des forces centrales en r^{-2}

Pour trouver l'équation de la trajectoire d'un point soumis à une force centrale en r^{-2} (gravitation universelle ou bien force de Coulomb), il existe une méthode particulière dite de Binet.

Posons,

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}} \quad (32)$$

Ainsi pour $K>0$ on a une force attractive (par exemple la force de gravité entre deux masses, ou bien la force de Coulomb pour deux charges électriques de signes différents), et pour $K<0$ on a une force répulsive (seulement dans le cas de la force de Coulomb pour deux charges électriques de mêmes signes). Posons finalement, pour simplifier, $K = \varepsilon |K|$. Ainsi le cas attractif est obtenu quand $\varepsilon = +1$, et le cas répulsif est obtenu quand $\varepsilon = -1$:

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = -\varepsilon \frac{|K|}{r^2} \hat{\mathbf{r}}} \quad (33)$$

Dans le cas de l'interaction gravitationnelle entre deux masses m et M on a naturellement $|K| = GmM$. Dans le cas de l'interaction coulombienne (force électrique) entre deux charges électriques q_1 et q_2 on a $|K| = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0}$. Ainsi la notation (33) nous permet de traiter mathématiquement les problèmes de Kepler de la force électrique ou de la force gravitationnelle en même temps.

La méthode de Binet consiste à introduire les variables $u = r^{-1}$ (ou $r = u^{-1}$) et les constantes du mouvement (le moment cinétique L ou la constante des aires C) dans l'équation vectorielle $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ écrite en coordonnées cylindriques. En premier lieu nous avons les relations classiques de la cinématique (dans le plan de la trajectoire $z = 0$),

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

La deuxième composante de l'accélération est nulle car elle revient essentiellement à la dérivée de la *constante des aires* !

On a aussi,

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}, \\
 \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}, \\
 r\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{u} \frac{L^2 u^4}{m^2} = \frac{L^2 u^3}{m^2}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Donc (34) et (35) deviennent :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{L}{m} \begin{pmatrix} -\frac{du}{d\theta} \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{L^2}{m^2} \begin{pmatrix} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) u^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Le principe fondamental de la dynamique donne ensuite ((40) est la *formule de Binet*) :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= m\vec{a} \\
 -\varepsilon \frac{|K|}{r^2} \hat{r} &= -m \frac{L^2}{m^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) u^2 \hat{r} \\
 -\varepsilon |K| u^2 &= -\frac{L^2}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) u^2 \\
 \varepsilon |K| &= \frac{L^2}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{m\varepsilon |K|}{L^2}} \tag{40}$$

Si l'on introduit le paramètre *positif et constant* p ,

$$\boxed{p = \frac{L^2}{m|K|} > 0} \tag{41}$$

la formule de Binet prend la forme plus simple :

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\varepsilon}{p}} \quad (42)$$

Cherchons les solutions de (42).

1^{ère} méthode :

Une solution particulière de (42) est la trajectoire circulaire (ce qui n'a de sens d'ailleurs que pour $\varepsilon = +1$ pour avoir $r \geq 0$),

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{p} \text{ ou } r = \frac{p}{\varepsilon} \text{ avec } \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\varepsilon}{p} \right) = 0 \quad (43)$$

Une solution de l'équation homogène associée à (42) est :

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= 0 \\ u &= a \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (44)$$

avec a et θ_0 des constantes.

Une solution générale de (42) est donc la somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène :

$$u = a \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\varepsilon}{p} = \frac{ap \cos(\theta - \theta_0) + \varepsilon}{p} \quad (45)$$

2^{ème} méthode :

Partant de (42),

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\varepsilon}{p} \quad (46)$$

considérons le changement de variable $w = u - \frac{\varepsilon}{p}$ donc $\frac{dw}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}$ et $\frac{d^2w}{d\theta^2} = \frac{d^2u}{d\theta^2}$. Donc (46) s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\varepsilon}{p} &\rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left(w + \frac{\varepsilon}{p} \right) + \left(w + \frac{\varepsilon}{p} \right) = \frac{\varepsilon}{p} \\ \frac{d^2w}{d\theta^2} + w &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

La solution est donc,

$$\begin{aligned} w &= u - \frac{\varepsilon}{p} = a \cos(\theta - \theta_0) \\ u &= a \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\varepsilon}{p} \end{aligned} \quad (48)$$

ce qui est bien identique à (45).

Traditionnellement, on appelle la valeur absolue du produit $|ap|$ *excentricité de la trajectoire* et on la note e (ainsi définie l'excentricité est toujours positive, mais la nature positive ou négative de ap (cela dépend du signe de a) peut être maintenue en imposant un déphasage additionnel de $\pm\pi$ dans le cosinus (ce qui revient à parler de la courbe symétrique de la trajectoire par rapport à la droite orthogonale à la droite d'équation $\theta = \theta_0$):

$$e = |ap| \geq 0 \rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{e \cos(\theta - \theta_0) + \varepsilon}{p} \quad (49)$$

ou,

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) + \varepsilon} \quad (50)$$

Remarquons que lorsque $\theta - \theta_0 = 0$ on a r minimal car le cosinus est alors maximal et cela aussi bien dans le cas attractif que répulsif,

$$r_{\min} = \frac{p}{e + \varepsilon} \quad (51)$$

Quand $\theta - \theta_0 = 0$ on dit que le mobile est au *périgée* (si le centre de force est la Terre) ou *périastre* (quand le centre de force est un astre quelconque), ou même *périhélie* (quand le centre de force est le Soleil). Quand le mobile est au contraire au plus loin du centre de force, on dit que l'on a atteint l'*apogée* ou *apoastre*, ou même l'*aphélie* (prononcez « apéli »).

Nous préciserons l'importance de l'excentricité dans la section consacrée aux aspects énergétiques du mouvement. Essentiellement, « plus l'excentricité est grande plus la vitesse initiale de la particule est importante ».

Remarques :

1. Pour $\varepsilon = +1$ on a une force attractive, et pour $\varepsilon = -1$ on a une force répulsive. Alors on ne peut avoir une trajectoire strictement circulaire (i.e. r constant au cours du temps) que si l'excentricité est nulle ($e = 0$) et si la force est attractive (pour avoir un rayon positif sachant que $p > 0$).

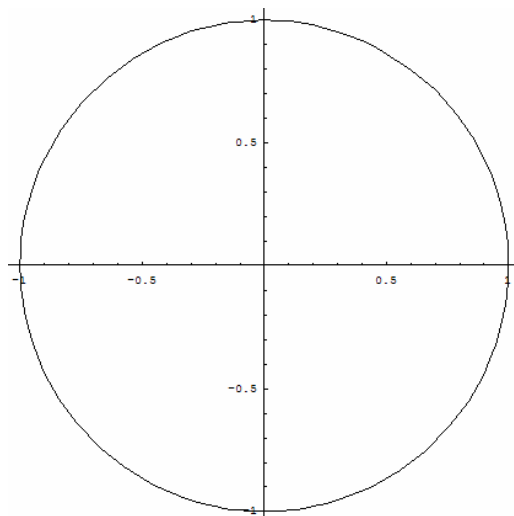
2. Pour avoir une trajectoire fermée, il faut que r ne deviennent jamais infini. Or $-1 \leq \cos(\theta - \theta_0) \leq +1 \Rightarrow \varepsilon - e \leq e \cos(\theta - \theta_0) + \varepsilon \leq \varepsilon + e$. On remarque donc que si $e < 1$ le dénominateur de (50) n'est jamais nul dès que $\varepsilon = +1$ (force attractive) car alors $\varepsilon - e > \varepsilon - 1 = 0$. Les trajectoires pour lesquelles $e < 1$ sont appelées *ellipses*. De plus on ne peut pas avoir de trajectoires fermées dans le cas répulsif (car sinon r serait négatif sachant que le paramètre p est positif !).

3. Le cas pour lequel on a $e = 1$ est la *parabole*. On a alors $\varepsilon - 1 \leq \cos(\theta - \theta_0) + \varepsilon \leq \varepsilon + 1$. Dans ce cas la particule peut atteindre l'infini puisque le dénominateur de (50) peut s'annuler. Mais pour que r soit positif la force doit encore être attractive ($\varepsilon = +1$) car le paramètre p est positif.

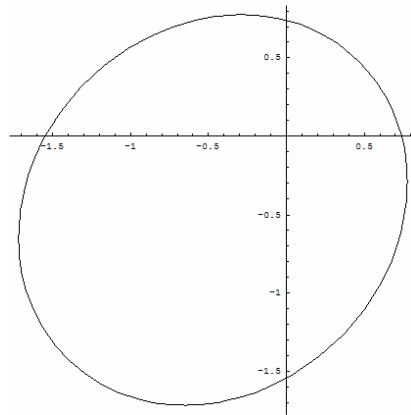
4. Les cas pour lesquels $e > 1$ sont associés aux *hyperboles*. Dans le cas attractif on a $1 - e \leq e \cos(\theta - \theta_0) + 1 \leq 1 + e$ et dans le cas répulsif on a $-1 - e \leq e \cos(\theta - \theta_0) - 1 \leq -1 + e$. Dans ces cas la particule peut atteindre l'infini (parce que le dénominateur de (50) peut encore s'annuler).

Les quatre types de trajectoires possibles (cercle, ellipse, parabole et hyperbole) sont appelées *coniques* (car on peut toutes les obtenir par intersection d'un plan avec un cône). La relation (50) est appelée *forme polaire de la conique*. Le paramètre p de la conique est souvent simplement appelé *paramètre de la conique*.

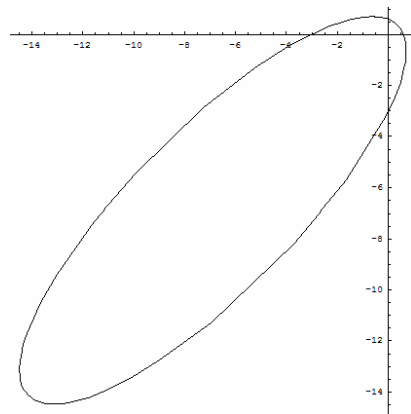
Dans les figures qui suivent, on trace des coniques ayant toutes $p = 1$ et $\theta_0 = \pi/4$ en faisant varier l'excentricité. Le centre de la force centrale est toujours situé à l'origine O de coordonnées cartésiennes (0,0).



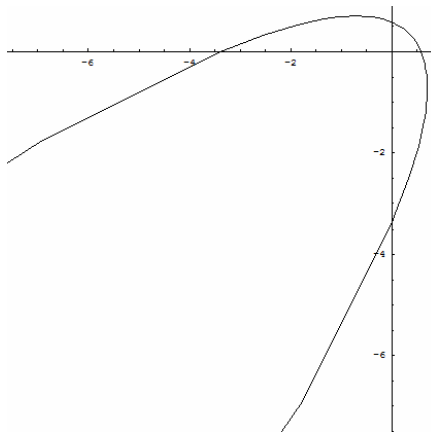
Excentricité nulle (cercle de rayon p). Seulement possible dans le cas attractif.



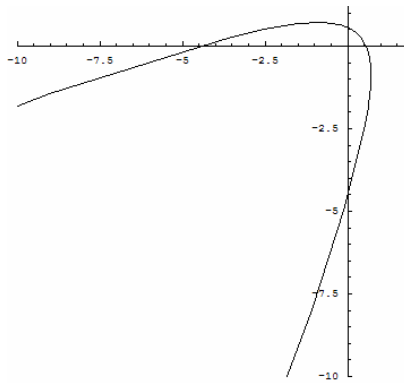
Excentricité à 0,5 (ellipse). Seulement possible dans le cas attractif.



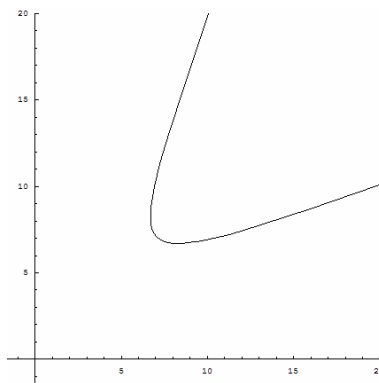
Excentricité à 0,9 (ellipse). Seulement possible dans le cas attractif.



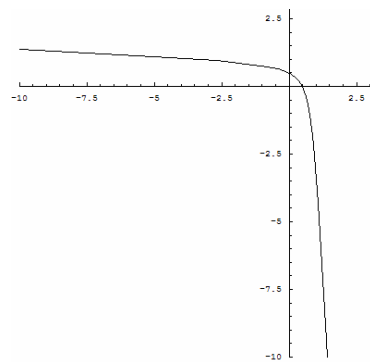
Excentricité à 1,0 (parabole). Seulement possible dans le cas attractif.



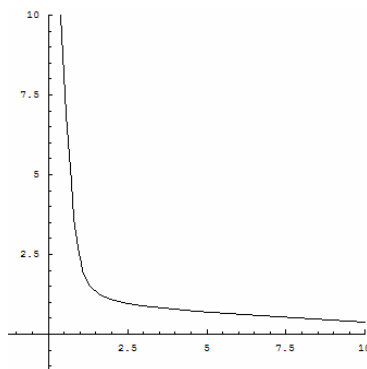
Excentricité à 1,1 (branche d'hyperbole). Cas attractif.



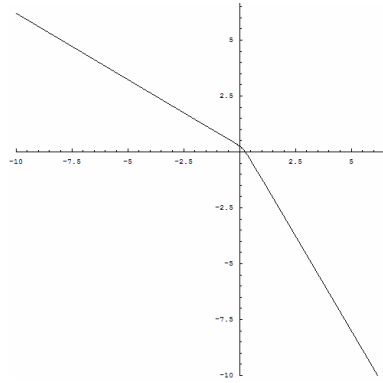
Excentricité à 1,1 (branche d'hyperbole). Cas répulsif.



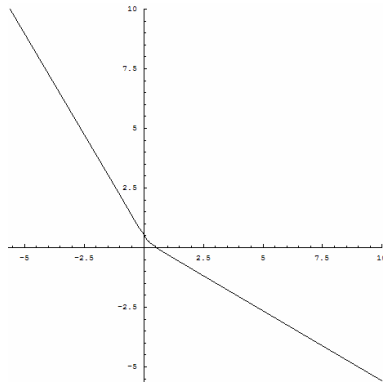
Excentricité à 1,5 (branche d'hyperbole). Cas attractif.



Excentricité à 1,5 (branche d'hyperbole). Cas répulsif.

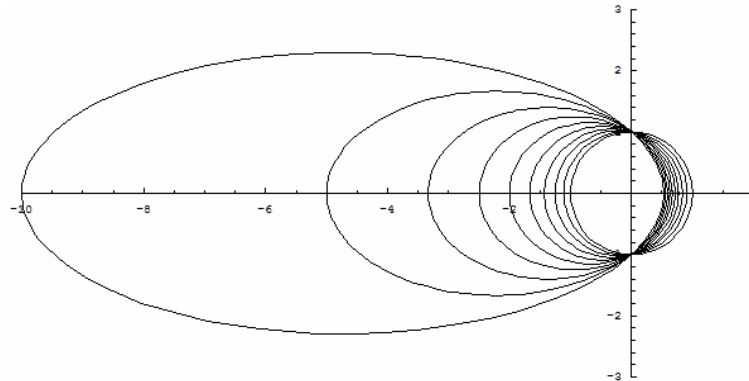


Excentricité à 4,0 (branche d'hyperbole). Cas attractif.

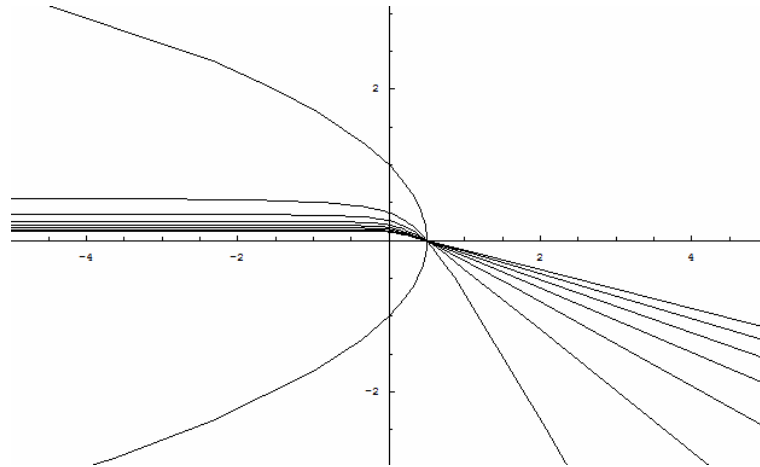


Excentricité à 4,0 (branche d'hyperbole). Cas répulsif.

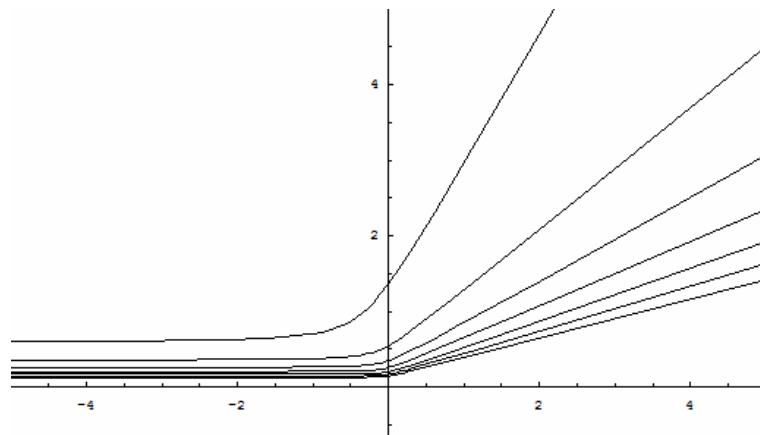
Dans la figure qui suit, on prend $p = 1$, $\theta_0 = 0$ et on fait varier l'excentricité de 0 à 0,9 par pas de 0,1.



Dans la figure qui suit, on prend $p = 1$ et on fait varier l'excentricité de 1,0 à 8,0 par pas de 1 dans le cas attractif. Le mobile arrive toujours de la gauche ($\theta = \pi$). Cette figure vous donne une idée de la déflexion subie par le mobile en fonction de l'excentricité de sa trajectoire.



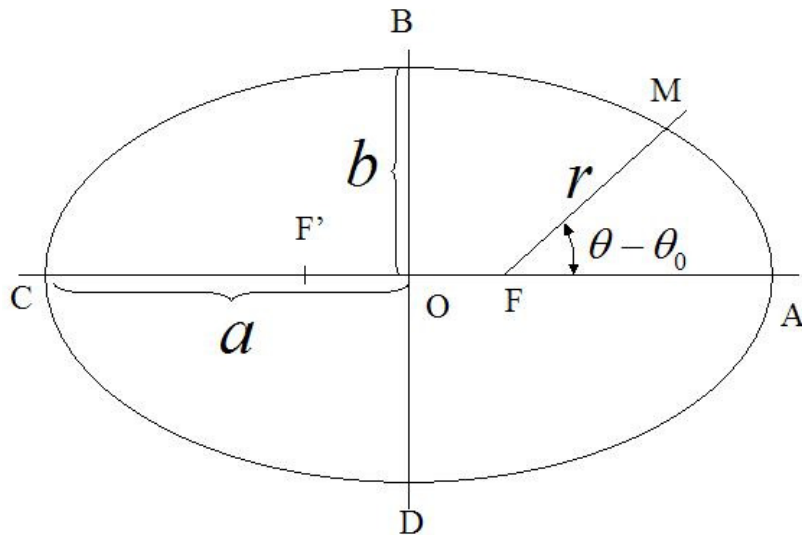
La figure suivante est identique à la précédente si ce n'est que l'on considère cette fois le cas répulsif.



16.6. Quelques relations utiles à propos des ellipses

Étant donnée l'importance dans les applications de la solution elliptique (songez aux mouvements des planètes autour du Soleil), on va dans ce qui suit caractériser en détail les paramètres généraux des ellipses : demi grand axe, demi petit axe et la signification géométrique de l'excentricité.

Soit une ellipse d'excentricité e et de foyers F et F' . On note O le centre géométrique de l'ellipse.



On a $0 \leq e < 1$, $\varepsilon = +1$ et donc,

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) + 1} \quad (52)$$

Quand $\theta - \theta_0 = 0$ on a,

$$r_{\min} = FA = \frac{p}{e + 1} \quad (53)$$

Quand $\theta - \theta_0 = \pi$ on a,

$$r_{\max} = FC = \frac{p}{1 - e} \quad (54)$$

Le demi grand axe de l'orbite, a , est donc donné par :

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = \frac{p - ep + p + ep}{1 - e^2} = \frac{2p}{1 - e^2} \quad (55)$$

$$\boxed{a = \frac{p}{1 - e^2}} \quad (56)$$

Avec O le centre de l'ellipse, on a aussi :

$$OF = OA - r_{\min} = a - \frac{p}{1 + e} \quad (57)$$

et quand le point M est au point B on a (on se sert du fait qu'alors $\cos(\theta - \theta_0) = -OF / BF$),

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) + 1} \rightarrow BF = \frac{p}{-e \frac{OF}{BF} + 1} = \frac{p}{\frac{BF - eOF}{BF}} = \frac{p}{BF - eOF} BF \quad (58)$$

Donc,

$$\begin{aligned} BF &= \frac{p}{BF - eOF} BF \\ BF - eOF &= p \\ BF &= p + e \left(a - \frac{p}{1+e} \right) \\ BF &= p \left(1 - \frac{e}{1+e} \right) + ea \\ BF &= \frac{p}{1+e} + ea \end{aligned} \quad (59)$$

Or,

$$BF^2 = OF^2 + b^2 = \left(a - \frac{p}{1+e} \right)^2 + b^2 \quad (60)$$

avec b le demi grand axe de l'orbite. Donc,

$$\begin{aligned} b^2 &= BF^2 - \left(a - \frac{p}{1+e} \right)^2 \\ b^2 &= \left(\frac{p}{1+e} + ea \right)^2 - \left(a - \frac{p}{1+e} \right)^2 \\ b^2 &= \left(\frac{p}{1+e} + ea + a - \frac{p}{1+e} \right) \left(\frac{p}{1+e} + ea - a + \frac{p}{1+e} \right) \\ b^2 &= a(1+e) \left(\frac{2p}{1+e} + a(e-1) \right) = a(1+e) \left(\frac{2p}{1+e} + \frac{p}{1-e^2} (e-1) \right) \\ b^2 &= \frac{p}{1-e^2} (1+e) \left(\frac{2p}{1+e} - \frac{p}{1+e} \right) = \frac{p}{1-e} \frac{p}{1+e} = \frac{p^2}{1-e^2} \end{aligned} \quad (61)$$

Donc,

$$\boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}} \quad (62)$$

(56) et (62) impliquent aussi :

$$\boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}} \quad (63)$$

Cette dernière relation nous apprend que l'ellipse devient un cercle dès que $e = 0$ car alors $a = b$.

Enfin l'excentricité est simplement le rapport de deux longueurs:

$$e = \frac{OF}{OA} \quad (64)$$

ce qui, en particulier, nous apprend que lorsque l'on a un cercle ($e = 0$), les deux foyers se confondent avec O.

Démontrons (64) :

On a,

$$\frac{OF}{OA} = \frac{a - r_{\min}}{a} = 1 - \frac{r_{\min}}{a} = 1 - \frac{p}{1 + e} \frac{1}{a} \quad (65)$$

or, d'après (56),

$$\frac{OF}{OA} = 1 - \frac{1 - e^2}{1 + e} = 1 - (1 - e) = e \quad (66)$$

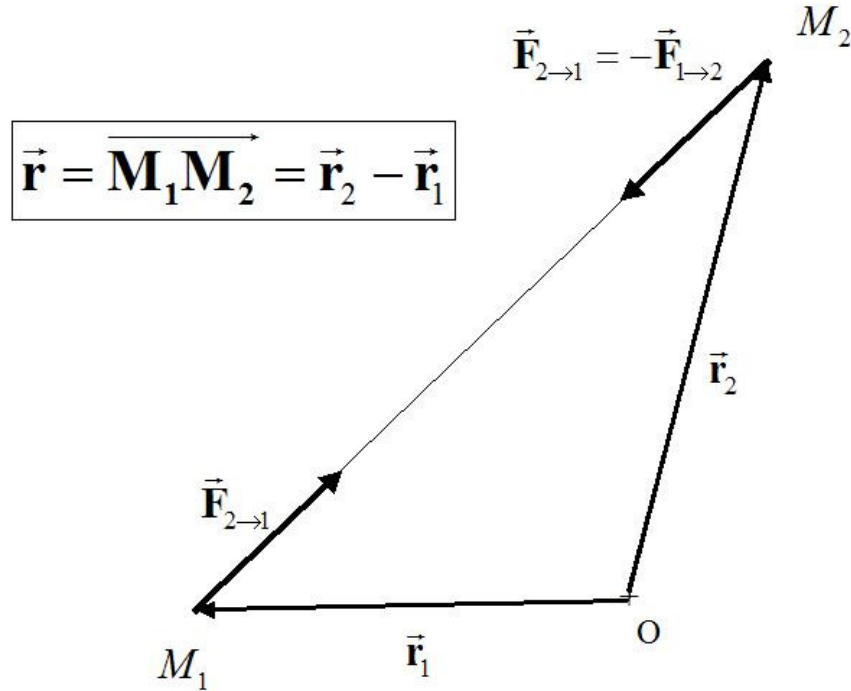
16.7. Réduction du problème à deux corps

Le problème de deux corps isolés en interaction gravitationnelle (par exemple ; pour le cas de l'interaction coulombienne il en est de même) se ramène à l'étude d'un point soumis à une *seule* force centrale. Dans ce qui suit nous allons le vérifier.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué respectivement aux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 permet d'écrire (avec $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ relativement à une origine O quelconque) :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}(r) \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = +\vec{F}(r) \end{aligned} \quad (67)$$

Ces deux équations vectorielles sont équivalentes à six équations scalaires (après projection sur des axes convenables), couplées par l'intermédiaire de la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}(r)$.



Cependant, puisque le système des deux points matériels est isolé (on ne considère pas d'autre force agissant sur le système), son centre de masse possède, dans le référentiel d'étude (R), un vecteur vitesse constant et est donc animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Celui-ci dépend des conditions initiales du problème mais non plus de la manière avec laquelle les deux points M_1 et M_2 vont évoluer au cours du temps.

Il semble ainsi assez naturel de décomposer le mouvement des deux points en deux parties : une partie décrivant le mouvement d'ensemble du centre d'inertie G des deux points et une partie décrivant le mouvement d'un point par rapport à l'autre (ce que l'on nomme *mouvement relatif*).

Le centre d'inertie G du système à deux corps possède le vecteur position:

$$\overrightarrow{OG} = \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (68)$$

En ajoutant membres à membres les deux équations (67), on obtient bien:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -\vec{F}(r) + \vec{F}(r) = \vec{0} \quad (69)$$

Par conséquent, $\vec{v}(G) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_0 = \overrightarrow{cte}$. On montre ainsi que G est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme ; le référentiel barycentrique R_b des deux points est donc galiléen.

En notant $\vec{\mathbf{R}}_0$ le vecteur position initial de G, il vient,

$$\vec{\mathbf{R}}(t) = \vec{\mathbf{R}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t \quad (70)$$

A partir des équations différentielles (67), on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} &= -\frac{1}{m_1} \vec{\mathbf{F}}(r) \\ \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} &= +\frac{1}{m_2} \vec{\mathbf{F}}(r) \end{aligned} \quad (71)$$

En retranchant la première équation à la deuxième, on peut faire apparaître le vecteur position relatif $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$. En effet :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} &= -\frac{1}{m_1} \vec{\mathbf{F}}(r) \\ \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} &= +\frac{1}{m_2} \vec{\mathbf{F}}(r) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{\mathbf{F}}(r) = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \vec{\mathbf{F}}(r) \quad (72)$$

Et si on définit (μ est appelé *masse réduite* du système),

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad (73)$$

Alors,

$$\boxed{\mu \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}(r)} \quad (74)$$

On dit que μ est la *moyenne harmonique* de m_1 et m_2 puisque :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (75)$$

Soit le point fictif M, de masse μ (*masse réduite* du système) et possédant, dans le référentiel barycentrique (galiléen), le vecteur position, $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{GM}} = \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}$. L'équation (74) montre que ce point fictif est soumis à la seule force centrale $\vec{\mathbf{F}}(r)$, son mouvement est notamment plan et possède plusieurs propriétés intéressantes (vitesse aréolaire constante ; trajectoire de type conique par exemple).

Par ailleurs, la connaissance du mouvement du point M par rapport à G (autrement dit la connaissance de $\vec{r} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ en fonction du temps) permet de remonter aux mouvements des deux points matériels de départ M_1 et M_2 . On peut en effet écrire le système vectoriel suivant :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \vec{R} &= m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{aligned} \quad (76)$$

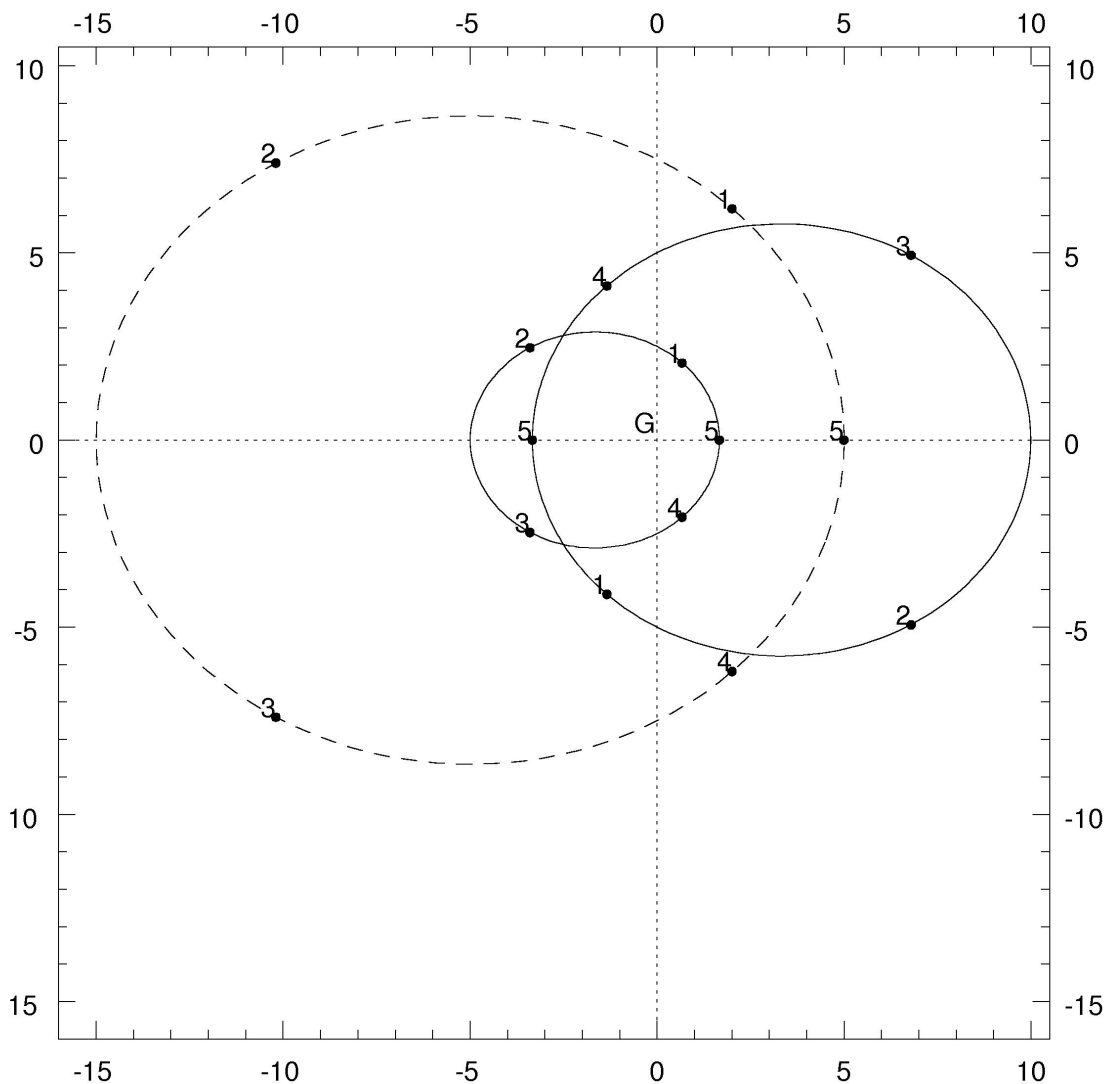
Ainsi, connaissant $\vec{r} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et $\vec{R}$ on en déduit :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases} \quad (77)$$

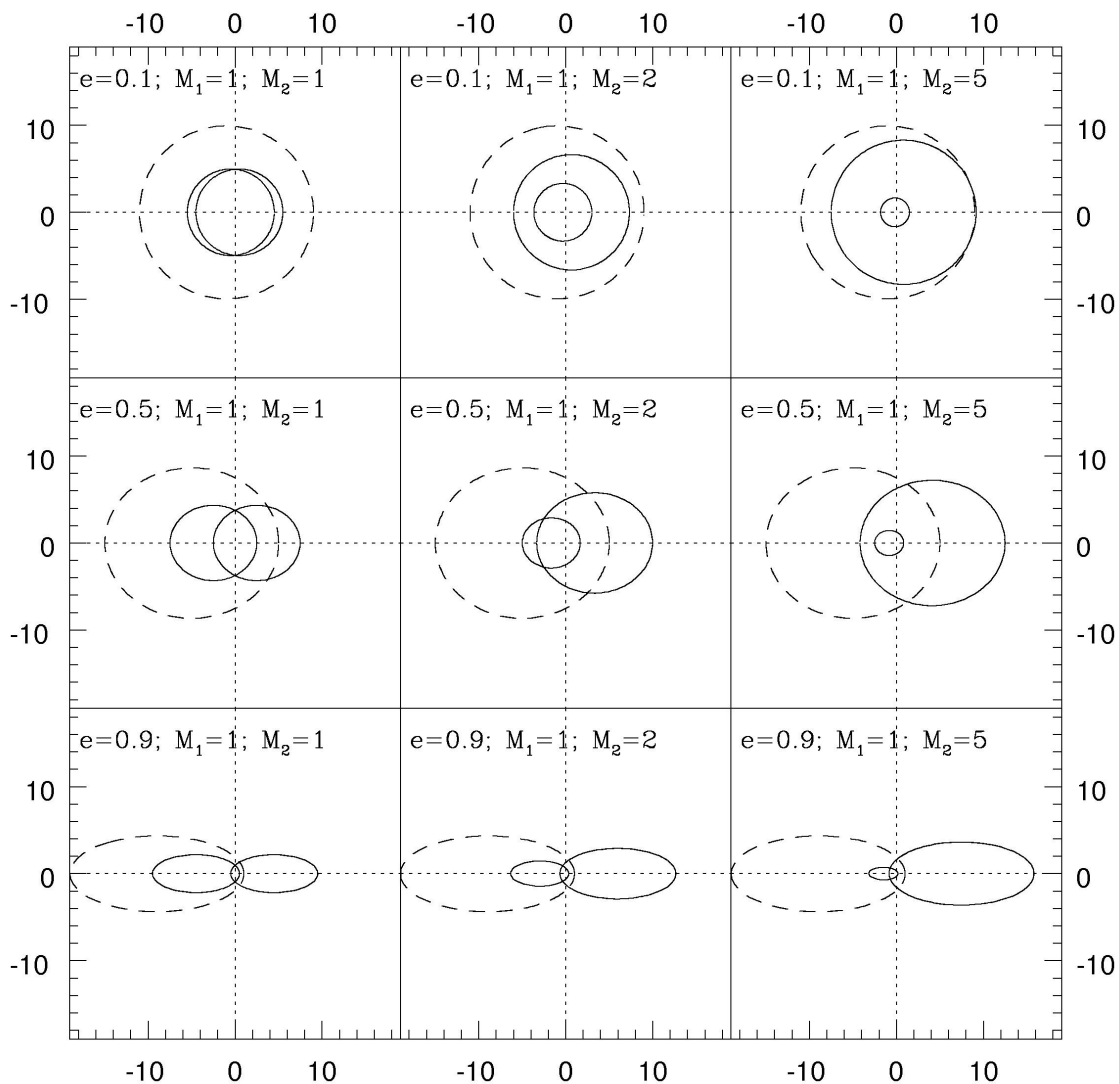
Dans la suite, on peut simplifier l'expression des solutions (77) en se plaçant d'emblée dans le référentiel barycentrique galiléen ($O \rightarrow G$) ; alors $\vec{R} = \vec{0}$ (on ignore le mouvement rectiligne et uniforme du barycentre) et finalement :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2} = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}} \quad (78)$$

Les trajectoires des points M_1 et M_2 se déduisent donc de celle de la particule réduite M de masse μ par une simple homothétie (un agrandissement ou bien un élargissement): les trajectoires de M_1 et M_2 par rapport à G sont obtenues à partir de celle de M par rapport à G ou (ce qui est identique d'après la relation de définition $\vec{r} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$) à partir de celle de M_2 par rapport à M_1 . Le foyer de la conique est le centre de masse du système, ce que Kepler n'avait pas vu avec ses observations. Les figures qui suivent vous illustrent quelques solutions elliptiques du problème de Kepler gravitationnel.



Configurations orbitales pour $e = 0,5$ et $m_2/m_1 = 2$. Les trois ellipses ont pour foyer le centre de masse G qui se trouve à l'intersection des axes. L'objet le plus massif est celui qui parcourt l'orbite la plus petite (cf. relations (78)). L'orbite en pointillés est celle de la particule fictive M de masse réduite μ tracée relativement à G. Les nombres indiqués sur les orbites indiquent les positions relatives par rapport à G des 3 masses à 5 instants distincts.



Ici on présente plusieurs solutions elliptiques en faisant varier le rapport des masses et l'excentricité. Le centre de masse est toujours situé à l'intersection des axes. L'orbite en pointillés est celle de la particule fictive M de masse réduite μ .

16.8. Loi des aires dans différents référentiels

A partir de la loi de la gravitation universelle, Newton démontra alors la loi des aires, qui découle de la conservation du moment cinétique dans tout système gouverné par une force centrale. En cherchant la démonstration de la troisième loi de Kepler, il obtient le résultat général valable pour tout système binaire composé des masses m_1 et m_2 (a est le demi grand axe de l'orbite elliptique) :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (79)$$

Démonstration :

Ce résultat s'obtient relativement facilement. En effet, la vitesse aréolaire s'écrit (on considère ici la masse réduite μ du système ; cf. relation (28)) :

$$V = \frac{L}{2\mu} = \frac{\pi ab}{T} \quad (80)$$

où a et b sont le demi grand axe et le demi petit axe de l'orbite elliptique parcourue avec la période T . L'aire d'une ellipse est en effet πab . Donc,

$$T = \pi ab \frac{2\mu}{L} \quad (81)$$

Or (cf. (63)), $b = a\sqrt{1-e^2}$ et $L = \sqrt{p\mu|K|}$ (d'après (41)) donc,

$$T = \pi ab \frac{2\mu}{L} \rightarrow T^2 = \pi^2 a^2 b^2 \frac{4\mu^2}{L^2} = \pi^2 a^4 (1-e^2) \frac{4\mu^2}{p\mu|K|} \quad (82)$$

Mais $p = a(1-e^2)$ (cf. (56)) donc,

$$T^2 = \pi^2 a^3 \frac{4\mu}{|K|} = 4\pi^2 a^3 \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{1}{G m_1 m_2} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (83)$$

ce qui conclut la démonstration.

La relation précédente est valable dans le cas où le mouvement étudié est celui de M_1 par rapport à M_2 (ou celui de M_2 par rapport à M_1) : en effet la masse considérée est celle de la particule réduite, μ .

Mais on peut aussi écrire (relation de Chasles et dérivation par rapport au temps):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1} \\ \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM_1} &= \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OG} + \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} \\ m_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM_1} &= m_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OG} + m_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} \\ m_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM_1} &= \vec{0} + m_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} \end{aligned} \quad (84)$$

Or (principe fondamental de la dynamique pour la masse m_1),

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM_1} = + \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (85)$$

Donc,

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (86)$$

ou,

$$\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} = \frac{Gm_2}{r^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (87)$$

Or nous savons aussi que dans le référentiel barycentrique (cf. relations (78)),

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1} = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (88)$$

ce qui, en termes de normes, signifie :

$$GM_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad (89)$$

Donc (87) se réécrit :

$$\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} = Gm_2 \frac{(m_2)^3}{(m_1 + m_2)^3} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{GM_1^3} \quad (90)$$

et avec (88) :

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} = -G \frac{(m_2)^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_1}}{GM_1^3}} \quad (91)$$

(91) est l'équation différentielle qui donne le mouvement de M_1 par rapport à G.

De manière similaire, nous pourrions aussi montrer que :

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_2} = -G \frac{(m_1)^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_2}}{GM_2^3}} \quad (92)$$

(92) est l'équation différentielle qui donne le mouvement de M_2 par rapport à G.

La relation (92) peut en effet s'obtenir sachant que,

$$\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_2} = -\frac{Gm_1}{r^3} \overrightarrow{M_1M_2} \quad (93)$$

et que,

$$\overrightarrow{GM_2} = +\frac{m_1}{m_1+m_2} \overrightarrow{r} = +\frac{m_1}{m_1+m_2} \overrightarrow{M_1M_2} = +\frac{m_1}{m_1+m_2} \overrightarrow{GM} \quad (94)$$

D'autre part, nous avons,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} \quad (95)$$

donc,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{M_1M_2} &= \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_2} - \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{GM_1} \\ \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{M_1M_2} &= -\frac{Gm_1}{r^3} \overrightarrow{M_1M_2} - \frac{Gm_2}{r^3} \overrightarrow{M_1M_2} \end{aligned} \quad (96)$$

et enfin,

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{M_1M_2} = -G(m_1+m_2) \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}} \quad (97)$$

(97) est l'équation différentielle qui donne le mouvement de M_2 par rapport à M_1 .

Nous constatons donc que les équations différentielles (91), (92) et (97) sont toutes de la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{X} = -G\xi \frac{\vec{X}}{X^3} \quad (98)$$

où ξ est une fonction des masses m_1 et m_2 et $\vec{X}$ un vecteur position d'un point par rapport à une origine qui est soit le centre de masse G, soit l'une des deux masses.

Pour que le facteur qui se trouve devant $\frac{\vec{X}}{X^3}$ soit de la forme Gm_1m_2 (pour retrouver l'équation différentielle d'un problème de Kepler gravitationnel) on est conduit à introduire des masses réduites généralisées du type :

$$\mu_g = \frac{m_1m_2}{\xi} \quad (99)$$

Alors (98) peut se réécrire :

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{X} = -G\xi \frac{\vec{X}}{X^3} \rightarrow m_1m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{X} = -Gm_1m_2\xi \frac{\vec{X}}{X^3} \quad (100)$$

$$\begin{aligned}\frac{m_1 m_2}{\xi} \frac{d^2}{dt^2} \vec{X} &= -G m_1 m_2 \frac{\vec{X}}{X^3} \\ \mu_g \frac{d^2}{dt^2} \vec{X} &= -G m_1 m_2 \frac{\vec{X}}{X^3}\end{aligned}\quad (101)$$

La dernière relation de (101) est formellement identique à (74) pour une interaction gravitationnelle entre deux masses. En particulier la 3^{ème} loi de Kepler est donc vérifiée et l'on peut écrire (cf. relation (83)):

$$T^2 = \pi^2 a^3 \frac{4\mu_g}{|K|} \rightarrow T^2 = \pi^2 a^3 \frac{4\mu_g}{G m_1 m_2} \quad (102)$$

On peut donc établir trois formes distinctes de la 3^{ème} loi de Kepler selon le point dont on étudie le mouvement et selon l'origine par rapport à laquelle on décrit ce mouvement. Voir tableau ci-dessous.

Mouvement de M_1 par rapport à G	Mouvement de M_2 par rapport à G	Mouvement de M_2 par rapport à M_1
$\mu_1 = \frac{m_1 (m_1 + m_2)^2}{m_2^2}$	$\mu_2 = \frac{m_2 (m_1 + m_2)^2}{m_1^2}$	$\mu_3 = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
$\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_2^3}$	$\frac{T^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^3}$	$\frac{T^2}{a_3^3} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{1}{m_1 + m_2}$
Demi grand axe a_1	Demi grand axe a_2	Demi grand axe $a_3 = a_1 + a_2$

16.9. Aspects énergétiques du problème de Kepler

16.9.1. Signe de l'énergie mécanique et excentricité de la trajectoire conique

Les interactions gravitationnelle ou coulombienne étant centrales, on a donc affaire à des forces conservatives et donc l'énergie mécanique doit se conserver durant le mouvement. Le problème de Kepler à deux corps se ramenant à l'étude du mouvement d'une particule fictive de masse μ l'énergie mécanique s'écrit donc simplement :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} \quad (103)$$

avec μ la masse réduite, v la vitesse de M_2 par rapport à M_1 et r la distance entre les deux corps.

On peut montrer que (voir démonstration ci-dessous):

$$E_m = \frac{1}{2} G m_1 m_2 \frac{e^2 - 1}{p} \quad (104)$$

avec e l'excentricité des trajectoires et p le paramètre de la conique.

On constate donc que les trois types de trajectoires possibles correspondent à des domaines bien précis en ce qui concerne la valeur de l'énergie mécanique totale :

1. Si la trajectoire est elliptique ou circulaire (*système lié*) on a $0 \leq e < 1$ et donc $E_m < 0$;
2. Si la trajectoire est parabolique (*système libre*) on a $e = 1$ et donc $E_m = 0$;
3. Si la trajectoire est hyperbolique (*système libre*) on a $e > 1$ et donc $E_m > 0$.

Démonstration :

On a,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} \quad (105)$$

avec (relation (37)),

$$\vec{v} = \frac{L}{\mu} \begin{pmatrix} -\frac{du}{d\theta} \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

et (relation (45)),

$$u = \frac{e \cos(\theta - \theta_0) + 1}{p} \quad (107)$$

Donc,

$$E_m = \frac{1}{2} \mu \frac{L^2}{\mu^2} \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) - \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (108)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) - \frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Or,

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{e \sin(\theta - \theta_0)}{p} \quad (109)$$

Puisque l'énergie mécanique totale se conserve dans le mouvement, on peut donc évaluer (108) en n'importe quel point de la trajectoire. Choisissons le périastre (i.e. $\theta = \theta_0$) pour lequel on a donc,

$$u = \frac{e+1}{p} \quad (110)$$

et,

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \quad (111)$$

Finalement,

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} \left(\frac{1+e}{p} \right)^2 - \frac{Gm_1 m_2 (1+e)}{p} \quad (112)$$

De plus (d'après (41)),

$$p = \frac{L^2}{\mu |K|} = \frac{L^2}{\mu Gm_1 m_2} \quad (113)$$

Donc (112) devient,

$$E_m = \frac{1}{2} Gm_1 m_2 p \left(\frac{1+e}{p} \right)^2 - \frac{Gm_1 m_2 (1+e)}{p}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{p} \left[(1+e)^2 - 2(1+e) \right] \quad (114)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{p} [e^2 - 1]$$

16.9.2. Notion de paramètre d'impact – Changement d'orbite

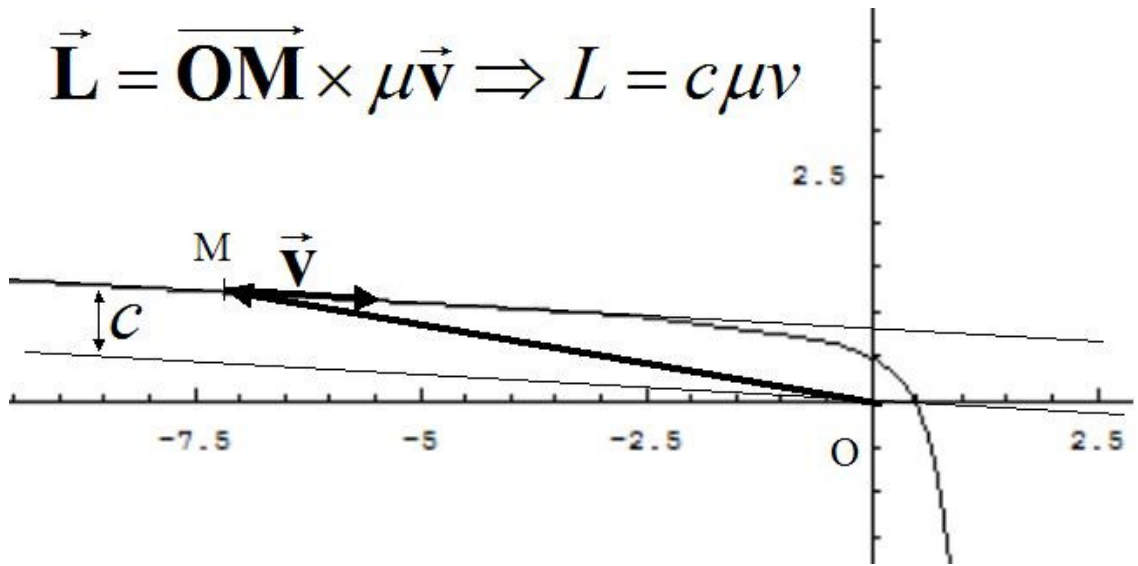
A partir de la relation (104) on peut donner l'excentricité en fonction de l'énergie mécanique :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2pE_m}{Gm_1 m_2}} \quad (115)$$

mais,

$$p = \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2} \quad (116)$$

D'autre part, pour une particule M de masse μ ayant une vitesse asymptotique $\vec{v}$ on définit le paramètre d'impact c comme étant la distance qui sépare la droite de direction $\vec{v}$ et la droite qui lui est parallèle passant par le centre de force O (voir figure : la première droite est finalement celle que suivrait la particule s'il n'y avait pas de champ de force central). Dans ce cas, le vecteur $\vec{OM}$ peut être décomposé en deux parties : une partie colinéaire à $\vec{v}$, et une partie orthogonale à $\vec{v}$. Dans le calcul du moment cinétique ne subsiste alors que le terme orthogonal à $\vec{v}$. La norme du moment cinétique est donc simplement $L = c\mu v$.



Finalement,

$$p = \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2} = \frac{c^2 v^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (117)$$

et,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2pE_m}{Gm_1 m_2}} = \sqrt{1 + \frac{2c^2 v^2 E_m}{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}} \quad (118)$$

On constate donc que pour de grands paramètres d'impact ou de grandes vitesses asymptotiques, lorsqu'un système est libre (avec $E_m > 0$) alors sa trajectoire est une hyperbole de grande excentricité.

Pour un système lié ($E_m < 0$), on constate que pour passer d'une trajectoire elliptique ($0 < e < 1$) à une trajectoire circulaire ($e = 0$) il suffit d'augmenter (au bon endroit de l'orbite) la vitesse du mobile.

17. Quantité de mouvement – Collisions ou chocs

17.1. Définition moderne de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'une particule de masse m est un vecteur $\vec{p}$, produit de la masse m (scalaire) par la vitesse $\vec{v}$ (vecteur) de cette particule :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

17.2. Quantité de mouvement et deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, si la masse d'une particule est *constante*, la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps est égale à la somme des forces appliquées sur la particule :

$$\boxed{\text{Si } m = \text{cte, alors } \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i}$$

Démonstration :

On a,

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

donc,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

La deuxième égalité découle du fait que la masse m est constante et peut, donc, sortir du symbole de dérivation. La dernière égalité provient directement de la deuxième loi de Newton (PFD). Donc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

17.3. Conservation de la quantité de mouvement quand les forces appliquées sont inexistantes ou ont pour somme le vecteur nul

Si la somme des forces appliquées est le vecteur nul alors, pour une particule de masse constante, on a conservation de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\text{Si } \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \text{ alors } \vec{p} = \vec{cte}}$$

Ce résultat est une conséquence directe de la propriété précédente.

17.4. Chocs (ou collisions) et quantité de mouvement

1. Lors d'un choc durant lequel la somme des forces appliquées est nulle, la quantité de mouvement se conserve. Cette propriété est évidente d'après la précédente sous section;

2. Un choc étant généralement bref, on peut dire que la quantité de mouvement se conserve même si la somme des forces n'est pas nulle. Cette dernière propriété se justifie ainsi :

Démonstration :

Supposons que la somme des forces n'est pas nulle, $\sum_i \vec{F}_i \neq \vec{0}$.

Supposons que le choc a lieu durant une durée Δt . D'après la relation,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i,$$

nous pouvons donc déduire la variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$ durant le choc :

$$\Delta\vec{p} \approx \sum_i \vec{F}_i \times \Delta t$$

Ainsi, si Δt est suffisamment petit, on peut dire que $\Delta\vec{p} \approx \vec{0}$, i.e. $\vec{p}$ est constante même si la somme des forces n'est pas nulle.

17.5. Chocs élastiques et inélastiques

D'après la section précédente, nous pouvons affirmer que durant tout type de choc la quantité de mouvement reste constante. Selon la variation de l'énergie cinétique durant le choc, on distingue deux grandes familles de chocs :

1. On dit qu'on a affaire à un **choc élastique** si l'énergie cinétique se conserve en plus de la quantité de mouvement;

2. On dit qu'on a affaire à un **choc inélastique** si l'énergie cinétique ne se conserve pas, bien que la quantité de mouvement soit conservée.

17.6. Étude générale des collisions élastiques

17.6.1. Introduction

Considérons deux particules de masses m_1 et m_2 qui se déplacent initialement à des vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. On suppose que ces particules exercent une force l'une sur l'autre, mais que cette force a une portée très courte, de sorte qu'elles se meuvent librement la plupart du temps, sauf quand elles entrent en **collision**, c'est-à-dire quand elles s'approchent très près l'une de l'autre. Nous ne nous soucions pas des détails de la force s'exerçant entre ces deux particules, car ce qui nous intéresse ici est la relation entre les vitesses de ces particules *après* la collision et *avant* la collision et non le mouvement détaillé des particules *pendant* la collision.

On supposera que le processus de collision est **élastique**, c'est-à-dire que l'énergie cinétique des particules est la même avant et après la collision. Ceci implique qu'aucune autre particule n'est créée lors de la collision et que l'énergie interne des particules n'est pas modifiée. Dans le cas contraire, la collision est dite **inélastique**. En réalité, les collisions entre objets macroscopiques (par ex. des boules de billard) sont toujours inélastiques car une certaine fraction de l'énergie est perdue en chaleur. Des collisions inélastiques se produisent aussi aux niveaux atomique et nucléaire si les particules (atomes, noyaux, etc.) émergent de la collision dans un état excité ou si de la lumière ou des particules supplémentaires sont émises pendant la collision.



Figure 7.1. Collision unidimensionnelle de deux particules. Dans le référentiel du laboratoire, la particule 2 est au repos avant la collision. À droite, on se place dans le référentiel du centre de masse.

17.6.2. Collision en une dimension

Pour commencer, considérons le cas où les deux objets qui entrent en collision ne se déplacent que dans une seule direction (voir la Fig. 7.1). C'est un cas particulier d'une collision plus générale qu'on étudiera plus bas. On suppose que le premier objet se déplace initialement à une vitesse $\mathbf{v}_1 = v_1 \hat{\mathbf{x}}$ et que le second objet est au repos ($v_2 = 0$). Après la collision, les deux objets ont respectivement des vitesses $\mathbf{v}'_1 = v'_1 \hat{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{v}'_2 = v'_2 \hat{\mathbf{x}}$. Le problème est de déterminer précisément v'_1 et v'_2 en fonction de v_1 et des masses des deux objets. Il y a deux façons de solutionner ce problème : (i) utiliser immédiatement les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie; (ii) se déplacer d'abord dans le référentiel du centre de masse, y utiliser les lois de conservation et ensuite revenir au référentiel du laboratoire. Quoique la deuxième façon semble plus longue à première vue, elle est en fait plus simple. Nous allons cependant les expliquer toutes les deux.

Mécanique classique et relativité restreinte

Dans la première façon, on applique les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (7.1)$$

Il s'agit de deux équations, pour deux inconnues (v'_1 et v'_2). On élimine v'_2 à l'aide de la première équation, pour obtenir

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v'^2_1 + \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v'_1)^2 \right) \quad (7.2)$$

Il s'agit d'une équation quadratique pour v'_1 qui peut être résolue par la formule standard. On peut la récrire comme suit :

$$(v'_1)^2 (m_1 + m_2) - 2m_1 v_1 v'_1 + (m_1 - m_2) v_1^2 = 0 \quad (7.3)$$

La formule de solution de l'équation quadratique nous donne

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 v_1 \pm v_1 \sqrt{m_1^2 - (m_1 + m_2)(m_1 - m_2)} \right) \\ &= \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Le signe supérieur donne $v'_1 = v_1$, ce qui correspond à l'absence de collision. Le signe inférieur donne plutôt

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (7.5)$$

(nous avons utilisé la première des Éqs (7.1) pour exprimer v'_2 en fonction de notre solution pour v'_1). Notons que le discriminant de l'équation quadratique est un carré parfait, ce qui laisse penser que cette solution n'est pas la plus simple qu'on aurait pu trouver.

Expliquons maintenant la deuxième façon, plus pratique (surtout quand on étudie le même problème en deux dimensions). Le centre de masse du système des deux objets se déplace à vitesse constante avant, pendant et après la collision, car aucune force externe n'agit sur le système. On peut donc se déplacer dans le référentiel du centre de masse, car ce référentiel est inertiel et les lois de conservation y sont tout aussi valables que dans le référentiel du laboratoire. Dans le cas qui nous occupe, la vitesse du centre de masse (3.3) se calcule d'après les données d'avant la collision,

$$\mathbf{V}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \hat{\mathbf{x}} \quad (7.6)$$

La relation entre la vitesse $\mathbf{v}$ d'une particule dans le référentiel du laboratoire et la vitesse $\mathbf{u}$ de la même particule dans le référentiel du centre de masse est donnée par la transformation de Galilée (2.33) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (\text{ici } \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{cm}}) \quad (7.7)$$

En ne considérant que les composantes en x , on a

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - V \\ u_2 &= v_2 - V \\ u'_1 &= v'_1 - V \\ u'_2 &= v'_2 - V \end{aligned} \quad \text{où} \quad V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (7.8)$$

L'utilité du référentiel du centre de masse est que la quantité de mouvement totale $M_{\text{tot.}} \mathbf{V}_{\text{cm}}$ du système y est nulle, car dans ce référentiel la vitesse du centre de masse est nulle par définition. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est alors plus simple :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 \quad (7.9)$$

On en déduit que $u_2 = -(m_1/m_2)u_1$ et $u'_2 = -(m_1/m_2)u'_1$. Si on insère ces relations dans la loi de conservation de l'énergie, on trouve

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1'^2 \quad (7.10)$$

On en déduit que $|u_1| = |u'_1|$ et donc que $|u_2| = |u'_2|$. C'est un résultat important : dans le référentiel du centre de masse, les grandeurs des vitesses des particules ne changent pas lors de la collision.

En une dimension, deux cas se présentent : soit $u'_1 = u_1$, ou $u'_1 = -u_1$. Dans le premier cas, il n'y a tout simplement pas de collision et devons donc considérer le deuxième cas seulement. On peut ensuite retourner au référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned} v'_1 &= u'_1 + V = -u_1 + V = -v_1 + 2V \\ v'_2 &= u'_2 + V = -u_2 + V = -v_2 + 2V \end{aligned} \quad (7.11)$$

En substituant les valeurs connues, on trouve

$$v'_1 = -v_1 + 2\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1, \quad (7.12)$$

la même solution trouvée plus haut.

Remarquons maintenant quelques caractéristiques de cette solution.

1. Si $m_2 \gg m_1$, alors $v'_1 \approx -v_1$ et $v'_2 \approx 0$. La première particule rebondit sur la deuxième comme sur un mur.
2. Si, au contraire, $m_2 \ll m_1$, alors $v'_1 \approx v_1$ et $v'_2 \approx 2v_1$. La deuxième particule est comme projetée par la première, comme si un mur en mouvement l'avait frappée.
3. Si $m_1 = m_2$, alors $v'_1 = 0$ et $v'_2 = v_1$: il y a eut simple substitution des objets. Une telle substitution conserve évidemment la quantité de mouvement et l'énergie, si les masses sont égales.

17.6.3. Collisions en deux dimensions et angle de diffusion

Nous allons maintenant généraliser les calculs précédents au cas d'une collision en deux dimensions. Le deuxième objet est encore au repos avant la collision, mais les deux objets sont déviés hors de l'axe des x après la collision, comme sur la Fig. 7.2. L'angle que fait la vitesse du premier objet par rapport à la direction initiale de son mouvement est appelé **angle de diffusion**¹. Cet angle dépend de la forme précise de la force qui agit entre les deux objets, ainsi que de la distance entre la cible et l'axe de la vitesse du projectile; cette distance, notée b , est appelée **paramètre d'impact**. Notons que le problème n'est pas différent en trois dimensions : les vitesses des objets après la collision déterminent un plan, et ce plan contient aussi la vitesse du projectile avant la collision, car il

¹ Le processus de collision porte aussi le nom de diffusion en physique microscopique, en raison de la dualité onde-corpuscule : la collision avec une cible au repos est en effet l'analogue de la diffusion d'une onde sur un obstacle.

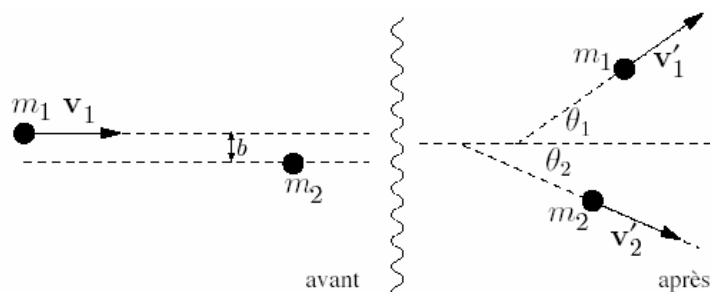


Figure 7.2. Vitesses des particules avant et après une collision, dans le référentiel du laboratoire : la particule 2 est initialement au repos ($\mathbf{v}_2 = 0$).

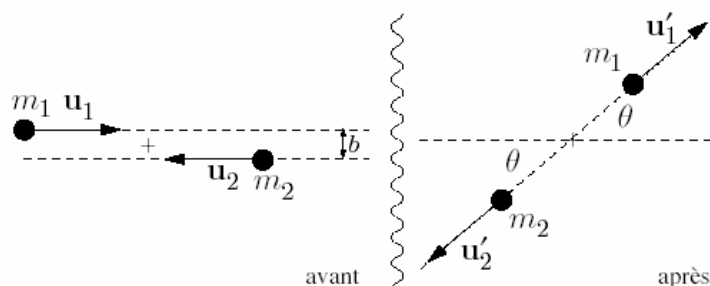


Figure 7.3. Vitesses des particules avant et après une collision, dans le référentiel du centre de masse.

contient la quantité de mouvement totale des deux objets. C'est dans ce plan que nous travaillons, la troisième dimension n'intervenant pas.

Dans le repère du centre de masse, la collision est plus simple (Fig. 7.3). Soit $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ les vitesses des deux particules avant la collision dans ce référentiel, et $\mathbf{u}'_1$ et $\mathbf{u}'_2$ les vitesses des mêmes objets après la collision. Comme la quantité de mouvement totale est nulle dans ce repère, on trouve $0 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{u}'_1 + m_2 \mathbf{u}'_2$, de sorte que $\mathbf{u}_2$ est antiparallèle à $\mathbf{u}_1$, et $\mathbf{u}'_2$ est antiparallèle à $\mathbf{u}'_1$. Les deux objets se déplacent donc le long d'un axe commun avant la collision (mais en sens contraire), et le long d'un autre axe commun après la collision, ces deux axes sous-tendant un angle θ . L'angle θ est déterminé par le paramètre d'impact ainsi que par la loi de force précise qui relie les deux objets. Il peut en principe prendre toutes les valeurs entre $-\pi$ et π .

Par contre, les angles θ_1 et θ_2 ne sont pas nécessairement libres de prendre toutes les valeurs. Donnons nous comme problème de déterminer l'angle de diffusion θ_1 maximum, en supposant que $m_1 > m_2$. Il est évident que, dans le cas contraire ($m_1 < m_2$) il est toujours possible pour la particule 1 d'être **rétrodiffusée**, c'est-à-dire de 'rebondir' vers son point de départ. Au contraire, si $m_2 < m_1$, l'angle de diffusion θ_1 ne peut pas excéder un certain maximum (ceci est clair dans la limite $m_1 \gg m_2$, car un objet massif ne peut pas être beaucoup dévié par un objet léger).

Pour ce faire, le plus simple est d'effectuer une transformation galiléenne vers le référentiel S' du centre de masse. On répète alors facilement les calculs précédents :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{V} & \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{u}'_1 + \mathbf{V} & \mathbf{V} &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 + \mathbf{V} = 0 & \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{u}'_2 + \mathbf{V} \end{aligned} \quad (7.13)$$

À partir de ces équations on trouve une expression explicite pour les vitesses $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad (7.14)$$

Appliquons maintenant les lois de conservation. Avant et après la collision, l'impulsion totale est nulle dans le repère du centre de masse :

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = 0 = m_1 \mathbf{u}'_1 + m_2 \mathbf{u}'_2 \quad (7.15)$$

Les deux particules s'éloignent donc du lieu de la collision dans des directions exactement opposées, faisant un angle θ avec la direction initiale des vitesses (cf. Fig. 7.3). Comme dans le cas unidimensionnel, on conclut de la conservation de l'énergie que les grandeurs des vitesses sont les mêmes après et avant la collision et que seules les directions changent : $u_1 = u'_1$ et $u_2 = u'_2$.

On peut ensuite trouver la relation entre l'angle de diffusion θ dans le référentiel S' et l'angle de diffusion θ_1 dans le repère S :

$$\tan \theta_1 = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \frac{u'_{1y}}{u'_{1x} + V} = \frac{u'_1 \sin \theta}{u'_1 \cos \theta + V} = \frac{u_1 \sin \theta}{u_1 \cos \theta + V} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/u_1} \quad (7.16)$$

Nous avons utilisé dans ces égalités les composantes x et y des Éqs (7.13). Comme

$$u_1 = v_1 - V = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_2}{m_1} V \quad (7.17)$$

on trouve finalement

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

(7.18)

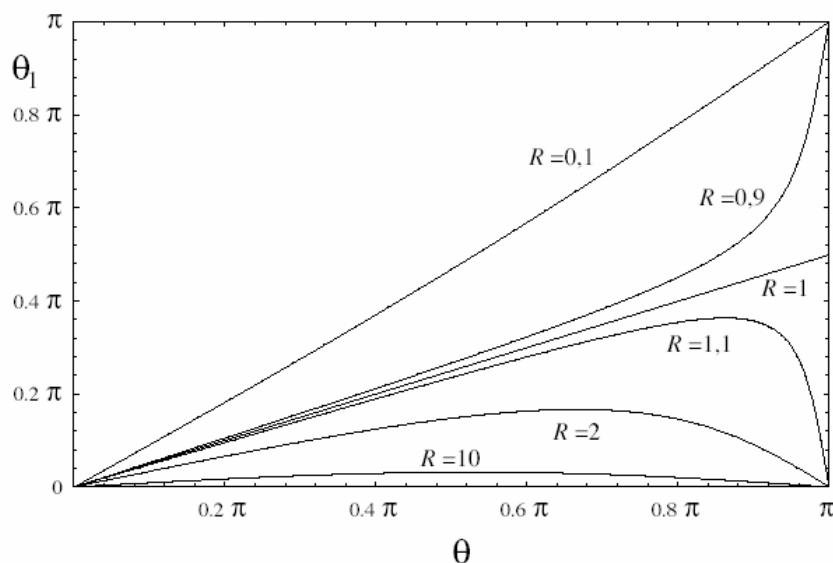


Figure 7.4. Angle de diffusion θ_1 dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle de diffusion θ dans le référentiel du centre de masse. On montre la dépendance pour cinq valeurs différentes du rapport $R = m_1/m_2$. On note qu'il existe un angle θ_1 maximum si $R > 1$.

Si la particule 1 est plus massive que la particule 2, l'angle de diffusion θ_1 atteint sa valeur maximale $\theta_1^{\max.}$ pour une certaine valeur θ_0 de θ (cf. Fig. 7.4). La position exacte de ce maximum s'obtient par différentiation :

$$0 = \frac{d}{d\theta} \tan \theta_1 \Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_0}{\left(\cos \theta_0 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2} \implies \cos \theta_0 = -\frac{m_2}{m_1} \quad (7.19)$$

et ensuite

$$\tan \theta_1^{\max.} = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \frac{m_1}{m_2}} = -\frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 - 1}} \quad (7.20)$$

ce qui revient à dire

$$\sin \theta_1^{\max.} = \frac{m_2}{m_1} = -\cos \theta_0 \quad (7.21)$$

Si, au contraire, la particule 1 est plus légère que la particule 2, alors le dénominateur de l'expression (7.18) devient négatif si $-1 < \cos \theta < -m_1/m_2$. Dans ces circonstances, $\tan \theta_1$ est aussi négatif et donc $\frac{1}{2}\pi < \theta_1 < \pi$. Dans la limite où $\theta = \pi$, $\tan \theta_1 \rightarrow 0^-$ et $\theta_1 = \pi$. l'angle de diffusion maximum $\theta_1^{\max.}$ est donc égal à π (cf. Fig. 7.4).

Cas de masses égales

Dans le cas limite où $m_1 = m_2$, on a

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \quad (m_1 = m_2) \quad (7.22)$$

Or, il se trouve que

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = \tan \frac{\theta}{2}$$

(cette formule se démontre aisément en appliquant les formules d'angles doubles : $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ et $\cos \theta = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$). La relation entre θ et θ_1 est donc particulièrement simple dans ce cas :

$$\theta_1 = \frac{\theta}{2} \quad (-\pi < \theta < \pi) \quad (7.23)$$

L'angle de diffusion maximum est obtenu quand $\theta = \pi$, qui correspond à $\theta_1^{\max.} = \pi/2$.

Ceci est applicable au cas de deux boules de billard, si on néglige les effets du tapis et de rotation des boules – ce qu'un vrai joueur de billard ne saurait faire. On ne peut pas faire 'rebondir' une boule sur une autre. Le mieux qu'on puisse espérer est que la boule projetée sur l'autre émerge à un angle θ_1 proche de $\pi/2$. Dans ce cas, sa vitesse est assez faible (elle tend vers zéro quand $\theta_1 \rightarrow \pi/2$).

On démontre par ailleurs sans difficulté que les vitesses $\mathbf{v}'_1$ et $\mathbf{v}'_2$ sont perpendiculaires entre elles dans le cas de deux objets de masses identiques ($m_1 = m_2 = m$) et d'une collision élastique. La preuve est très simple : écrivons pour ce cas les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique :

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}'_1)^2 + \frac{1}{2}m(\mathbf{v}'_2)^2 \quad (7.24)$$

Simplifions les masses et les facteurs $\frac{1}{2}$ partout et mettons la première équation au carré :

$$\mathbf{v}_1^2 = (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2)^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_1^2 = (\mathbf{v}'_1)^2 + (\mathbf{v}'_2)^2 \quad (7.25)$$

En développant le carré de l'équation de gauche et en comparant avec celle de droite, on trouve que

$$\boxed{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2} = 0 \quad (7.26)$$

ce qui démontre bien que les deux vitesses sont perpendiculaires (ce qui comprend la possibilité que l'une des deux vitesses soit nulle).

D'autre part, on montre facilement que

$$\boxed{v'_2 = v_1 \cos \theta_2 \quad \text{et} \quad v'_1 = v_1 \cos \theta_1} \quad (7.27)$$

sachant bien sûr que $\cos \theta_2 = \sin \theta_1$ puisque que $\theta_2 = \frac{1}{2}\pi - \theta_1$. La démonstration est la suivante : comme $\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = 0$, alors

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{v}'_2 = (\mathbf{v}'_2)^2 \quad (7.28)$$

D'autre part, ce produit scalaire vaut $v_1 v'_2 \cos \theta_2$, et donc $v'_2 = v_1 \cos \theta_2$, tel qu'annoncé. La deuxième relation se démontre pareillement :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1 = (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{v}'_1 = (\mathbf{v}'_1)^2 \quad (7.29)$$

ce qui vaut aussi $v_1 v'_1 \cos \theta_1$, ce qui permet d'écrire que $v_1 \cos \theta_1 = v'_1$.

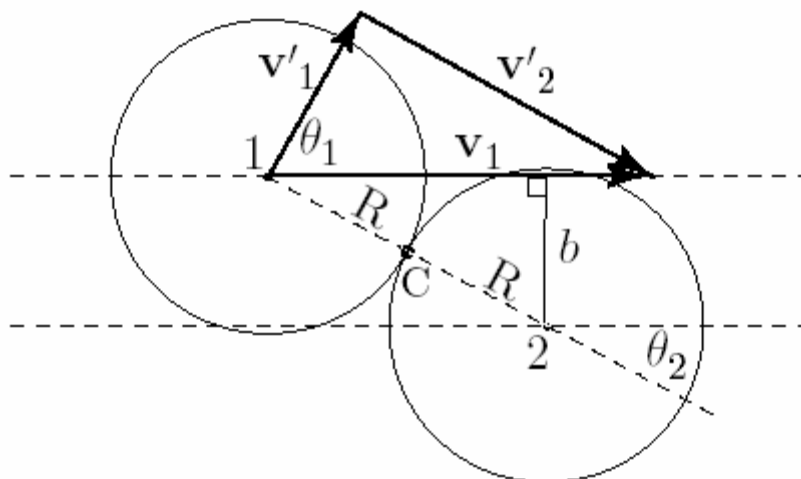


Figure 7.5. Collision de deux sphères dures. La force appliquée sur la sphère no 2 est dans la direction de la vitesse $\mathbf{v}'_2$, et le paramètre d'impact b est relié simplement à l'angle θ_2 : $\sin \theta_2 = b/2R$.

Étudions enfin un exemple précis de collision où la relation entre le paramètre d'impact et l'angle de diffusion peut être établie. Considérons deux sphères dures de mêmes masses, telles des boules de billard, qui entrent en collision. On supposera que la force qui agit entre les deux boules est dirigée le long de l'axe qui relie les centres des deux boules. Ceci revient à négliger tout effet de frottement entre les surfaces des boules, frottement qui pourrait communiquer à la boule-cible un mouvement de rotation sur elle-même. On indique sur la figure 7.5 la direction des vitesses avant et après la collision, les angles θ_1 et θ_2 , ainsi que le paramètre d'impact b . La relation entre ce dernier, le rayon R des sphères et l'angle θ_2 est très simple : $\sin \theta_2 = b/2R$. Ceci vient du fait que la quantité de mouvement $m\mathbf{v}'_2$ de la cible après la collision provient de l'application sur un temps

extrêmement court d'une force très intense exercée au point de contact C des deux sphères et dirigée suivant la droite qui relie les deux centres. Cette droite est donc parallèle à $\mathbf{v}'_2$. La relation

$$\cos \theta_1 = \sin \theta_2 = \frac{b}{2R} \quad (7.30)$$

combinée à la relation (7.27), nous permet de calculer les angles et les vitesses v'_1 et v'_2 en fonction du paramètre d'impact b .

17.7. Théorème de Koenig et collisions inélastiques

Une collision est qualifiée d'inélastique si l'énergie mécanique des objets en collision n'est pas conservée. Si le système composé des deux particules est isolé, il y a tout de même conservation de la quantité de mouvement totale. Dans le but de mieux comprendre les facteurs limitant la perte d'énergie lors d'une collision inélastique, nous allons premièrement énoncer et démontrer le premier théorème de Koenig, portant sur l'énergie cinétique d'un ensemble de particules.

Premier théorème de Koenig

Ce théorème stipule que l'énergie cinétique totale d'un système est la somme de deux termes : l'énergie cinétique associée au centre de masse et l'énergie cinétique du système par rapport à son centre de masse, ou **énergie cinétique interne** ($K_{\text{int.}}$) :

$$K_{\text{tot.}} = \frac{1}{2} M_{\text{tot.}} \mathbf{V}_{\text{cm}}^2 + K_{\text{int.}} \quad K_{\text{int.}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i)^2 \quad (7.31)$$

où $\mathbf{v}'_i$ est la vitesse de la i^{e} particule du système par rapport au centre de masse et $\mathbf{V}_{\text{cm}}$ est la vitesse du centre de masse du système. Ce théorème se prouve facilement en effectuant une transformation galiléenne vers le référentiel du centre de masse :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i \quad (7.32)$$

alors

$$\begin{aligned} K_{\text{tot.}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V}_{\text{cm}} + \mathbf{v}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V}_{\text{cm}}^2 + \mathbf{V}_{\text{cm}} \cdot \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i)^2 \end{aligned} \quad (7.33)$$

Le deuxième terme du membre de droite s'annule, car l'expression entre parenthèses est la quantité de mouvement totale du système dans le référentiel du centre de masse, c'est-à-dire zéro. Il reste donc le résultat (7.31).

Expliquons : l'énergie cinétique d'un système dépend bien sûr du référentiel d'observation. Le théorème de Koenig affirme que l'énergie cinétique est minimale et égale à $K_{\text{int.}}$ lorsqu'on l'évalue dans le référentiel du centre de masse et que, dans tout autre référentiel, on doit ajouter à cette valeur minimum un terme $\frac{1}{2} M_{\text{tot.}} \mathbf{V}_{\text{cm}}^2$ qui ne dépend que du mouvement du centre de masse et de la masse totale du système (ce terme est donc indépendant du détail du mouvement interne du système). Si le système est isolé (c'est-à-dire si aucune force externe n'agit sur lui) alors la vitesse $\mathbf{V}_{\text{cm}}$ de son centre de masse est constante et l'énergie cinétique $\frac{1}{2} M_{\text{tot.}} \mathbf{V}_{\text{cm}}^2$ associée au centre de masse est constante. Cependant, l'énergie cinétique interne $K_{\text{int.}}$ n'est pas nécessairement constante et peut se changer en énergie potentielle interne, se dissiper en chaleur, etc.

Remarque : nous avons fourni une autre démonstration du premier théorème de Koenig dans la section 12.7.

17.8. Variation de l'énergie interne dans les collisions inélastiques

Lors d'une collision inélastique, l'énergie associée au mouvement du centre de masse ($\frac{1}{2}M_{\text{tot.}}\mathbf{V}_{\text{cm}}^2$) est la même avant et après la collision, et donc la variation d'énergie provient entièrement de la variation d'énergie cinétique interne. Lors de collisions inélastiques d'objets macroscopiques, celle-ci se transforme partiellement (ou entièrement) en chaleur. Par contre, lors de collisions de particules à l'échelle atomique ou subatomique, l'énergie cinétique interne peut tantôt transformée en masse (par l'équivalence relativiste entre masse et énergie) et servir à la création de particules nouvelles, tantôt augmentée par conversion d'une certaine quantité de masse en énergie.

Considérons par exemple un objet de masse m_1 et de vitesse $\mathbf{v}_1$ qui entre en collision avec un deuxième objet, de masse m_2 , initialement au repos. Après la collision, supposons que les deux objets adhèrent l'un à l'autre, et se déplacent à une vitesse commune $\mathbf{v}$. Plaçons-nous premièrement dans le référentiel du laboratoire. La conservation de la quantité de mouvement nous dit que

$$m_1\mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2)\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad (7.34)$$

Par contre, l'énergie n'est manifestement pas conservée. Les énergies cinétiques initiale et finale sont

$$K_i = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}v_1^2 \quad (7.35)$$

et la perte d'énergie se lit dans le rapport K_f/K_i :

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + m_2/m_1} < 1 \quad (7.36)$$

Dans la limite où $m_2 \gg m_1$, on trouve

$$\frac{K_f}{K_i} \approx \frac{m_1}{m_2} \ll 1 \quad (m_2 \gg m_1) \quad (7.37)$$

C'est le cas notamment d'une météorite de masse m entrant en collision avec la Terre, vu du référentiel terrestre. Cela signifie que pratiquement toute l'énergie cinétique est dissipée en chaleur dans ce cas.

Étudions maintenant la même situation, cette fois dans le référentiel du centre de masse. Dans ce référentiel, les deux particules ont, avant la collision, des vitesses $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ données par l'Éq. (7.14). Après la collision, les deux particules demeurent ensemble au repos, car l'impulsion totale est nulle dans ce référentiel. La perte d'énergie est alors beaucoup plus claire, car l'énergie cinétique est nulle après la collision : toute l'énergie interne a disparu. On dit alors que la collision est *maximalement inélastique*.

Processus de désintégration

Le processus inverse d'une collision maximalement inélastique est celui d'une particule instable qui se brise en deux fragments. Vu du référentiel du centre de masse, la particule est initialement au repos et se brise soudainement en deux fragments qui s'éloignent l'un de l'autre, alors que le centre

de masse de l'ensemble se situe toujours au même endroit. L'énergie nécessaire à ce processus provient d'une énergie potentielle interne qui se convertit en énergie cinétique. Dans le cas d'une particule subatomique, ceci se traduit par une légère diminution de la masse totale des fragments par rapport à la masse de la particule initiale.

Supposons que la particule initiale se déplace à une vitesse $\mathbf{V}$ le long de l'axe des x dans le repère du laboratoire. Étudions la relation entre les angles θ_1 et θ_2 que font les vitesses des deux fragments par rapport à cet axe, et l'angle θ qu'elles font avec le même axe dans le repère du centre de masse. On peut reprendre ici le calcul fait plus haut dans le cas d'une collision élastique, sauf que la notation est légèrement différente : $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ désignent les vitesses des fragments dans le repère du laboratoire, et $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ les mêmes dans le repère du centre de masse. On trouve

$$\tan \theta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{u_{1y}}{u_{1x} + V} = \frac{u_1 \sin \theta}{u_1 \cos \theta + V} \quad (7.38)$$

et de même (θ_2 étant défini positif vers le bas)

$$\tan \theta_2 = -\frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -\frac{u_{2y}}{u_{2x} + V} = \frac{u_2 \sin \theta}{-u_2 \cos \theta + V} \quad (7.39)$$

Les grandeurs u_1 et u_2 se trouvent en fonction de l'énergie relâchée Δ ; comme $m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = 0$, on a $u_2 = (m_1/m_2)u_1$ et

$$\Delta = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1^2 \quad (7.40)$$

ce qui nous permet d'exprimer u_1 et u_2 en fonction de Δ .

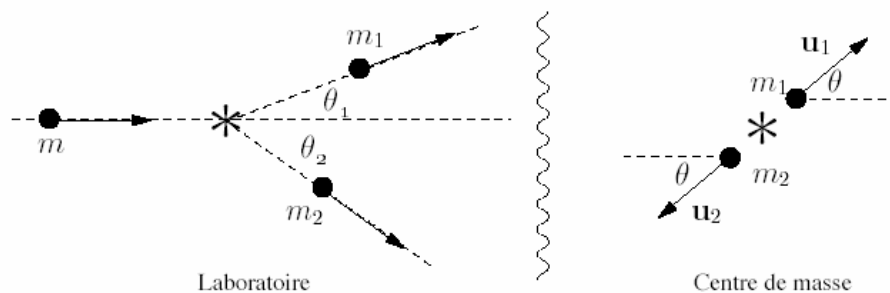


Figure 7.6. Définition des angles dans un processus de désintégration, dans le référentiel du laboratoire et celui du centre de masse.

17.9. Fusées et objets à masse variable

Étudions maintenant le mouvement d'une fusée. La fusée est propulsée par la combustion de carburant dont les produits sont éjectés à grande vitesse par la tuyère du moteur. Considérons premièrement une fusée dans l'espace intersidéral, libre de toute influence gravitationnelle. Le système isolé dont la quantité de mouvement est conservée comprend alors la fusée et l'ensemble de son carburant, éjecté ou non. On supposera que le carburant brûlé s'échappe de la fusée à une vitesse v_0 constante, par rapport à la fusée (on pose, par convenance, que $v_0 > 0$, même si le carburant se dirige vers l'arrière de la fusée). On supposera que le mouvement est unidimensionnel.

Mécanique classique et relativité restreinte

Soit m_i la masse initiale de la fusée, avec tout son carburant, et m_f sa masse finale, lorsque tout le carburant a été brûlé. Nous allons démontrer que si la fusée est initialement au repos, alors la vitesse finale de la fusée est

$$v_f = v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad (7.41)$$

Pour démontrer cette relation, considérons la fusée à l'instant t , ayant une vitesse v et une masse $m(t)$, fonction décroissante du temps (cette masse comprend le carburant non encore brûlé). Au bout d'un temps dt infinitésimal, la masse de la fusée sera $m + dm$ ($dm < 0$), la fusée aura éjectée une masse $-dm$ de carburant et sa vitesse au temps $t + dt$ sera $v + dv$. Nous avons adopté la convention que $dm < 0$ afin de pouvoir considérer dm comme la différentielle de la masse de la fusée et non du carburant brûlé. La conservation de l'impulsion pour l'ensemble du système (fusée plus carburant) se lit alors

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_0) \quad (7.42)$$

En négligeant dans cette équation les termes du deuxième ordre ($dm dv$), on trouve

$$0 = m dv + v_0 dm \quad \text{ou} \quad dv = -v_0 \frac{dm}{m} \quad (7.43)$$

En intégrant cette relation entre $v = 0$ et v_f , on trouve

$$\int_0^{v_f} dv = v_f = -v_0 \int_{m_i}^{m_f} \frac{dm}{m} = v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad (7.44)$$

ce qui est la relation cherchée. Notons que la vitesse finale de la fusée ne dépend que de la vitesse d'échappement v_0 et du rapport des masses initiale et finale; elle ne dépend pas du taux précis d'échappement. Pour maximiser v_f , on a donc intérêt à éjecter le carburant à la plus grande vitesse possible, sans toutefois avoir besoin de le faire le plus rapidement possible dans le temps.

Supposons maintenant que la fusée est dans un champ gravitationnel constant, comme lors d'un décollage à partir de la Terre. L'impulsion du système fusée-carburant n'est plus conservée, mais change de $-mgdt$ dans un temps dt , en supposant que la gravité tire vers le bas (direction négative de l'axe). L'équation (7.42) doit alors être modifiée de la façon suivante :

$$mv - mgdt = (m + dm)(v + dv) - dm(v - v_0) \quad (7.45)$$

Il s'ensuit que

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_0 \frac{dm}{dt} \quad (7.46)$$

Le deuxième terme de droite a la forme d'une force dirigée vers le haut (n'oublions pas que $dm/dt < 0$). On l'appelle **force de poussée**. C'est une expression commode, mais en fait il ne s'agit pas d'une force externe agissant sur un système bien défini. Il s'agit plutôt de la réaction du carburant éjecté sur le reste de la fusée. En isolant dv , on trouve

$$dv = -gdt - \frac{v_0}{m} dm \quad (7.47)$$

En intégrant entre les temps $t = 0$ (instant du décollage) et le temps t_f , auquel la fusée a une vitesse v_f , on trouve

$$v_f = -gt_f + v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad (7.48)$$

On conclut de cette relation que, pour maximiser la vitesse finale de la fusée, il faut non seulement maximiser la vitesse d'échappement du carburant, mais aussi le brûler le plus vite possible, car plus t_f est grand, plus v_f est petit. Pour que la fusée décolle, il faut aussi que la force de poussée soit supérieure à la force de gravité:

$$-v_0 \frac{dm}{dt} > m_i g \quad (7.49)$$

Il peut être tentant de chercher un court-circuit à la démonstration ci-haut en appliquant la deuxième loi de Newton à la lettre sur un objet à masse variable :

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} \quad (7.50)$$

Cependant, cette équation découle d'une manipulation formelle injustifiée et n'est pas valable, même si elle jouit d'une ressemblance superficielle avec la relation correcte, qui serait plutôt

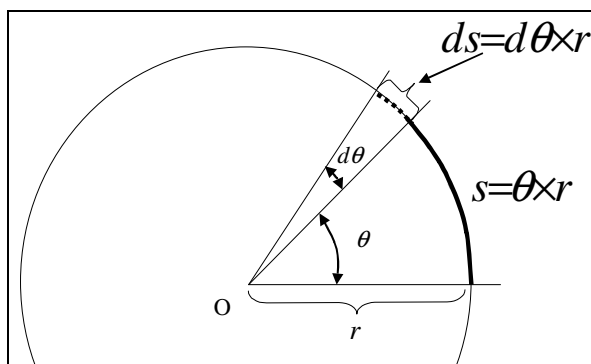
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} - \mathbf{v}_0 \frac{dm}{dt} , \quad (7.51)$$

où $\mathbf{v}_0$ est la vitesse d'éjection de la masse par rapport à l'objet et $\mathbf{F}$ est la force externe appliquée. Cette dernière relation est simplement une version vectorielle de la relation (7.46) où la force de gravité a été remplacée par une force externe quelconque. La relation (7.51) est plus générale et peut être appliquée au cas d'un apport de masse comme au cas d'une diminution de la masse.

18. Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe

18.1. Cinématique de rotation : vitesse et accélération angulaires

On sait que le périmètre p d'un cercle de rayon r est $p = 2\pi r$. Le périmètre est calculé pour un angle total de 2π radians. Pour un arc de cercle d'angle θ radians, la longueur de l'arc est simplement (via une règle de trois) : $s = \theta r$. On appelle souvent s l'*abscisse curviligne*.



On peut aussi considérer une variation d'angle $\Delta\theta$ et lui associer une variation d'abscisse curviligne, Δs :

$$\Delta s = r \times \Delta\theta$$

On peut même considérer une variation d'angle *élémentaire* $d\theta$ et lui associer une variation *élémentaire* d'abscisse curviligne, ds :

$$ds = r \times d\theta$$

En dérivant la dernière relation par rapport au temps, on obtient (on suppose le rayon constant):

$$ds = r \times d\theta \rightarrow \frac{ds}{dt} = r \times \frac{d\theta}{dt}$$

Traditionnellement, on nomme $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ *vitesse angulaire* (exprimée en général en radians par seconde), et $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ *vitesse linéaire tangentielle* (généralement mesurée en mètres par seconde). Ou encore :

$$v = \omega \times r$$

On définit l'*accélération angulaire* α comme étant la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

On mesure généralement α en rad/s^2 .

18.2. Accélérations radiale et tangentielle

Nous avons déjà montré que (voir la section sur la cinématique):

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

On peut alors réécrire ces grandeurs de plusieurs manières :

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \times r^2}{r} = \omega^2 \times r \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta} = r \frac{d\dot{\theta}}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \times \alpha \end{aligned}$$

18.3. Cas particulier du mouvement de rotation à vitesse angulaire constante

Si la vitesse angulaire est constante ($\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cte}$), cela signifie que le mobile fait un tour complet avec une vitesse linéaire constante. En particulier, la vitesse angulaire moyenne est constante et vaut simplement 2π radians divisés par le temps requis pour effectuer un tour complet (la période est notée T) :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

La quantité $1/T$ (exprimée en s^{-1} ou Hz) est appelée *fréquence* ν du mouvement de rotation :

$$\omega = 2\pi\nu$$

18.4. Cinématique de rotation à accélération angulaire constante

Ici, on suppose $\alpha = \text{cte}$, alors :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{cte} \Rightarrow \omega = \int_{t_0}^t \alpha dt = \alpha(t - t_0) = \alpha t - \alpha t_0$$

C'est-à-dire (si l'on note le terme constant ω_0),

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Mais $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, donc on peut effectuer une deuxième intégration :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta = \int_{t_0}^t \omega dt = \int_{t_0}^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha(t^2 - t_0^2)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

Dans le cadre de la cinématique de rotation à accélération angulaire constante, on peut établir une troisième relation fort utile. Nous avons :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

En injectant cette expression du temps dans la relation donnant θ , on obtient enfin :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

18.5. Transmission du mouvement de rotation, engrenages

Quand des engrenages ou un système de poulies se transmettent un mouvement de rotation, la **vitesse linéaire se conserve** (par exemple, la chaîne d'une bicyclette se déplace de la même longueur en tout point pourvu qu'elle soit **inextensible**).

Ainsi, pour deux engrenages ayant pour vitesses angulaires et rayons (ω_A, r_A) et (ω_B, r_B) , on a :

$$v_A = \omega_A \times r_A = v_B = \omega_B \times r_B$$

$$\omega_A \times r_A = \omega_B \times r_B$$

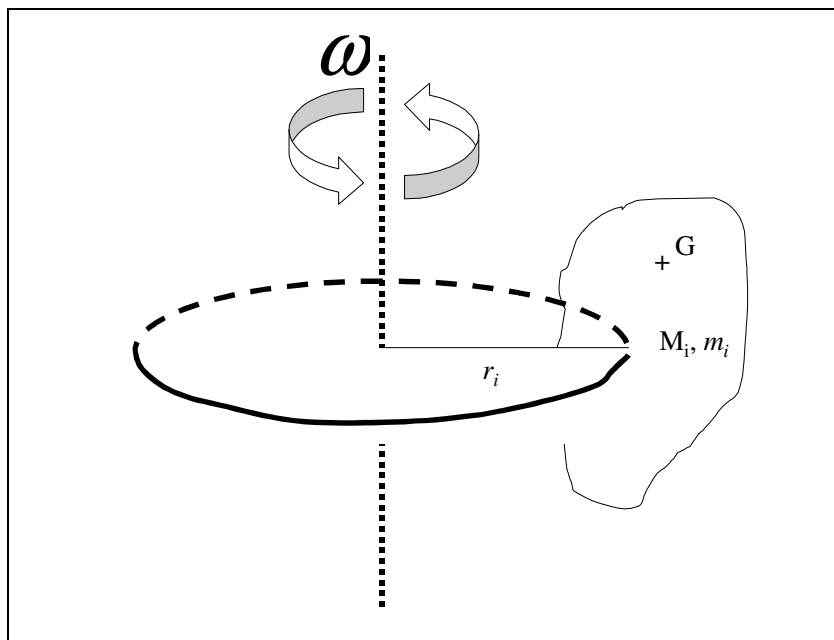
ou

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_B}{r_A}$$

De cette manière, on comprend pourquoi le grand plateau B d'une bicyclette communique une plus grande vitesse angulaire au pignon A (petit plateau), puisque $\frac{r_B}{r_A} \geq 1$ et donc $\omega_A \geq \omega_B$: pour un tour complet du pédalier, la roue arrière fait plus d'un tour.

18.6. Énergie cinétique de rotation et moment d'inertie

Soit un corps rigide constitué d'un ensemble de n points M_i affectés des masses m_i , (M_1, m_1) , (M_2, m_2) , (M_3, m_3) , ..., (M_n, m_n) . Si l'on fait tourner le corps autour d'un axe fixe quelconque (avec la vitesse angulaire ω), chaque point M_i parcourt une trajectoire circulaire de rayon r_i .



L'énergie cinétique d'un point M_i vaut : $E_{ci} = \frac{1}{2} m_i V_i^2$

Mais,

$$\forall i, \omega = \frac{V_i}{r_i}$$

Donc,

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} m_i \times \omega^2 \times r_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Pour l'ensemble des points du corps, nous avons,

$$E_{\text{ctot}} = \sum_i E_{ci} = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

$$E_{\text{ctot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Avec,

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

On appelle I le *moment d'inertie* du corps relativement à l'axe de rotation choisi.

18.7. Moment d'inertie d'un corps rigide : interprétation

Il existe un parallèle flagrant entre ces deux expressions de l'énergie cinétique :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m V^2} \quad \text{et} \quad \boxed{E_c = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Cette analogie nous conduit à considérer le moment d'inertie comme un équivalent de la masse dans le cas du mouvement de rotation.

Cette identification étant faite, on comprend alors pourquoi un corps ayant un grand moment d'inertie s'oppose beaucoup à une variation de vitesse angulaire, $\alpha = d\omega/dt$. En d'autres termes, il est difficile de lui communiquer un mouvement de rotation s'il est initialement au repos. En effet, tout se passe comme la masse ordinaire dont on sait qu'elle s'oppose à une variation de la vitesse linéaire, dv/dt .

Remarquons également que le moment d'inertie dépend de l'axe de rotation choisi. Selon l'axe de rotation choisi on a différentes valeurs pour r_i , et donc différentes valeurs possibles pour le moment d'inertie final. C'est ce qui fait que tenir un marteau par le manche le rend plus performant pour enfoncer un clou que de le tenir par sa partie massive métallique. Tenir le marteau par le manche donne lieu à un plus grand moment d'inertie que de le tenir par la tête. Ainsi, en le tenant par le manche, lorsqu'on lui communique un mouvement de rotation qui ira terminer sa course sur un clou, le clou sera moins capable de pouvoir résister à l'inertie du marteau et s'enfoncera donc plus efficacement !

18.8. Moment d'inertie des distributions continues de matière

Si la masse n'est plus répartie de façon discrète mais de façon continue, la somme discrète doit être remplacée par une intégrale :

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow I = \int_{\text{corps}} r^2 dm}$$

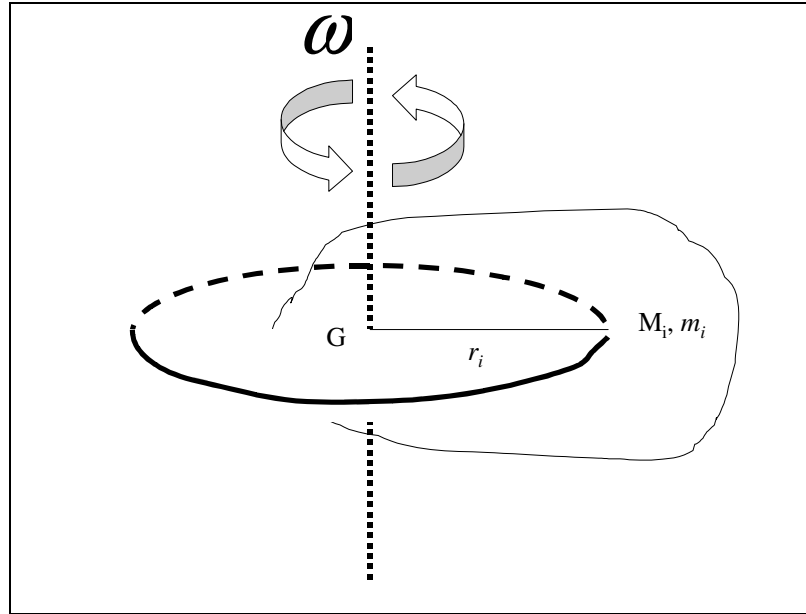
18.9. Corps en rotation et translation simultanées

Si le corps est lui-même globalement en mouvement de translation en plus du mouvement de rotation, on a :

$$E_{\text{ctot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 = \frac{1}{2} M V_{G/O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/G}^2$$

$$\boxed{E_{\text{ctot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 = \frac{1}{2} M V_{G/O}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2}$$

Où I_G est le moment d'inertie du corps calculé par rapport à un axe passant par le centre de masse (car dans l'expression précédente la vitesse de chaque point M_i était justement relative au centre de masse G).

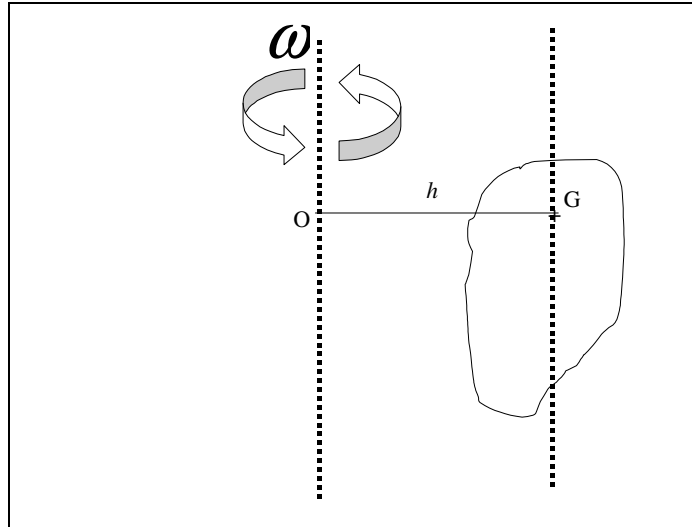


18.10. Théorème de Huygens ou des axes parallèles

En pratique, il est souvent simple de calculer un moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse G , I_G . Pour calculer le moment d'inertie I par rapport à un autre axe parallèle au premier et situé à la distance h , on peut alors appliquer le théorème d'Huygens :

$$I = I_G + Mh^2$$

où M est la masse totale du corps.



Démonstration :

Nous avons,

$$E_{ctot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{M_i/O}^2 = \frac{1}{2} M V_{G/O}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Mais,

$$\omega = \frac{V_{G/O}}{h}$$

Donc,

$$E_{ctot} = \frac{1}{2} M V_{G/O}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 h^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$$E_{ctot} = \frac{1}{2} M \omega^2 h^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} (M h^2 + I_G) \omega^2$$

De cette dernière relation on déduit évidemment le nouveau moment d'inertie,

$$I = I_G + M h^2$$

18.11. Conservation de l'énergie mécanique incluant l'énergie de rotation

Si un corps en rotation est sous l'action de forces conservatives, le théorème de l'énergie mécanique s'applique et cette dernière se conserve. Outre l'énergie potentielle (qui dépend des forces conservatives en jeu), il faut tenir compte de l'énergie cinétique qui se compose de deux parties : une partie associée au mouvement de translation du centre de masse, et une partie associée à la rotation :

$$E_{ctot} = \frac{1}{2}MV_{G/O}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

Donc,

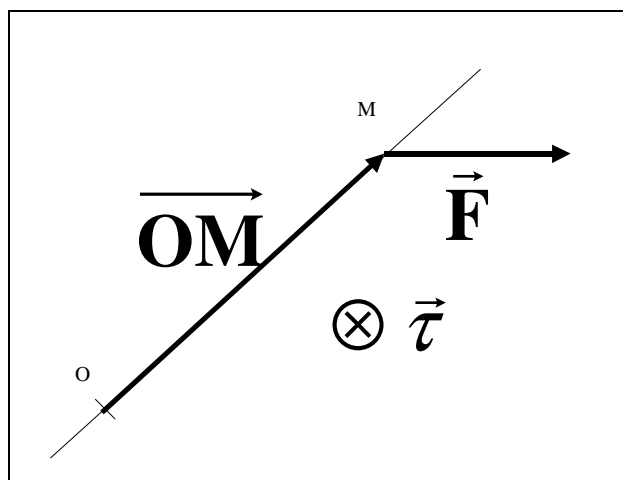
$$E_m = E_{ctot} + E_p = \frac{1}{2}MV_{G/O}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 + E_p = \text{cte}$$

18.12. Moment de force²²

Soit une force $\vec{F}$ appliquée en un point M. Relativement à une origine O, le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est *par définition* le vecteur :

$$\vec{\tau} = \vec{OM} \times \vec{F}$$

Dans la figure ci-dessous, le vecteur $\vec{\tau} = \vec{OM} \times \vec{F}$ est perpendiculaire au plan de la feuille et s'éloigne de vous.



18.13. Dynamique de rotation autour d'un axe fixe

Nous avons le résultat général suivant :

$$\tau = I\alpha$$

Remarque : le sens que nous pouvons donner à cette relation est le suivant. Puisque le moment d'inertie est analogue à la masse, $\tau = I\alpha$ est l'analogue du PFD dans le cas du mouvement de rotation. En effet, $\vec{\tau}$ s'apparente à une force, et α à une accélération. Ainsi, le PFD

²² En Anglais : *torque*.

dans le cadre d'un mouvement de rotation est obtenu pourvu qu'à la force on associe le moment de cette force, et qu'à l'accélération classique on associe l'accélération angulaire.

Démonstration :

Imaginons un solide en rotation accélérée. Puisqu'un tel corps est solide, cela signifie que nous devons le penser *indéformable*. Puisqu'il est indéformable l'accélération centripète en tout point du solide est toujours compensée par une accélération centrifuge, de telle sorte que la seule accélération pertinente est l'accélération tangentielle.

Considérons une force $\vec{F}_i$, orthogonale au vecteur position $\vec{r}_i = \overline{\vec{OM}_i}$. Cette force est responsable du mouvement de rotation du corps en une petite région du solide.

Dans cette petite région de masse m_i , nous avons,

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= m_i \vec{a}_i \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i &= \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i\end{aligned}$$

Puisque $\vec{F}_i$ est orthogonale à $\vec{r}_i = \overline{\vec{OM}_i}$, le terme en sinus du produit vectoriel est égal à un. Nous pouvons donc considérer la précédente relation en purs termes scalaires :

$$\tau_i = r_i F_i = r_i m_i a_{ti}$$

Mais,

$$a_{ti} = r_i \alpha_i$$

Donc,

$$\begin{aligned}\tau_i &= r_i F_i = r_i m_i a_{ti} = r_i m_i r_i \alpha = m_i r_i^2 \alpha \\ \tau_i &= m_i r_i^2 \alpha\end{aligned}$$

Si nous considérons l'ensemble des points du corps, le moment global est :

$$\begin{aligned}\tau &= \sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha \\ \tau &= \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha \\ \boxed{\tau} &= I \alpha\end{aligned}$$

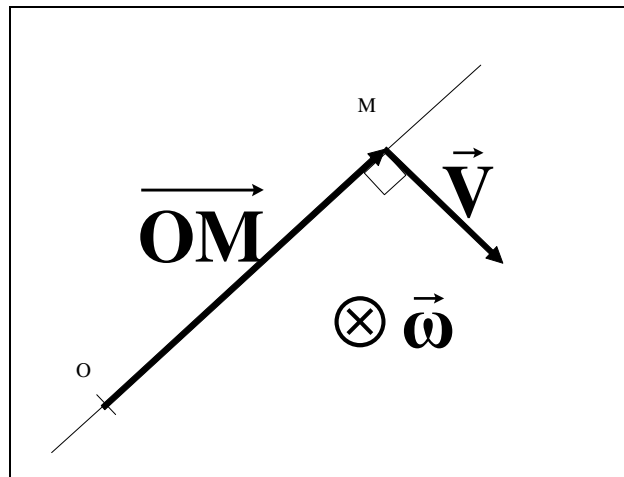
18.14. Vecteur de rotation instantané

Pour un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω , on peut définir un *vecteur rotation instantané* $\vec{\omega}$ ayant les deux propriétés suivantes :

- $\|\vec{\omega}\| = \omega$;
- $\vec{\omega}$ a même direction que l'axe de rotation.

Avec ces conditions, de manière compacte, pour *un point M tournant autour d'un point O* passant par l'axe de rotation, on peut écrire (pourvu que l'on demande à $\vec{\omega}$ d'avoir pour sens le sens donné par la règle des trois doigts ou du tire-bouchon):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$



Notons que la représentation de la rotation de M à l'aide d'un produit vectoriel est complètement justifiée puisque le rayon de la trajectoire circulaire suivie par M vaut $OM \sin \theta$ avec θ l'angle entre le vecteur $\vec{OM}$ et l'axe de rotation (parallèle par convention à $\vec{\omega}$).

18.15. Force d'inertie de Coriolis²³

La force centrifuge ne dépend pas de la vitesse d'une particule (de masse m) par rapport à un référentiel tournant non-inertiel. En fait, on suppose carrément que la particule ne bouge pas par rapport au référentiel tournant pour introduire la notion de force centrifuge.

Quand la particule se déplace *par rapport au référentiel tournant* selon une vitesse $\vec{v}'$, une autre force d'inertie se manifeste : la *force de Coriolis*.

On peut en effet montrer que si le référentiel non inertiel tourne selon un vecteur rotation $\vec{\omega}$, alors il existe une accélération supplémentaire dite de Coriolis,

²³ Gaspard Coriolis (Paris 1792 - Paris 1843) : Physicien français. Il a mis en évidence la force de déviation due à la rotation d'un repère (la Terre, par exemple) et s'exerçant sur les corps en mouvement à la surface de celui-ci.

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

et une force d'inertie associée, la force de Coriolis,

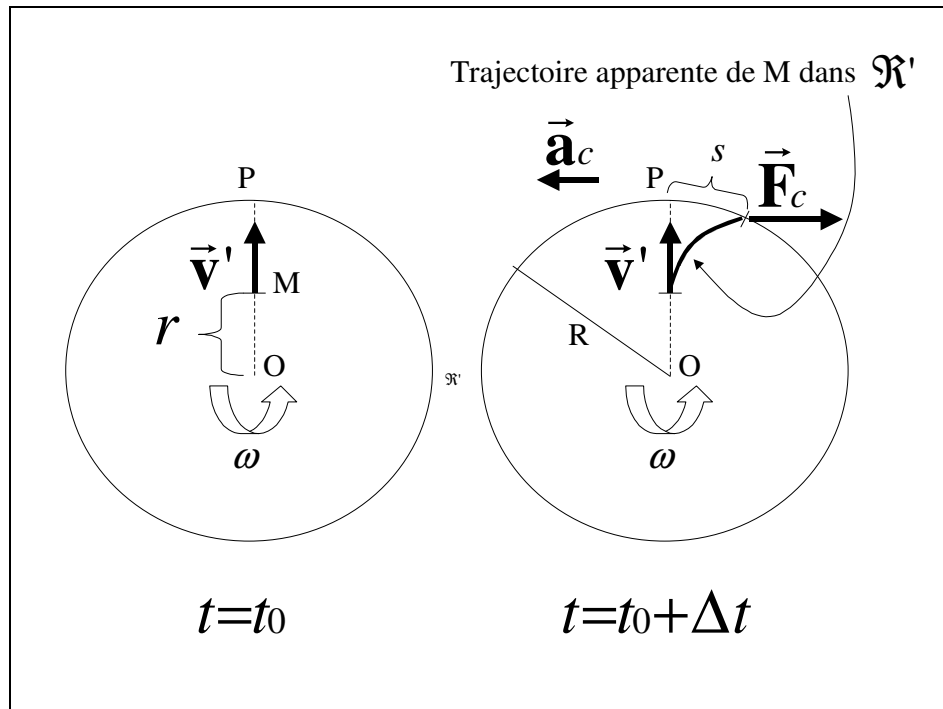
$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

18.15.1. Justification intuitive

Ce qui suit n'est pas une démonstration complète ou rigoureuse mais devrait vous convaincre de la justesse de la notion de force de Coriolis. Une démonstration rigoureuse est donnée plus loin.

Soit un référentiel tournant non-inertiel $\mathcal{R}'$ (par exemple un tourne-disque ou un manège). Ce référentiel tourne relativement à un référentiel inertiel fixe que l'on nomme $\mathcal{R}$ (le support du tourne-disque par exemple ou bien le sol dans le cas du manège). Dans la figure suivante, le vecteur $\vec{\omega}$ est perpendiculaire au plan de la feuille et est dirigé vers vous.

Dans la partie de gauche, on imagine un point M animé de la vitesse $\vec{v}'$ par rapport au tourne-disque. Ce point M se déplace le long d'un rayon du disque. Δt secondes plus tard (partie de droite), ce point M s'est déplacé de manière rectiligne et uniforme dans $\mathcal{R}$ mais, dans $\mathcal{R}'$, le mouvement apparaît accéléré et la particule semble déviée vers la droite (on a fait le dessin en faisant comme si le point P de référence était immobile).



En fait, au bout de Δt secondes, le point M semble avoir parcouru la distance s le long du périmètre du disque de rayon R . Supposons Δt petit. Dans ce cas, on peut dire que l'accélération $\vec{a}_c$ qui anime le point M dans $\mathcal{R}'$ est quasi-constante et,

$$s \approx \frac{1}{2} a_c \Delta t^2$$

D'autre part,

$$s \approx (\omega R) \Delta t$$

D'où,

$$\frac{1}{2} a_c \Delta t^2 = (\omega R) \Delta t$$

$$a_c = 2\omega \frac{R}{\Delta t}$$

Mais,

$$v' \approx \frac{R}{\Delta t}$$

D'où,

$$\boxed{a_c = 2\omega \times v'}$$

Le résultat précédent est sous forme scalaire, mais nous admettons pour l'instant l'expression vectorielle donnée au début de la section.

Ensuite, de la même manière que pour expliciter la force centrifuge, une force de Coriolis est naturellement associée à l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$: il suffit de multiplier $\vec{a}_c$ par la masse de la particule puis de prendre le vecteur opposé pour obtenir l'expression générale de la force d'inertie de Coriolis, $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$.

18.15.2. Référentiel tournant

Considérons maintenant un référentiel tournant S_r , dont l'origine coïncide en tout temps avec celle d'un référentiel inertiel S_i mais dont les axes sont en rotation uniforme par rapport à ceux de S_i . Désignons par $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ les vecteurs de base du référentiel S_i et par $\{\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}'\}$ ceux du référentiel tournant S_r . Le référentiel tournant est caractérisé par un vecteur de vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, constant en grandeur et en direction. Selon la relation (9.28), la dérivée temporelle des vecteurs de base $\{\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}'\}$ est

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{x}}' \quad \frac{d\hat{\mathbf{y}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{y}}' \quad \frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{z}}' \quad (10.8)$$

Un vecteur quelconque $\mathbf{B}$ peut être décrit dans les deux repères comme

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}} \\ &= B'_x \hat{\mathbf{x}}' + B'_y \hat{\mathbf{y}}' + B'_z \hat{\mathbf{z}}' \end{aligned} \quad (10.9)$$

Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_i &= \dot{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \dot{B}_y \hat{\mathbf{y}} + \dot{B}_z \hat{\mathbf{z}} \\ &= \dot{B}'_x \hat{\mathbf{x}}' + \dot{B}'_y \hat{\mathbf{y}}' + \dot{B}'_z \hat{\mathbf{z}}' + B'_x \dot{\hat{\mathbf{x}}}' + B'_y \dot{\hat{\mathbf{y}}}' + B'_z \dot{\hat{\mathbf{z}}}' \\ &= \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (B'_x \hat{\mathbf{x}}' + B'_y \hat{\mathbf{y}}' + B'_z \hat{\mathbf{z}}') \\ &= \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{B} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Le premier terme n'est autre que la dérivée temporelle de $\mathbf{B}$ telle que mesurée dans le référentiel tournant, alors que le membre de gauche est cette même dérivée, mesurée dans le référentiel fixe. On écrit donc

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_i = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{B} \quad (10.11)$$

En particulier, si $\mathbf{B} = \mathbf{r}$ (la position d'un objet), cette formule nous permet de comparer les vitesses du même objet dans les deux référentiels :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad (10.12)$$

Le but de cet exercice est de comparer les accélérations d'un objet mesurées dans les deux référentiels. Pour ce faire, il faut appliquer le relation (10.11) deux fois de suite :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_i \\ &= \left(\frac{d}{dt} [\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}] \right)_i \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_i + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_i \quad (\boldsymbol{\omega} \text{ est constant}) \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$$

Ce qui donne finalement

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (10.14)$$

Selon notre définition $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_0$ de l'accélération du référentiel, on trouve

$$\mathbf{a}_0 = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (10.15)$$

et la force d'inertie $\mathbf{F}_0$ ressentie dans le référentiel tournant est alors

$$\boxed{\mathbf{F}_0 = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})} \quad (10.16)$$

18.15.2.1. Force centrifuge

Le deuxième terme de (10.16) est appelé **force centrifuge**:

$$\mathbf{F}_{\text{cent.}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (10.17)$$

Cette force d'inertie ne dépend que de la distance entre l'objet et l'axe de rotation. En effet, décomposons $\mathbf{r}$ en composantes parallèle et perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$. Comme $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\perp} = 0$ et $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\parallel} = 0$, on trouve, d'après l'expression (1.14) du double produit vectoriel,

$$\begin{aligned} -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) &= -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\perp}) \\ &= m \{ \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_{\perp} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\perp}) \boldsymbol{\omega} \} \\ &= m\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_{\perp} \end{aligned} \quad (10.18)$$

La grandeur $r_{\perp}$ du vecteur $\mathbf{r}_{\perp}$ est la distance entre le point $\mathbf{r}$ et l'axe de rotation du référentiel.

Si l'objet est stationnaire dans S_r , c'est-à-dire si $\mathbf{v}_r = 0$, alors $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{\perp}$ ou, en grandeur,

$$v_i = \omega r_{\perp} \quad (10.19)$$

de sorte que la grandeur de la force centrifuge peut s'exprimer aussi comme

$$F_{\text{cent.}} = \frac{mv_i^2}{r_{\perp}} \quad (\mathbf{v}_r = 0) \quad (10.20)$$

Il est bien important de distinguer les épithètes *centrifuge* et *centripète*. Techniquement, une force est qualifiée de *centripète* si elle est dirigée vers le centre d'un cercle et une telle force est généralement réelle. Par contre, la force *centrifuge* est une force d'inertie qui n'a de sens que dans un référentiel tournant et est dirigée vers l'extérieur, par rapport à l'axe de rotation du référentiel. Un exemple de la vie courante nous aidera à mieux distinguer les deux. Considérons une automobile en virage, décrivant un arc de cercle de rayon R à une vitesse v . Du point de vue d'un référentiel inertiel, un passager de cette automobile est donc en trajectoire circulaire et son accélération $\mathbf{a}$ est dirigée vers le centre du cercle et sa grandeur est $a = v^2/R$. La force qui maintient le passager sur cette trajectoire est principalement exercée par la portière droite et la banquette de l'automobile; cette force est réelle et peut être qualifiée de centripète. Plaçons-nous maintenant dans le référentiel (accéléré) de l'automobile. Le passager est stationnaire dans ce référentiel et la force totale (réelle + fictive) agissant sur lui est donc nulle. La force réelle est la force centripète décrite plus haut.

La force d'inertie est la force centrifuge, de grandeur v^2/R et dirigée vers l'extérieur, exactement opposée à la force centripète. Remarquons que le passager affirmera tout naturellement ressentir la force centrifuge, pour la même raison qu'il affirme ressentir la force de gravité : localement, les deux forces ont le même type d'effet, d'après le principe d'équivalence. Cependant, comme dans le cas de la sensation de pesanteur mentionné plus haut, c'est plutôt la force exercée par la portière et la banquette qui est ressentie par le passager (au sens physiologique du terme) et non la force centrifuge. La sensation de poussée est un phénomène bien réel, alors que la force centrifuge est un concept inventé de toute pièce afin d'appliquer la deuxième loi de Newton dans des circonstances illicites (un référentiel non inertiel).

18.15.2.2. Force de Coriolis

Le premier terme de (10.16) est appelé **force de Coriolis**:

$$\mathbf{F}_{\text{Cor.}} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \quad (10.21)$$

et ne dépend que de la vitesse mesurée dans le référentiel tournant.

La Terre constitue un exemple particulièrement intéressant de référentiel tournant où la force de Coriolis se révèle entre autres dans les systèmes climatiques. À un endroit donné sur la Terre, la vitesse angulaire se décompose en composantes horizontale et verticale : $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_v + \boldsymbol{\omega}_h$, où $|\boldsymbol{\omega}_v| = \omega \sin \lambda$ (λ est la latitude). La force de Coriolis se décompose de manière similaire :

$$\mathbf{F}_{\text{Cor.}} = -2m\boldsymbol{\omega}_v \wedge \mathbf{v}_r - 2m\boldsymbol{\omega}_h \wedge \mathbf{v}_r \quad (10.22)$$

Si $\mathbf{v}_r$ est parallèle à la surface de la Terre, le deuxième terme est forcément vertical et n'apporte qu'une faible contribution à la gravité apparente à cet endroit. Le premier terme est cependant parallèle à la surface et a un effet important sur le déplacement des masses d'air : voir à cet effet la section suivante.

Quant à la force centrifuge associée à la rotation de la Terre, on ne peut la distinguer localement de la force de gravité réelle exercée par la Terre, conformément au principe d'équivalence. Le calcul de la contribution de la force centrifuge à la gravité ressentie à la surface d'une planète sphérique est l'objet de l'exercice 10.6. On désigne par **champ de pesanteur** la somme du champ gravitationnel réel $\mathbf{g}$ et de $-\mathbf{a}_0$ (la force centrifuge divisée par la masse) :

$$\mathbf{g}_{\text{pes.}} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0 \quad (10.23)$$

C'est dans la direction de $\mathbf{g}_{\text{pes.}}$ que pointe un fil à plomb. La contribution de la force centrifuge au champ de pesanteur est la plus grande à l'équateur, mais ne vaut qu'environ 0,3% du champ gravitationnel.

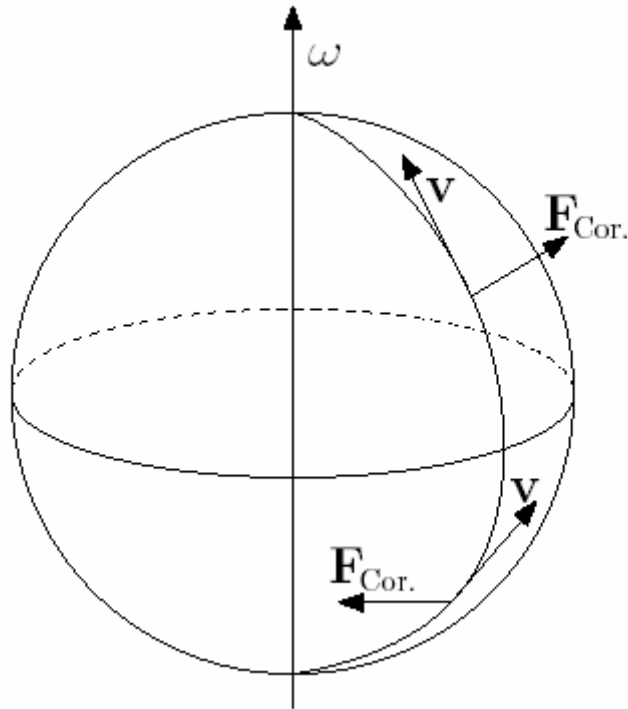


Figure 10.1. La force de Coriolis s'exerçant sur un objet qui se dirige vers le nord est dirigée vers l'est dans l'hémisphère nord et vers l'ouest dans l'hémisphère sud.

18.15.3. Force de Coriolis et systèmes climatiques

C'est en météorologie qu'on trouve les applications les plus importantes de la force de Coriolis. Expliquons premièrement comment cette effet explique la direction des vents dominants. La figure 10.2 illustre une coupe de l'atmosphère terrestre, ainsi que la direction dominante des masses d'air. La différence de température entre la surface de la Terre et la haute atmosphère cause un mouvement de convection de l'air qui s'organise en six cellules de convection appelées *cellules de Hadley*. Les masses d'air de la basse atmosphère ont donc un mouvement naturel dirigé vers le nord, à nos latitudes (45°). Cependant, la force de Coriolis dévie ce mouvement vers l'est, produisant un vent d'ouest (c'est-à-dire en provenance de l'ouest) : ce sont les vents dominants tempérés de l'ouest. Sous les tropiques, les vents dominants (les alizés) sont de l'est, comme près des pôles. Remarquez que la direction des vents dominants est la même dans les deux hémisphères, car les directions des courant de convection dans les deux hémisphères sont opposées. Ainsi, au XVIII^e siècle, les navires effectuant le commerce triangulaire entre la France, les Antilles et le Canada pouvaient profiter des alizés pour traverser l'Atlantique vers les Antilles et des vents tempérés de l'ouest pour passer de la Nouvelle-France vers la Métropole.

La force de Coriolis explique aussi la formation des cyclônes et des anticyclônes. Lorsque l'air afflue vers un centre de basse pression, sa vitesse initiale, dirigée vers le centre, est modifiée par la force de Coriolis de sorte que le flot de l'air forme un tourbillon antihoraire (dans l'hémisphère nord). Voir la figure 10.3a. Dans l'hémisphère sud, le tourbillon est dans l'autre sens. Si la zone de haute pression est au centre, la direction des tourbillons est inversée.

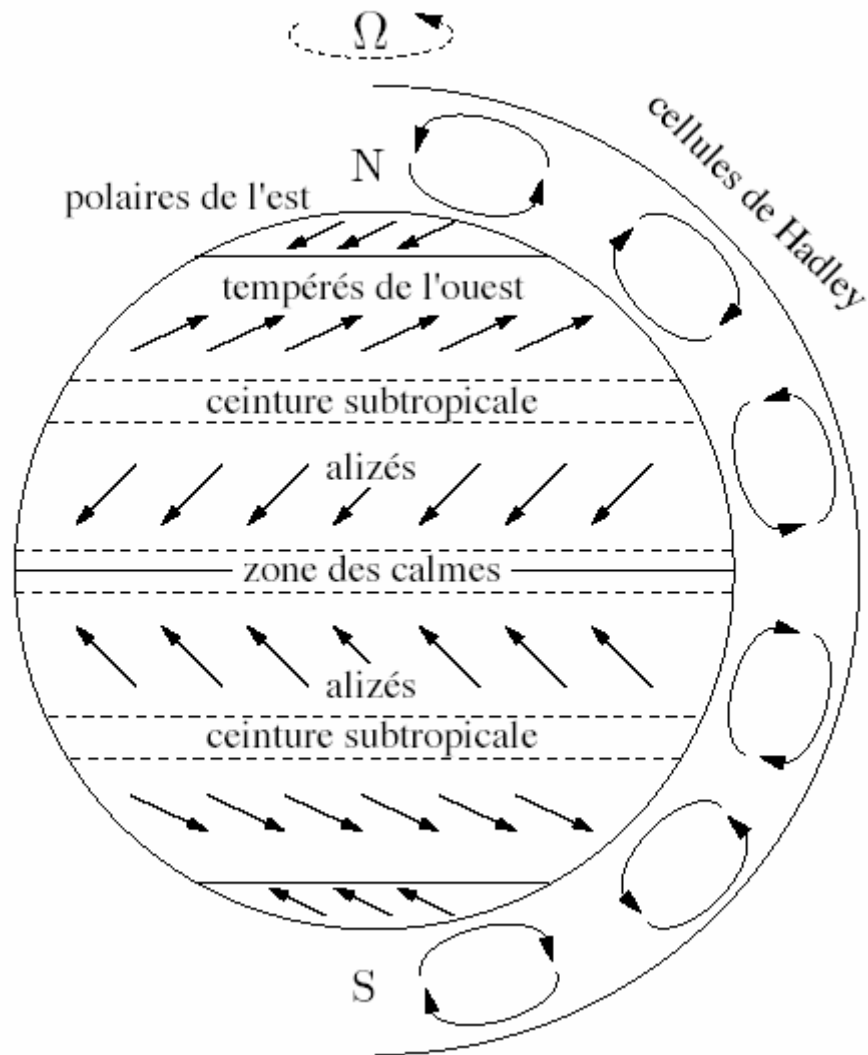


Figure 10.2. Explication de la directions des vents dominants par la force de Coriolis.

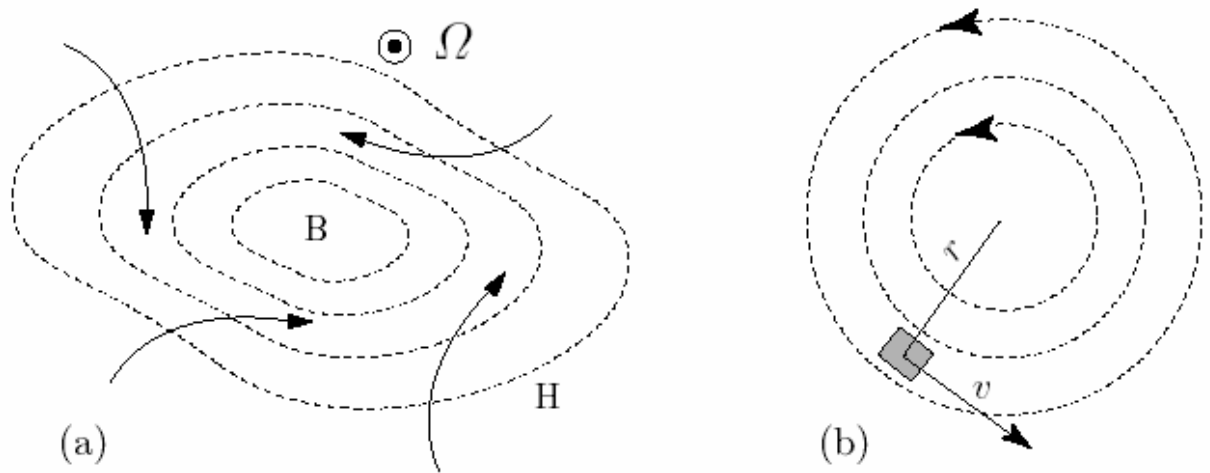


Figure 10.3. Formation des cyclones expliquée par la force de Coriolis.

18.16. Équilibre statique (solide & particule)

Pour qu'une particule soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des forces appliquées soit nulle. Dans ce cas, soit la particule est immobile, soit elle poursuit un mouvement rectiligne et uniforme.

Dans le cas d'un solide, une somme des forces nulle ne garantit pas qu'il y ait équilibre : en fait il faut que la somme des moments des forces soit nulle.

Un corps solide est en équilibre si $\sum_i \tau_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$

18.17. Vecteur moment cinétique

Par définition, le moment cinétique $\vec{\ell}$ est le moment de la quantité de mouvement :

$\vec{\ell} = \vec{OM} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$
--

18.18. Dynamique de rotation et conservation du moment cinétique

Dans un référentiel inertiel, nous avons le résultat général suivant :

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i}$$

De plus, si la somme des forces est nulle ou si le moment de la somme des forces est nul (si les forces sont centrales par exemple !) alors le moment cinétique est constant, i.e. se conserve.

Démonstration :

Nous avons,

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Dérivons cette expression par rapport au temps,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \\ \frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \end{aligned}$$

Mais $\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$ (produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires) donc,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i \\ \frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i \end{aligned}$$

Si la somme des forces est nulle ou si le moment de la somme des forces est nul alors,

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{\ell} = \text{cte}$$

18.19. Dimension du moment cinétique, analogie avec la quantité de mouvement

Puisque $\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v}$, la dimension du moment cinétique est celle d'une longueur par celle d'une quantité de mouvement. Si $\vec{r}$ et $m\vec{v}$ sont orthogonaux on a :

$$\boxed{\|\vec{\ell}\| = \ell = r \times mv = r \times m \times \omega r = mr^2 \omega = I \omega}$$

Ainsi le moment cinétique est homogène au produit d'un moment d'inertie par une vitesse angulaire.

Nous savons déjà que l'analogie de la masse dans un mouvement de rotation est le moment d'inertie. Puisque également l'analogie de la vitesse linéaire est la vitesse angulaire,

alors le moment cinétique est un analogue de la quantité de mouvement pour un mouvement de rotation :

$$\boxed{\ell = I\omega \quad \leftrightarrow \quad p = mv}$$

SOMMAIRE

<u>1. AVERTISSEMENT</u>	3
<u>2. QUELQUES REPÈRES HISTORIQUES ET BIOGRAPHIQUES</u>	3
<u>3. LES VECTEURS</u>	5
<u>ANNEXE : DÉMONSTRATIONS DE THÉORÈMES D'ALGÈBRE VECTORIELLE</u>	8
PRODUIT SCALAIRE ET MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE	8
DISTRIBUTIVITÉ DU PRODUIT SCALAIRE SUR L'ADDITION VECTORIELLE	8
PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS DANS UNE BASE CARTÉSIENNE	9
PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS ET AIRE DU PARALLÉLOGRAMME ASSOCIÉ	10
ANTICOMMUTATIVITÉ DU PRODUIT VECTORIEL	10
PRODUIT VECTORIEL ET MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE	11
FORMULE DU PRODUIT TRIPLE OU PRODUIT MIXTE	11
DISTRIBUTIVITÉ DU PRODUIT VECTORIEL RELATIVEMENT À L'ADDITION VECTORIELLE	11
PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS DANS UNE BASE CARTÉSIENNE	12
FORMULE DU TRIPLE PRODUIT VECTORIEL	12
<u>4. RAPPELS ET COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE</u>	13
4.1. CHANGEMENT DE BASE DANS UN ESPACE VECTORIEL	13
4.2. MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE APRÈS UN CHANGEMENT DE BASE	18
4.3. DIAGONALISATION D'UNE MATRICE SYMÉTRIQUE	19
4.4. COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET POLAIRES	20
4.5. COORDONNÉES SPHÉRIQUES	22
<u>ANNEXE : QUELQUES JUSTIFICATIONS ADDITIONNELLES D'ALGÈBRE LINÉAIRE ET D'ALGÈBRE VECTORIELLE</u>	23
NOTION D'APPLICATION LINÉAIRE ET REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE ENTRE ESPACES VECTORIELS DE DIMENSIONS FINIES	23
CONVENTION D'EINSTEIN : ÉCRITURES POUR SE CONVAINCRE DE SON BIEN FONDÉ	24
<u>5. CINÉMATIQUE DU POINT</u>	26
5.1. DÉFINITIONS DE BASE	26
5.2. MOUVEMENT À ACCÉLÉRATION CONSTANTE ET À DEUX DIMENSIONS	27
5.3. MOUVEMENT DE CHUTE LIBRE	27
5.4. CINÉMATIQUE D'UN MOUVEMENT PLAN QUELCONQUE	28

5.5.	CAS PARTICULIER DU MOUVEMENT DE ROTATION	29
5.6.	TROIS RÉSULTATS GÉNÉRAUX DE CINÉMATIQUE	30
6.	RÉFÉRENTIELS INERTIELS ET TRANSFORMATION DE GALILÉE	33
6.1.	MOUVEMENTS RELATIFS	33
6.2.	TRANSFORMATION DE GALILÉE	34
6.3.	TRANSFORMATIONS DE GALILÉE POUR LA VITESSE ET L'ACCÉLÉRATION – NOTION DE FORCES D'INERTIE	35
6.4.	NOTION DE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE	37
7.	LES TROIS LOIS DU MOUVEMENT DE NEWTON - DYNAMIQUE DU POINT - GÉNÉRALITÉS	40
7.1.	NOTIONS DE MASSE ET DE POIDS	40
7.2.	PRINCIPE D'INERTIE ET RÉFÉRENTIEL D'INERTIE (1 ^{ÈRE} LOI)	40
7.3.	NOTION DE FORCE - PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (2 ^{ÈME} LOI)	41
7.4.	DYNAMIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE	41
7.5.	DYNAMIQUE DU POINT DANS UN RÉFÉRENTIEL NON INERTIEL; EXEMPLES DE FORCES D'INERTIE SIMPLES	42
7.6.	PRINCIPE DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION (3 ^{ÈME} LOI)	43
8.	INTERACTIONS FONDAMENTALES	44
8.1.	INTERACTIONS GRAVITATIONNELLES	44
8.2.	INTERACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES	44
8.3.	INTERACTIONS FAIBLES	45
8.4.	INTERACTIONS FORTES	46
9.	LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE	46
9.1.	INTRODUCTION	46
9.2.	ACCÉLÉRATION DE LA GRAVITATION À LA SURFACE D'UN ASTRE	48
9.3.	TROISIÈME LOI DE KEPLER DANS LE CAS PARTICULIER DU MOUVEMENT CIRCULAIRE	48
10.	FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	49
10.1.	FORCE ÉLECTRIQUE DE COULOMB	49
10.2.	FORCE MAGNÉTIQUE ET FORCE DE LORENTZ	50
11.	UNIFICATION DES FORCES FONDAMENTALES	50
11.1.	L'UNIFICATION NEWTONIENNE	50
11.2.	L'UNIFICATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE	51
11.3.	LA GÉOMÉTRISATION DE L'ESPACE	51
11.4.	L'UNIFICATION QUANTIQUE	52

11.5. LA THÉORIE ÉLECTROFAIBLE	52
<u>12. SYSTÈMES DE PARTICULES</u>	<u>53</u>
12.1. BARYCENTRE ET CENTRE DE MASSE POUR UNE DISTRIBUTION DISCRÈTE DE POINTS	53
12.2. CENTRE DE MASSE POUR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE POINTS	53
12.3. MOUVEMENT DU CENTRE DE MASSE POUR UNE DISTRIBUTION DISCRÈTE DE POINTS	54
12.4. QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UN ENSEMBLE DISCRET DE POINTS	55
12.5. ACCÉLÉRATION DU CENTRE DE MASSE POUR UNE DISTRIBUTION DISCRÈTE DE POINTS	55
12.6. MOUVEMENT DU CENTRE DE MASSE QUAND LA SOMME DES FORCES EXTÉRIEURES APPLIQUÉES EST NULLE	56
12.7. ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME DE PARTICULES OU 1 ^{ER} THÉORÈME DE KOENIG	56
<u>13. FORCES MACROSCOPIQUES</u>	<u>59</u>
13.1. NOTION DE PRESSION	59
13.2. VARIATION DE LA PRESSION AVEC LA PROFONDEUR DANS UN LIQUIDE	60
13.3. PRINCIPE DE PASCAL	61
13.4. PRINCIPE D'ARCHIMÈDE	61
13.5. ESTIMATION (GROSSIÈRE) DE LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE	61
13.6. FORCES ÉLASTIQUES OU DE COHÉSION	62
13.6.1. LOI DE HOOKE	63
13.6.2. FORCE DE CONTRAINTE	64
13.6.3. FORCE D'ÉTIREMENT OU DE TENSION	64
13.7. FROTTEMENT ET VISCOSITÉ : LES FORCES DE CONTACT	66
13.7.1. FORCES DE FROTTEMENT SOLIDE	66
13.7.1.1. Frottement statique	66
13.7.1.2. Frottement dynamique	67
13.7.2. FORCE DE FROTTEMENT VISQUEUX	68
<u>ANNEXE : UNE APPLICATION DES FORCES D'INERTIE POUR EXPLIQUER LES FORCES DE MARÉES GRAVITATIONNELLES</u>	<u>70</u>
GÉNÉRALITÉS THÉORIQUES	70
PRÉCISIONS SUR LES VARIATIONS D'ACCÉLÉRATION CENTRIFUGE AU SEIN DE L'ASTRE SUBISSANT LES MARÉES	73
APPLICATION : PRÉCISIONS SUR LES MARÉES OCÉANIQUES	76
APPLICATION : COHÉSION D'UN SATELLITE ET LIMITE DE ROCHE	76
UN PEU D'HISTOIRE	79
<u>ANNEXE : UNE APPLICATION DE LA TRANSFORMATION GALILÉENNE DES VITESSES, L'ABERRATION DES ÉTOILES</u>	<u>80</u>
<u>14. APPLICATIONS DES LOIS DU MOUVEMENT</u>	<u>82</u>
14.1. PROJECTILES	83
14.2. LE PENDULE	84

15. TRAVAIL, ÉNERGIE, FORCES CONSERVATIVES	86
15.1. TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE	86
15.2. TRAVAIL DU POIDS (COMME CAS PARTICULIER DE FORCE CONSTANTE)	88
15.3. TRAVAIL D'UNE FORCE VARIABLE	88
15.4. EXEMPLE DE TRAVAIL D'UNE FORCE VARIABLE : FORCE DE RAPPEL D'UN RESSORT (LOI DE HOOKE)	89
15.5. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE	90
15.6. PUISSANCE	91
15.7. FORCES CONSERVATIVES À UNE DIMENSION (1D)	91
15.8. EXEMPLES DE FORCES CONSERVATIVES 1D	92
15.9. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE 1D	92
15.10. FORCES CONSERVATIVES, CAS GÉNÉRAL	93
15.10.1. INTRODUCTION	93
15.10.2. NOTION DE GRADIENT	94
15.10.3. EXEMPLE D'USAGE DU GRADIENT : COURBES DE NIVEAU	95
15.10.4. FORCES CONSERVATIVES : DÉFINITION GÉNÉRALE	96
15.10.5. LE POTENTIEL ASSOCIÉ À LA FORCE GRAVITATIONNELLE	98
15.10.6. ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE À g CONSTANT	99
15.10.7. NOTION DE ROTATIONNEL ET COMMENT VÉRIFIER QU'UNE FORCE EST CONSERVATIVE	100
15.11. ROTATIONNEL ET MOUVEMENT DE ROTATION	103
15.12. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE, CAS GÉNÉRAL	104
15.12.1. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE EN DIMENSION TROIS	104
15.12.2. VITESSE DE LIBÉRATION	105
15.13. ÉNERGIE POTENTIELLE ET STABILITÉ	107
ANNEXE : CHAMPS DE VECTEURS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES	109
CHAMP DE VECTEURS : DÉFINITION	109
DIVERGENCE D'UN CHAMP DE VECTEURS	109
ROTATIONNEL D'UN CHAMP DE VECTEURS	109
FORMES DIFFÉRENTIELLES (PETITE INTRODUCTION)	110
INTÉGRALE CURVILIGNE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE	111
16. LE PROBLÈME DE KEPLER	113
16.1. LES LOIS DE KEPLER ET NEWTON	113
16.2. LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE	114
16.3. UN PEU D'HISTOIRE SUR LES SYSTÈMES DU MONDE	117
16.3.1. BRAHE, COPERNIC ET KEPLER	117
16.3.2. PROCÈS DE GALILÉE, 12 AVRIL-22 JUIN 1633.	120
16.3.3. SYSTÈMES DU MONDE – QUELQUES REPÈRES CHRONOLOGIQUES	120
16.4. MOUVEMENT D'UN POINT SOUMIS À UNE FORCE CENTRALE	122
16.5. MÉTHODE DE BINET DANS LE CAS DES FORCES CENTRALES EN r^{-2}	124
16.6. QUELQUES RELATIONS UTILES À PROPOS DES ELLIPSES	133
16.7. RÉDUCTION DU PROBLÈME À DEUX CORPS	136
16.8. LOI DES AIRES DANS DIFFÉRENTS RÉFÉRENTIELS	141
16.9. ASPECTS ÉNERGÉTIQUES DU PROBLÈME DE KEPLER	145

16.9.1.	SIGNE DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE ET EXCENTRICITÉ DE LA TRAJECTOIRE CONIQUE	145
16.9.2.	NOTION DE PARAMÈTRE D'IMPACT – CHANGEMENT D'ORBITE	147
17.	QUANTITÉ DE MOUVEMENT – COLLISIONS OU CHOCS	149
17.1.	DÉFINITION MODERNE DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT	149
17.2.	QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET DEUXIÈME LOI DE NEWTON	149
17.3.	CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT QUAND LES FORCES APPLIQUÉES SONT INEXISTANTES OU ONT POUR SOMME LE VECTEUR NUL	149
17.4.	CHOCS (OU COLLISIONS) ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT	150
17.5.	CHOCS ÉLASTIQUES ET INÉLASTIQUES	150
17.6.	ÉTUDE GÉNÉRALE DES COLLISIONS ÉLASTIQUES	151
17.6.1.	INTRODUCTION	151
17.6.2.	COLLISION EN UNE DIMENSION	151
17.6.3.	COLLISIONS EN DEUX DIMENSIONS ET ANGLE DE DIFFUSION	153
17.7.	THÉORÈME DE KOENIG ET COLLISIONS INÉLASTIQUES	158
17.8.	VARIATION DE L'ÉNERGIE INTERNE DANS LES COLLISIONS INÉLASTIQUES	159
17.9.	FUSÉES ET OBJETS À MASSE VARIABLE	160
18.	ROTATION D'UN CORPS RIGIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE	162
18.1.	CINÉMATIQUE DE ROTATION : VITESSE ET ACCÉLÉRATION ANGULAIRES	162
18.2.	ACCÉLÉRATIONS RADIALE ET TANGENTIELLE	163
18.3.	CAS PARTICULIER DU MOUVEMENT DE ROTATION À VITESSE ANGULAIRE CONSTANTE	164
18.4.	CINÉMATIQUE DE ROTATION À ACCÉLÉRATION ANGULAIRE CONSTANTE	164
18.5.	TRANSMISSION DU MOUVEMENT DE ROTATION, ENGRENAGES	165
18.6.	ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION ET MOMENT D'INERTIE	165
18.7.	MOMENT D'INERTIE D'UN CORPS RIGIDE : INTERPRÉTATION	166
18.8.	MOMENT D'INERTIE DES DISTRIBUTIONS CONTINUES DE MATIÈRE	167
18.9.	CORPS EN ROTATION ET TRANSLATION SIMULTANÉES	167
18.10.	THÉORÈME DE HUYGENS OU DES AXES PARALLÈLES	168
18.11.	CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE INCLUANT L'ÉNERGIE DE ROTATION	169
18.12.	MOMENT DE FORCE	170
18.13.	DYNAMIQUE DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE	170
18.14.	VECTEUR DE ROTATION INSTANTANÉ	171
18.15.	FORCE D'INERTIE DE CORIOLIS	172
18.15.1.	JUSTIFICATION INTUITIVE	173
18.15.2.	RÉFÉRENTIEL TOURNANT	175
18.15.2.1.	Force centrifuge	176
18.15.2.2.	Force de Coriolis	177
18.15.3.	FORCE DE CORIOLIS ET SYSTÈMES CLIMATIQUES	178
18.16.	ÉQUILIBRE STATIQUE (SOLIDE & PARTICULE)	180
18.17.	VECTEUR MOMENT CINÉTIQUE	180
18.18.	DYNAMIQUE DE ROTATION ET CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE	180
18.19.	DIMENSION DU MOMENT CINÉTIQUE, ANALOGIE AVEC LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT	181