

Mécanique des Milieux Continus

Recueil d'exercices

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Centre de Cluny

M.MAYA

maya@cluny.ensam.fr
www.cluny.ensam.fr/MAYA/index.htm

Ce petit recueil d'exercices n'a pas d'autre but que d'aider l'étudiant dans sa compréhension de l'enseignement de la Mécanique des Milieux Continus. Il doit permettre de mieux cerner les champs d'investigation de cette science. Il rassemble de nombreux sujets de tests ou d'examens soit du centre de Cluny, soit d'autres écoles.

Il est à noter que si l'étudiant cherche bien, il n'est pas impossible qu'il trouve dans ce document son futur sujet de test ou d'examen.

**Travaillez, prenez de la peine,
C'est le fonds qui manque le moins.**

Le laboureur et ses enfants
Jean De LA FONTAINE (1621-†1695)

Sommaire

Notation indicielle	6
Cisaillement en grandes déformations	7
Etat de déformation homogène triaxiale	8
Cisaillement en petites déformations	9
Etude d'un état de déformation	10
Etat de contrainte uniforme	11
Etat de contrainte uniaxial	11
Etat de contraintes dans un cylindre	12
Etat de contrainte	12
Théorie des poutres : état de contrainte	13
Torsion flexion d'une poutre	14
Etude d'un chargement sur une gouttière	14
Mécanique de la rupture en mode I	16
Projectile dans un canon	16
Mesures de déformations	17
Déplacement d'un corps solide	17
Etude d'un massif en compression	18
Etude d'un champ de déplacement	18
Sphère soumise à son champ de gravitation	19
Corps soumis à son propre poids	19
Etude d'une poutre	21
Etude d'un tube	21
Compatibilité de déformations	22
Détermination d'un champ de déplacement	22
Champ de pesanteur sur un cylindre	23
Contraintes dans un domaine	24
Sollicitation dans un cylindre	25
Chargement d'un cylindre de révolution	26
Etude d'une poutre de section triangle équilatéral	27
Poutre demi cylindrique	28
Etude des critères de limite élastique	28
Poutre en flexion	29
Flexion composée d'une poutre demi cylindrique	30
Etude d'un barrage	31
Calcul des dimensions d'un réservoir sphérique	32
Taraudage d'un tube	32
Déplacement radial	33
Etude d'un assemblage fretté	33
Etude de cylindres élastiques en compression radiale	34
Pièces de révolution	34
Etude d'un palier lisse	35
Encastrement d'un pion cylindrique dans une plaque	35
Etude d'un vérin	36

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ARTS ET METIERS
Centre d'Enseignement et de Recherche de CLUNY

Canalisation hydraulique	37
Déplacement orthoradial.....	38
Etude d'un assemblage cylindrique.....	39
Etude de liaisons cylindriques	40
Coefficient de Poisson $\nu = 0,25$	41
Etude du changement eau-glace	42
Cisaillement plan dans une plaque percée	43
Torsion d'une poutre de section triangulaire.....	44
Torsion d'un solide de révolution.....	45
Torsion d'un tube elliptique	46
Champ de force radial.....	47
Chargement d'un barreau rectangulaire.....	48
Enveloppe cylindrique	49
Sollicitation combinée d'un cylindre.....	51
Transformation hélicoïdale.....	52
Etude d'un volant d'inertie	53
Poutre triangulaire	54
Etude d'un appui circulaire à trou circulaire en élastomère.....	55
Elasticité plane en coordonnées cartésiennes	57
Elasticité plane en coordonnées cylindriques	58
Contrainte en pointe de fissure	59
Poutre courbe.....	60
Cylindre en pression	61
Etude des contraintes dans un disque pesant	62
Etude d'un oedomètre.....	63
Pression de Hertz.....	64
Milieu demi cylindrique	65
Pion indéformable dans une plaque.....	66
Poutre en état plan de contrainte.....	67
Arbre entaillé	68
Réaction d'un sol élastique sur une conduite flexible.....	69
Console	70
Plaque en contrainte plane	71
Réalisation d'un tube en matériau composite	72
Déformations plastiques d'un tube en pression.....	74
Sollicitation élastoplastique d'une sphère	75
Ecrasement d'un lopin cylindrique.....	76
Détermination d'un effort de presse.....	78
Examen LILLE 30 mai 2002	79
Examen METZ 12 janvier 2004	81

COORDONNEES SPHERIQUES	84
-------------------------------------	-----------

Notation indicielle

- 1- En utilisant le symbole de Lévi Civita δ_{ijk} donner une formule indicielle permettant d'exprimer le vecteur rotationnel d'un vecteur $\overline{rot(\vec{U})}$.

Utiliser cette relation pour démontrer les deux formules suivantes :

$$\overline{rot(\overline{grad f})} = \vec{0}$$

$$div(\overline{rot(\vec{U})}) = 0$$

- 2- Ecrire la trace d'une matrice en utilisant la convention d'Einstein.

- 3- En adoptant la convention d'Einstein, a-t-on le droit d'écrire les formules suivantes ?

$$a_{ij} x_i x_j + b_{kl} x_k x_l = (a_{ij} + b_{ij}) x_i x_j$$

$$a_{ij} x_i + b_{kl} x_k = (a_{ij} + b_{ij}) x_i$$

$$(a_i b_i)^2 (c_i d_i)^2 = (a_i c_i)^2 (b_i d_i)^2$$

$$a_{i3} (b_{3i} + c_{3i}) = a_{i3} b_{3i} + a_{k3} c_{3k}$$

- 4- Résoudre l'équation $\delta_{ij} x_j x_i x_k = \delta_{ik} x_j x_i x_k$

Calculer les expressions suivantes :

$$\frac{d}{dt} (\delta_{ij} \delta_{jk} a_i b_k)$$

$$\frac{d}{dt} (\delta_{ij} a_i a_j)$$

$$(A_{ij} x_i x_j)_{,kl}$$

Démontrer l'égalité suivante :

$$(2 a_{ijh} - a_{hij}) x_i x_j = (a_{ijh} + a_{jih} - a_{hij}) x_i x_j$$

Cisaillement en grandes déformations

On considère le champ de déplacement donné par les relations suivantes :

$$\vec{u}(X_j, t) = \vec{x} - \vec{X} = k X_2 \vec{E}_1$$

1- Déterminer alors les composantes, dans la base orthonormée directe $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, des tenseurs suivants :

F	$d\vec{x} = \mathbb{F} d\vec{X}$	Tenseur gradient
C	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = d\vec{X} \mathbb{C} d\vec{X}'$	Tenseur de Cauchy Green Droit
E	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \mathbb{E} d\vec{X}'$	Tenseur des déformations de Green Lagrange
B	$d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = d\vec{x} \mathbb{B}^{-1} d\vec{x}'$	Tenseur de Cauchy Green Gauche
A	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{x} \mathbb{A} d\vec{x}'$	Tenseur des déformations d'Euler Almansi

2- Constater que l'on a bien la relation :

$$\mathbb{A} = (\mathbb{F}^{-1})^T \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}^{-1}$$

3- On se place au point M_0 de coordonnées (1,1,0). Soient \vec{a} le vecteur représentant la bissectrice du plan (\vec{E}_1, \vec{E}_2) et \vec{b} le vecteur représentant la trisectrice du trièdre :

$$\vec{a} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad \vec{b} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Calculer la dilatation linéaire en M_0 dans les directions \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{a} et \vec{b} .

Calculer les distorsions angulaires suivantes :

$$\gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \quad \gamma(M_0; \vec{E}_1, \vec{a})$$

4- On a $k = 10^{-3}$.

En admettant la linéarisation, définir les composantes du tenseur de déformation et du tenseur antisymétrique :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{U} + (\text{grad } \vec{U})^T] \qquad \bar{\omega} = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{U} - (\text{grad } \vec{U})^T]$$

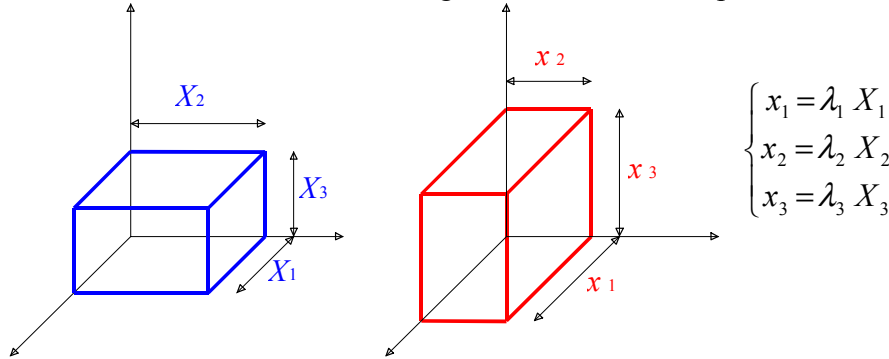
Déterminer les composantes du vecteur associé au tenseur antisymétrique.

5- Tracer le tricercle de Mohr des déformations en M . Représenter sur ce tricercle les vecteurs déformations pures dans les directions \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{a} et \vec{b} :

$$\overline{D_p(M; \vec{E}_1)} \quad \overline{D_p(M; \vec{E}_2)} \quad \overline{D_p(M; \vec{a})} \quad \overline{D_p(M; \vec{b})}$$

Etat de déformation homogène triaxiale

On considère une déformation homogène triaxiale définie par les relations suivantes :



1- Déterminer alors les composantes, dans la base orthonormée directe $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, des tenseurs suivants :

F	$d\vec{x} = \mathbb{F} d\vec{X}$	Tenseur gradient
C	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = d\vec{X} \mathbb{C} d\vec{X}'$	Tenseur de Cauchy Green Droit
E	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \mathbb{E} d\vec{X}'$	Tenseur des déformations de Green Lagrange
B	$d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = d\vec{x} \mathbb{B}^{-1} d\vec{x}'$	Tenseur de Cauchy Green Gauche
A	$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{x} \mathbb{A} d\vec{x}'$	Tenseur des déformations d'Euler Almansi

2- Constaté que l'on a bien la relation :

$$\mathbb{A} = (\mathbb{F}^{-1})^T \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{F}^{-1}$$

3- Donner les composantes du tenseur de Green Lagrange dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

définie par :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \\ \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \\ \vec{e}_3 = \vec{E}_3 \end{cases}$$

Application numérique :

$$\lambda_1 = \frac{400}{320} \quad \lambda_2 = \frac{200}{240} \quad \lambda_3 = 1$$

Donner les valeurs numériques des différents tenseurs.

Retrouver, par un raisonnement simple les relations traduisant le changement de base pour le tenseur de Green Lagrange.

Retrouver aussi ces résultats en utilisant les cercles de Mohr.

Cisaillement en petites déformations

On considère le champ de déplacement donné par :

$$\vec{M}_0 \vec{M} = \vec{U}(M_0) \begin{cases} u_1 = k X_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

1- Calculer le tenseur de la transformation $\overline{\overline{grad U}}$, le tenseur symétrique $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et le tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$. Définir le vecteur $\vec{\omega}$ associé au tenseur antisymétrique. Donner enfin le tenseur $\overline{\overline{E}}$.

2- On se place au point A_0 de coordonnées (1,1,0). Soit \vec{a} le vecteur représentant la trisectrice du trièdre

$$\vec{a} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Calculer la dilatation linéaire en A_0 dans la direction \vec{E}_1 , \vec{E}_2 et dans la direction \vec{a} .

Calculer les distorsions angulaires suivantes :

$$\gamma(A_0; \vec{E}_1, \vec{E}_2) \quad \gamma(A_0; \vec{E}_1, \vec{a})$$

3- On a $k = 10^{-3}$.

Tracer le tricercle de Mohr des déformations en A .

Représenter sur ce tricercle les vecteurs déformations pures dans les directions \vec{E}_1 et \vec{a} :

$$\overline{D_p(A; \vec{E}_1)} \quad \overline{D_p(A; \vec{a})}$$

On considère l'état de déformation ci-après :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \begin{pmatrix} 0 & 120 \cdot 10^{-6} & 90 \cdot 10^{-6} \\ 120 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 90 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{X}_i)$$

4- Calculer les déformations principales ainsi que les directions principales de déformations.

5- Représenter sur le tricercle de Mohr des déformations les vecteurs déformation pure en M dans les directions \vec{X}_1, \vec{X}_2 et \vec{X}_3 .

6- Calculer la dilatation linéaire en M dans la direction \vec{N} définie par :

$$\vec{N} = \frac{\vec{X}_1 + 2\vec{X}_2 + 2\vec{X}_3}{5}$$

Donner le tenseur déviateur des déformations. Que peut-on dire?

Quel est le lien le tenseur déformation donné et le champ de déplacement du début de l'exercice ?

Etude d'un état de déformation

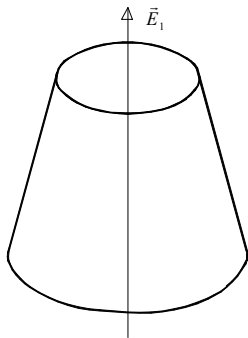
On considère l'état de déformation ci-après :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

- 1-1 Calculer le vecteur déformation pure dans la direction $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 + \sqrt{3}\vec{E}_3)$. Conclusion?
- 1-2 Calculer les déformations principales et les directions principales de déformations.
- 1-3 Représenter sur le tricercle de Mohr des déformations les vecteurs déformation pure en M dans les directions \vec{E}_1, \vec{E}_2 et \vec{E}_3 .
- 1-4 Donner le tenseur déviateur des déformations. Que peut-on dire?

Etat de contrainte uniforme

On considère un domaine (D) en équilibre statique, tel qu'en tout point M de ce domaine, l'état de contrainte soit de la forme suivante :



$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)} \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma(x_1, x_2, x_3)$$

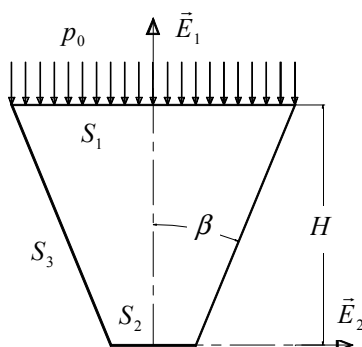
2-1 La force de volume est due uniquement à l'attraction gravitationnelle. L'axe \vec{E}_1 est vertical ascendant. Que peut-on dire de la fonction σ ?

2-2 On exerce une pression uniforme sur la base circulaire inférieure d'un cône de demi angle au sommet β , de hauteur H , de rayon R à la base inférieure et d'axe \vec{E}_1 . Quelles sont les conditions aux limites pour la face supérieure et la face latérale si on veut que le tenseur des contraintes soit sphérique en tout point, le solide étant soumis à la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{E}_1$?

2-3 Calculer le tenseur des contraintes dans la base cylindro polaire $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z = \vec{E}_1)$.

Etat de contrainte uniaxial

On considère un domaine (D) en équilibre statique, tel qu'en tout point M de ce domaine, l'état de contrainte soit de la forme suivante :



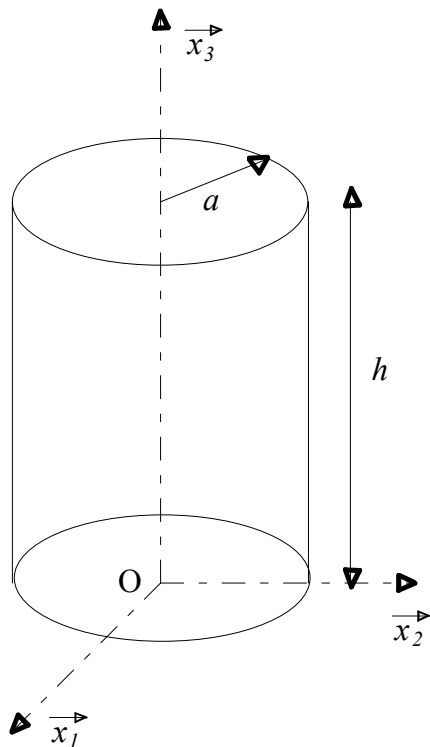
$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)} \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma(x_1, x_2, x_3)$$

2-1 Calculer les composantes de la force de volume par unité de masse. A quelles conditions cette force de volume peut-elle être celle du champ de pesanteur? En déduire la fonction $\sigma(x_1, x_2, x_3)$.

2-2 Le domaine (D) est un tronc de cône de demi-angle au sommet β , d'axe vertical, placé dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{E}_1$. On exerce une pression p_0 sur la grande base (S_1) du tronc de cône.

En déduire la fonction $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ et les conditions aux limites (chargement) sur la petite base (S_2) et la surface latérale (S_3). On indiquera **clairement** sur un schéma les répartitions de charges sur les frontières du domaine.

Etat de contraintes dans un cylindre



L'état de contraintes dans le cylindre ci-contre est de la forme:

$$\forall(M) \overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

avec :

$$\sigma_{13} = -\frac{P}{a^2}(7x_1^2 + x_2^2 - k_1 a^2)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{6P}{a^2} x_1 x_2$$

$$\sigma_{33} = -k_2 \frac{P}{a^2} (h - x_3) x_1$$

Dans ces expressions, P représente une constante positive connue et k_1 et k_2 sont deux constantes à déterminer.

Le cylindre est en équilibre statique, sa surface latérale n'est soumise à aucune force extérieure et les forces de volume sont négligeables.

- 1- A partir des conditions aux limites et des équations d'équilibre, déterminer les valeurs de k_1 et k_2 .
- 2- Donner l'expression du tenseur des contraintes dans la base principale pour $M_1(a, 0, h)$ et $M_2(0, 0, h)$. Déterminer les directions principales. Tracer le tricerclé de Mohr en M_2 .
- 3- En tout point $M(x_1, x_2, h)$, donner le vecteur contrainte dans la direction \vec{x}_3 ($\vec{T}(M, \vec{x}_3)$). Déterminer les éléments de réduction en $G_h \equiv M_2$ du torseur équivalent à l'action des contraintes sur la face $x_3 = h$.

Etat de contrainte

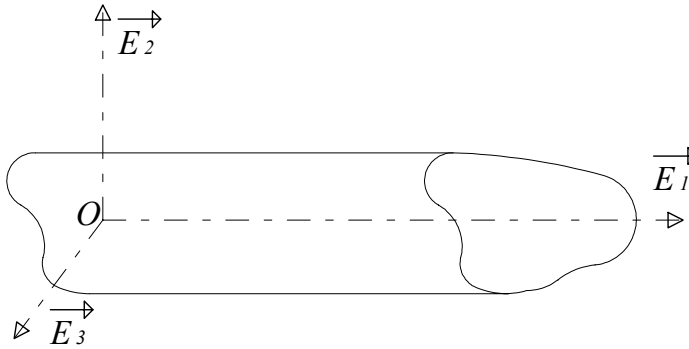
Dans un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini par la matrice :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i) \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

- 1- A quelle condition les équations d'équilibre seront-elles satisfaites si le milieu est en équilibre statique?
- 2- Déterminer les contraintes principales et le repère principal. Calculer la contrainte tangentielle maximale.
- 3- Tracer le tricerclé de Mohr de l'état de contrainte au point $P(4, -4, 7)$. Représenter sur ce tricerclé le vecteur contrainte en P dans la direction $\vec{n} = 2\vec{X}_1 + \vec{X}_2 - \vec{X}_3$.

Théorie des poutres : état de contrainte

On considère une poutre droite de section droite constante.



Le domaine est donc un cylindre droit à base quelconque d'axe $(O; \vec{E}_1)$.

Les axes $(O; \vec{E}_2)$ et $(O; \vec{E}_3)$ sont les axes principaux d'inertie de la section droite du cylindre.

L'axe $(O; \vec{E}_1)$ représente la ligne des centres de gravité des sections droites.

1- La poutre est sollicitée en traction simple. Donner le tenseur des contraintes en un point quelconque en admettant les résultats de la théorie des poutres. Vérifier ensuite les équations d'équilibre.

2- On considère cette fois une sollicitation de flexion pure (sans effort tranchant). Le moment de flexion est dirigé selon le vecteur \vec{E}_3 . Donner à nouveau le tenseur des contraintes et vérifier les équations d'équilibre.

3- On admet que dans le cas d'une sollicitation avec effort tranchant T_2 , la contrainte tangentielle est donnée par la formule :

$$\tau = \frac{T_2 A(x_2)}{I_3 b(x_2)} \begin{cases} T_2 & \text{Effort tranchant} \\ I_3 & \text{Moment quadratique} \\ A(x_2) & \text{Moment statique} \\ b(x_2) & \text{Largeur} \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) les équations d'équilibre seront-elles vérifiées dans le cas d'une flexion pure?

Peut-on vérifier les équations d'équilibre avec une poutre de section rectangulaire? Avec une poutre de section circulaire?

4- Les équations d'équilibre peuvent-elles être satisfaites dans le cas de la torsion d'une poutre de section droite circulaire?

Donner l'expression du tenseur des contraintes dans le référentiel cylindro-polaire.

La sollicitation étant une sollicitation combinée de flexion torsion, donner les expressions des contraintes normales maxi et contraintes tangentielles maxi.

5- Pouvons nous, dans le cas de la flexion pure par exemple, proposer d'autres répartitions de contrainte que celle donnée par la théorie des poutres?

Torsion flexion d'une poutre

On considère une poutre droite de section constante. L'axe $(O; \vec{E}_1)$ est la ligne des centres de gravité. Les axes $(O; \vec{E}_2)$ et $(O; \vec{E}_3)$ sont les axes principaux d'inertie. La poutre est sollicitée en flexion pure combinée avec de la torsion. L'axe de flexion est $(O; \vec{E}_3)$. La section droite est une section circulaire de rayon R .

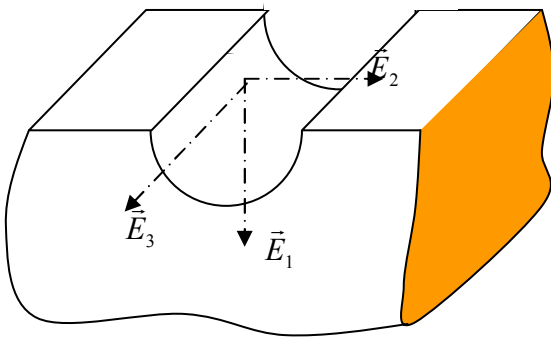
En admettant les résultats de la théorie des poutres, donner le tenseur des contraintes en un point de la circonférence dans la base de votre convenance en fonction du moment de flexion Mf_3 , du moment de torsion Mt et du rayon R .

Par la méthode de votre choix, donner les valeurs des contraintes principales et les directions principales des contraintes. Ces dernières seront données par leurs composantes dans la base cylindro-polaire $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z = \vec{E}_1)$.

Donner les expressions de la contrainte normale maxi et de la contrainte tangentielle maxi.

Donner l'expression de la contrainte équivalente selon le critère de Von Misès.

Etude d'un chargement sur une gouttière



Un massif occupe, dans le repère $(O; \vec{E}_i)$ l'espace délimité par $x_1 \geq 0$ et $h \geq x_3 \geq -h$. Il est entaillé d'un gouttière semi cylindrique dont la section droite est le demi-cercle de centre O et de rayon R . L'axe $(O; \vec{E}_1)$ est vertical descendant. On suppose qu'en tout point M du massif le tenseur des contraintes est de la forme suivante :

$$\sigma = \frac{K}{r^4} \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 x_2 & 0 \\ x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu r^2 x_1 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

K et ν sont deux constantes positives et $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

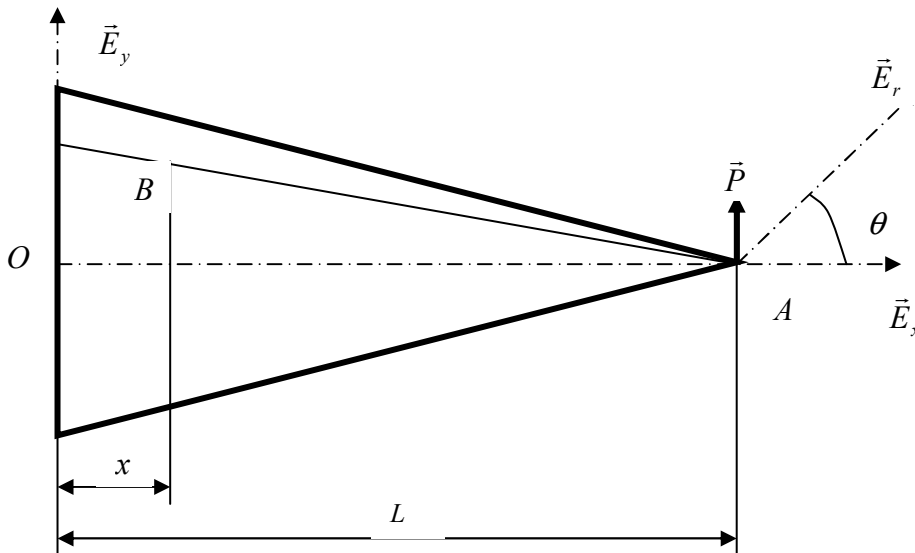
Les équations d'équilibre peuvent-elles être satisfaites ?

Déterminer les contraintes principales et les directions principales de contrainte en tout point du massif.

Rechercher les efforts extérieurs appliqués sur la face $x_1 = 0$, sur la gouttière de rayon R et sur les faces $x_3 = \pm h$. Comment peut on réaliser la répartition des efforts extérieurs sur la gouttière ?

Flexion d'une plaque triangulaire

(Selon examen CERENSAM BORDEAUX janvier 1998)



On considère une poutre triangulaire constituée d'une plaque d'épaisseur constante b et de hauteur variable $h(x)$. Cette poutre est encadrée à une extrémité et chargée à l'autre extrémité (point A de coordonnées $L, 0, 0$) par une charge ponctuelle $\vec{P} = P \vec{E}_y$.

Cet effort est le seul pris en compte (on néglige la pesanteur).

L'épaisseur étant très faible et le chargement étant dans le plan du triangle médian, on peut admettre que l'on a un état plan de contraintes, c'est à dire que le tenseur des contraintes en un point M est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z) \quad \text{avec} \quad \sigma_{xx} = -\frac{K y}{(L-x)^2} \quad \text{et} \quad K = \frac{12PL^3}{bh_0^3}; \quad h_0 = h(0)$$

Dans cette étude on ne s'intéresse qu'aux points du plan médian ($z = 0$).

1- Montrer que l'on a :

$$\sigma_{xy} = \frac{K y^2}{(L-x)^3} + f(x) \quad \text{et} \quad \sigma_{yy} = -\frac{K y^3}{(L-x)^4} - y \frac{df}{dx} + g(x)$$

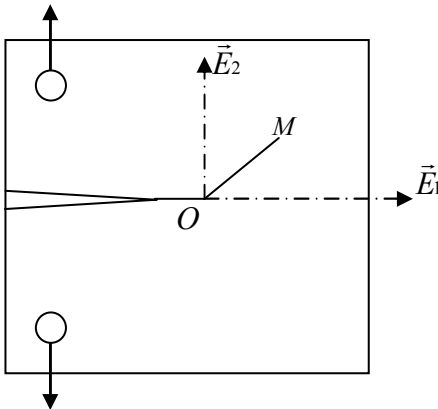
2- Ecrire les conditions aux limites en un point M de coordonnées $(x, h(x)/2, 0)$. En déduire que $f(x)$ et $g(x)$ sont des constantes que l'on déterminera. Donner alors l'expression du tenseur des contraintes en tout point de la poutre. Que pensez-vous du tenseur des contraintes proposé pour le point A ?

3- Déterminer les contraintes principales et les directions principales de contraintes en un point $M(x,y)$. Montrer que pour l'ensemble des points constituant la droite AB , cette droite est une direction principale de contrainte.

4- Donner alors l'expression du tenseur des contraintes dans la base cylindro-polaire ayant le point A comme origine.

Mécanique de la rupture en mode I

Une éprouvette compacte de mécanique de la rupture est soumise à une ouverture normale en mode I. L'effort appliqué est N . L'éprouvette est en état plan de contrainte. L'extrémité de l'entaille (pointe de la fissure) est l'origine du repère cartésien et du repère cylindrique $(O; \vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z = \vec{E}_3)$.



La distribution des contraintes en un point M quelconque au voisinage de la pointe de fissure est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} K_I : \text{Fonction de } N \text{ appelée} \\ \text{Facteur d'intensité des contraintes} \end{array}$$

Déterminer les composantes du tenseur des contraintes pour un point M situé sur l'axe \vec{E}_1 . Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes. En déduire les contraintes principales et les directions principales.

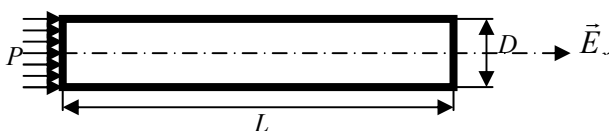
Pour les angles $\theta = \pi/4$ ou $\theta = \pi/2$, déterminer les contraintes principales. Pour quel angle $\theta = 0, \pi/4$ ou $\pi/2$ se situe le vecteur contrainte de norme maximale ?

Quelle est l'expression du tenseur contrainte dans la base cylindrique ?

Projectile dans un canon

(Selon examen CERENSAM BORDEAUX janvier 1998)

Nous nous proposons d'étudier, de façon très simplifiée, l'état de contrainte dans un projectile pendant sa phase d'accélération dans un canon. Le projectile est considéré comme cylindrique de révolution de diamètre $D = 1\text{cm}$, de longueur $L = 2\text{cm}$ et de masse volumique $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$. Le matériau constituant ce projectile est supposé homogène, isotrope, à loi de comportement élastique linéaire. Pendant sa phase d'accélération, c'est à dire tant que le projectile reste dans le canon, il est soumis à une pression $P = 750 \text{ bar}$ supposée constante. Cette pression génère une accélération $\vec{\gamma}$ portée



par l'axe $(O; \vec{E}_x)$ et supposée aussi constante. Nous négligerons toutes les actions de frottement et les actions gravitationnelles. D'autre part nous supposons que l'état de contrainte est uniaxial.

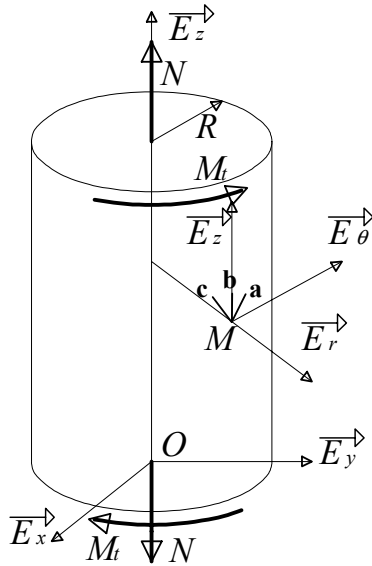
En isolant le projectile et en appliquant le principe fondamental de la mécanique, établir la relation liant l'accélération en fonction des différents paramètres. Donner sa valeur numérique.

Ecrire l'équation d'équilibre local. Pour cela on supposera que seule varie la contrainte σ_{xx} selon la variable x .

Ecrire les conditions aux limites qui permettent de calculer σ_{xx} en fonction de x . Tracer la loi d'évolution de σ_{xx} et calculer sa valeur absolue maximale.

Mesures de déformations

Une poutre droite cylindrique de section droite circulaire est soumise simultanément à un effort de traction N et un moment de torsion M_t .



Le rayon du cylindre est :

$$R = 10 \text{ mm}$$

En un point M de la surface extérieure, on a collé une rosette à 45° , la jauge centrale ayant sa direction confondue avec l'axe du cylindre.

Sous ces efforts, la rosette permet d'enregistrer les résultats suivants :

$$\epsilon_{aa} = 550 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_{bb} = 400 \cdot 10^{-6} \quad \epsilon_{cc} = -250 \cdot 10^{-6}$$

1- En admettant que \vec{E}_r représente une direction principale, déterminer, par la méthode de votre choix, les directions principales et les déformations principales dans le plan tangent $(M; \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$. On tracera précisément les directions principales par rapport aux trois directions $(\vec{E}_a, \vec{E}_b, \vec{E}_c)$ de la rosette.

- 2- Les mesures d'effort donnent : $N = 2500 \text{ daN}$ $M_t = 10 \text{ m.daN}$
 Calculer, littéralement puis numériquement (U.S.I.), dans le repère $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$, les composantes du tenseur des contraintes en M.
- 3- Dédurre de l'expérience la valeur du module d'Young E et du module d'élasticité transversal G .
- 4- Tracer les tricerclés de Mohr pour les contraintes et les déformations.

Déplacement d'un corps solide

On donne le champ de déplacement suivant pour un corps solide :

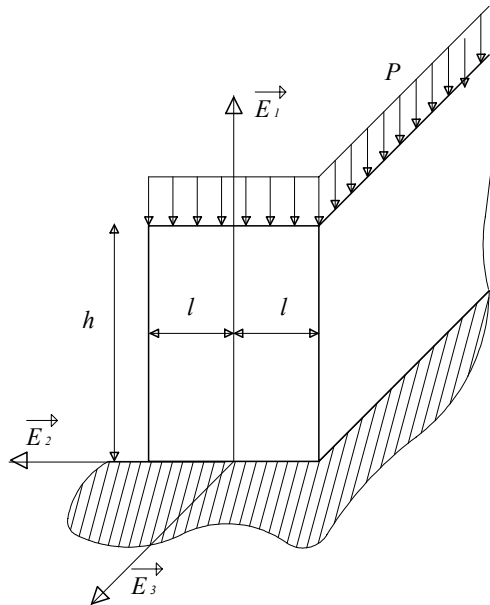
$$\vec{U}(M) = (\alpha x_1 - \beta x_2) \vec{E}_1 + (\beta x_1 + \alpha x_2) \vec{E}_2 + \alpha \sqrt{3} \vec{E}_3$$

La déformation associée est élastique. Le domaine est en équilibre statique.

- 1- En utilisant les coefficients de Lamé, calculer le tenseur des contraintes. En déduire le tenseur déviateur des contraintes et le tenseur sphérique des contraintes.
- 2- Déterminer les déformations principales et les contraintes principales. On donnera aussi les directions principales.
- 3- Quelle(s) condition(s) avons-nous pour la force de volume par unité de volume $\vec{f}(M)$?
- 4- Calculer la dilatation linéaire dans la direction $\vec{a} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Etude d'un massif en compression

Les hypothèses formulées sont les suivantes :



* Le massif est un parallélépipède rectangle de grande longueur. Le champ de déplacement est caractérisé par un déplacement longitudinal nul ($u_3=0$).

* Le matériau a un comportement élastique linéaire déterminé par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

* La face supérieure du massif est soumise à une pression uniforme P .

* La face inférieure repose sur un appui plan indéformable, le contact étant sans frottement.

* Les forces de volume sont négligeables.

* Le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{cases} u_1 = Ax_1 + Cx_2 \\ u_2 = -Cx_1 + Bx_2 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

- 1- Calculer le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$. Que signifie physiquement le fait que ε_{12} soit nul?
- 2- Calculer le tenseur des contraintes. Déterminer les constantes A , B et C .
- 3- On a :

$$E=210GPa ; \nu=0,3 ; P=500N / mm^2$$

Tracer la déformée de la face $x_3=cte$.

Etude d'un champ de déplacement

Soit un corps cylindrique repéré dans un trièdre orthonormé direct $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$. Pour un point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , le vecteur déplacement est :

$$\vec{U}(M) = (2ax_1x_2)\vec{E}_1 + (7ax_1^2 - 3ax_2^2)\vec{E}_2 \quad (a \text{ est un nombre infiniment petit})$$

- 1- Déterminer le tenseur symétrique $\bar{\varepsilon}$ et le tenseur anti-symétrique $\bar{\alpha}$ de la transformation.
- 2- Déterminer les valeurs des déformations principales, ainsi que la base principale des déformations au point $M(\sqrt{15}, 6, 3)$.
- 3- Ecrire les équations d'équilibre? Quelle est la valeur du coefficient de Poisson qui permet de les satisfaire en l'absence de force de volume?
- 4- Avec les conditions précédentes, déterminer le tenseur des contraintes en M dans la base $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ et dans la base principale.
- 5- Quelle est la valeur limite de la constante a si on ne veut pas que la contrainte équivalente de Von Misés dépasse la valeur de 24 daN/mm²? On prendra $E = 210$ GPa.

Sphère soumise à son champ de gravitation

On considère une sphère pleine de rayon R constituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ . Le comportement est élastique, linéaire et isotrope de modules de Lamé λ et μ . On suppose qu'elle est soumise à son champ de gravitation propre ce qui revient à admettre la présence de forces volumiques radiales qui, par unité de masse, s'expriment par :

$$\vec{f} = -g \frac{x_i}{R} \vec{E}_i \quad g \text{ représentant l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la sphère}$$

On admet qu'il n'y a aucun chargement sur la surface extérieure et que le déplacement du centre de la sphère est nul.

On se propose de calculer les déformations et les contraintes en partant d'un champ déplacement de la forme :

$$\vec{U}(M) = h(r) x_i \vec{E}_i \quad h \text{ est une fonction de } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

- 1- Justifier la forme donnée au champ de déplacement.
- 2- Calculer le tenseur déformation $\vec{\varepsilon}$ et le tenseur antisymétrique $\vec{\omega}$.
- 3- En utilisant les équations de Navier, déterminer l'équation différentielle permettant de calculer la fonction h . Montrer qu'une solution peut être de la forme :

$$h(r) = -\frac{\rho g}{10} \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(B - \frac{r^2}{R} \right)$$

- 4- Calculer la constante B .
- 5- Expliciter le champ de déformation et le champ de contrainte. Analyser, en fonction de r , l'évolution de la contrainte radiale normale σ_{rr} . Donner la valeur de la trace du tenseur des contraintes lorsque $r = 0$.

Corps soumis à son propre poids

On considère un corps cylindrique de rayon R et de hauteur H . Ce corps repose sur un plan horizontal $(O; \vec{E}_x, \vec{E}_y)$. On s'intéresse aux déformations élastiques de ce corps dues à son propre poids. Pour cela on fait l'hypothèse suivante sur le déplacement d'un point :

$$\vec{U}(M) = u_r \vec{E}_r + u_z \vec{E}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_r = u_r(r) \\ u_z = u_z(z) \end{cases}$$

- 1- En utilisant l'annexe, déterminer le tenseur déformation en fonction de u_r, u_z, r et z .
 - 2- Déterminer le tenseur de contraintes en fonction des coefficients de Lamé et de u_r, u_z, r et z .
 - 3- Ecrire les équations d'équilibre et les intégrer.
- Conclusion(s)?

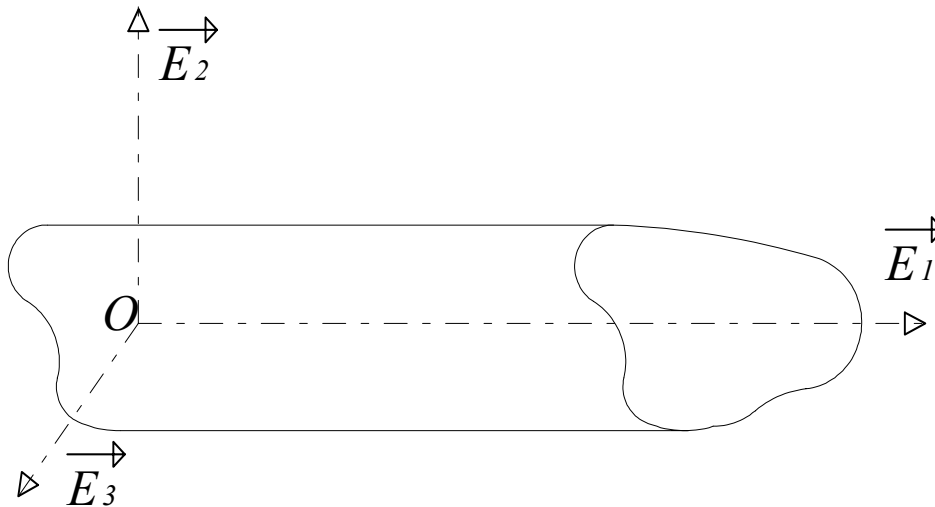
Flexion d'une poutre

On donne le champ de déplacement suivant pour un corps solide :

$$\vec{U}(M) = \left(\frac{k}{E} x_1 x_2 \right) \vec{E}_1 + \left(-\frac{k}{2E} x_1^2 - \frac{\nu k}{2E} x_2^2 + \frac{\nu k}{2E} x_3^2 \right) \vec{E}_2 + \left(-\frac{\nu k}{E} x_2 x_3 \right) \vec{E}_3$$

Avec : $\vec{OM} = x_1 \vec{E}_1 + x_2 \vec{E}_2 + x_3 \vec{E}_3$

- 1- Déterminer le tenseur déformation pure $\overline{\varepsilon}(M)$ de la transformation.
- 2- Déterminer le tenseur contrainte pour un matériau ayant une loi de comportement élastique linéaire définie par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν .
- 3- Le solide étant en équilibre, quelle(s) condition(s) avons-nous pour la force de volume par unité de masse $\vec{f}(M)$?
- 4- Le domaine est un cylindre droit à base quelconque d'axe $(O; \vec{E}_1)$. Les axes $(O; \vec{E}_2)$ et $(O; \vec{E}_3)$ sont les axes principaux d'inertie de la section droite du cylindre. L'axe $(O; \vec{E}_1)$ représente la ligne des centres de gravité des sections droites.



- 4-1 Reconnaître la sollicitation s'exerçant sur ce domaine en considérant le chargement sur la surface délimitant le domaine.
- 4-2 Trouver l'équation de la déformée de la ligne moyenne ($x_2 = 0, x_3 = 0$). Quelle est la valeur de la flèche maxi?
- 4-3 La section droite de la poutre est un rectangle de hauteur h et de largeur b . On se place dans le plan défini par $x_1 = 0$. Que peut-on dire des déformées des droites $x_2 = cte$ et $x_3 = cte$? En déduire la déformée de la section rectangulaire.

Etude d'une poutre

On considère une poutre droite, de longueur L , de section circulaire (rayon R) et d'axe $(O; \vec{E}_3)$. La matrice des contraintes en un point P, de coordonnées x_1, x_2 et x_3 , est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

$$\sigma_{13} = \frac{F}{2\pi R^4(1+\nu)} \left[(3+2\nu)(R^2 - x_1^2) - (1-2\nu)x_2^2 \right]$$

$$\sigma_{23} = \frac{-F(1+2\nu)x_1x_2}{\pi R^4(1+\nu)}$$

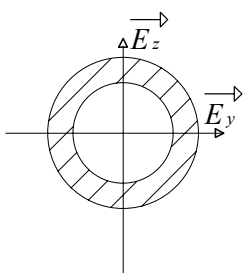
$$\sigma_{33} = \frac{-4F}{\pi R^4}(L-x_3)x_1$$

Dans ces expressions F est une constante et ν le coefficient de Poisson du matériau qui est supposé homogène, isotrope, et à comportement élastique linéaire.

- 1- A quelle(s) condition(s) les équations d'équilibre sont-elles vérifiées?
- 2- Les équations de compatibilités sont-elles réalisées?
- 3- Quel est le chargement appliqué sur la poutre?
- 4- Comparer la solution donnée avec la solution classique de la théorie des poutres.

Etude d'un tube

On se propose de vérifier la section droite d'une canalisation d'un circuit hydraulique de commande d'un laminoir.



On a donc un tube de forte épaisseur ($R_i = 64\text{ mm}$; $R_e = 82\text{ mm}$) sollicitée par une pression intérieure ($p_i = 300\text{ bar}$). De plus, vu la grande longueur de la canalisation, on peut aussi considérer que l'on a à traiter un problème de poutre.

Les conditions aux limites (liaisons, chargement ...) nous amènent à étudier plus précisément une section particulière pour laquelle le torseur des forces de gauche est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ré sultante:} \\ \text{Moment ré sultant en G :} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vec{N} = N \vec{E}_x \\ \vec{M} = M_t \vec{E}_x + M_f \vec{E}_z \end{array} \quad \begin{array}{l} N = 1360\text{ daN} \\ M_t = 210\text{ m.daN} \quad M_f = 1535\text{ m.daN} \end{array}$$

- 1- Donner en un point quelconque de la section droite (coordonnées y et z) les tenseurs contraintes associés aux sollicitations élémentaires (pression, traction, cisaillement, torsion, flexion pure). Le résultat sera présenté sous forme numérique (en U.S.I.). Pour chaque cas on précisera le repère utilisé.
- 2- En utilisant le critère de Tresca, et en considérant que le point le plus sollicité est situé sur le rayon extérieur, calculer le minimum de la limite d'élasticité du matériau.

Compatibilité de déformations

A la suite de différentes hypothèses, on arrive à la conclusion que la forme d'un tenseur déformation dans une base cartésienne pourrait être la suivante :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & ax_1x_2 & bx_2x_3 \\ ax_1x_2 & 0 & cx_1x_3 \\ bx_2x_3 & cx_1x_3 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i)$$

- 1- Quelles sont les conditions sur les constantes a , b et c pour que ce tenseur représente effectivement un état de déformation ?
- 2- Les conditions précédentes étant vérifiées, déterminer alors les champs de déplacement qui peuvent créer cet état de déformation.
- 3- Montrer que le champ de déplacement suivant peut être solution du problème :

$$\vec{U}(M) = k x_3^2 (x_2 \vec{E}_1 - x_1 \vec{E}_2)$$

Par la suite, on retiendra ce champ de déplacement. Le domaine d'étude est un cylindre de longueur totale L et de section droite circulaire définie par le rayon R . L'axe $(O; \vec{E}_3)$ représente la ligne des centres de gravité.

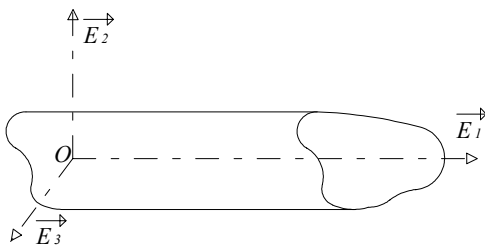
- 4- Déterminer les composantes du tenseur contrainte dans la base cartésienne puis dans la base cylindrique définie par le changement de variable suivant :
 $x_1 = r \cos \theta$; $x_2 = r \sin \theta$; $x_3 = z$
- 5- Quelle est la condition sur la force de volume pour satisfaire aux équations d'équilibre ?
- 6- Quel est le chargement sur la surface latérale ($r = R$) et sur la section droite extrémité ($x_3 = L$) ? Quelle est la sollicitation ?

Détermination d'un champ de déplacement

On considère un domaine pour lequel on suppose avoir l'état de déformation donné par le tenseur déformation suivant :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} bx_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu bx_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu bx_1 \end{pmatrix} (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$$

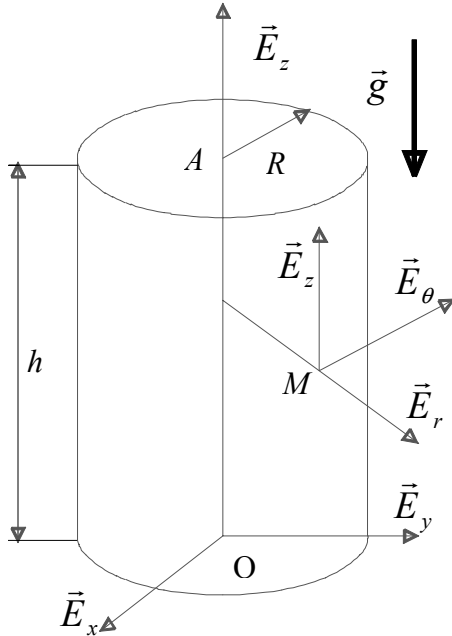
- 1- Déterminer la forme des champs de déplacement pouvant donner cet état de déformation.



2- En admettant que le matériau a une loi de comportement élastique linéaire définie par son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν , calculer le tenseur contrainte associé.

3- Le domaine est une poutre droite d'axe \vec{E}_1 et de section constante. Déterminer le chargement sur chacune des faces de ce domaine.

Champ de pesanteur sur un cylindre



Un cylindre de révolution homogène a pour rayon R , pour hauteur h et $(O; \vec{E}_z)$ pour axe vertical ascendant. Il est placé dans le champ de pesanteur. La surface latérale du cylindre n'est pas chargée. Il en est de même pour la section droite inférieure ($z = 0$). Dans la section droite supérieure ($z = h$), le domaine est suspendu au point A ($x = y = 0$). On utilise les coordonnées cylindriques.

Le champ de déplacement, en tout point du cylindre, est donné par :

$$\begin{cases} U_r = A z r \\ U_\theta = 0 \\ U_z = B z^2 + C r^2 + D \end{cases}$$

A, B, C et D sont des constantes physiques.

- 1- Déterminer, en coordonnées cylindriques, le tenseur des déformations et celui des contraintes.
- 2- Déterminer les constantes physiques A, B, C et D en fonction de la masse volumique du matériau ρ , du module d'Young E , du coefficient de Poisson ν , de l'accélération de la pesanteur g et de la hauteur h du cylindre.
- 3- Montrer que σ_{zz} s'exprime d'une manière simple.
- 4- Déterminer au point $P\left(r = \frac{R}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, z = \frac{h}{2}\right)$ la dilatation linéaire dans la direction $\vec{n} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta + \vec{E}_z$.
- 5- Donner le tricerclé de Mohr des contraintes en P . Représenter sur ce tricerclé les vecteurs contraintes $\vec{T}(P; \vec{E}_r), \vec{T}(P; \vec{E}_\theta), \vec{T}(P; \vec{E}_z)$ et $\vec{T}(P; \vec{n})$.

Contraintes dans un domaine

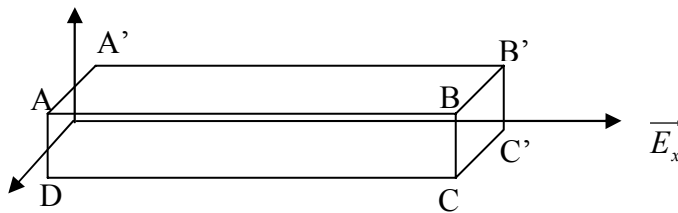
Dans un repère orthonormé $\{O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$ on considère un milieu défini par :

$$0 \leq x \leq L \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \quad -\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}$$

La section définie par $x = L$ est encadrée dans un milieu galiléen indéformable. En l'absence de force de volume, l'état de contrainte en tout point $M(x,y,z)$ est défini, dans la base $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ par la matrice suivante :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \frac{P}{eh} - \frac{12Fxy}{eh^3} \\ \sigma_{12} = -\frac{3F}{2eh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \end{cases} \quad P \text{ et } F \text{ sont des constantes}$$

Le matériau est supposé homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν .



- 1- Les équations d'équilibre sont-elles vérifiées?
- 2- Quel est le chargement s'exerçant sur les faces $ABB'A'$ ($y = \frac{h}{2}$) et $CDD'C'$ ($y = -\frac{h}{2}$) ?
- 3- Quel est le chargement sur la face $ADD'A'$ ($x=0$) ? Préciser en particulier la résultante et le moment résultant en O de ces actions et commenter le résultat obtenu.
- 4- Les conditions de compatibilité des déformations sont-elles vérifiées?
- 5- On admet que le déplacement d'un point P quelconque peut s'écrire :

$$\vec{u}(P) = u(x, y)\bar{X} + v(x, y)\bar{Y}$$

Déterminer les fonctions u et v .

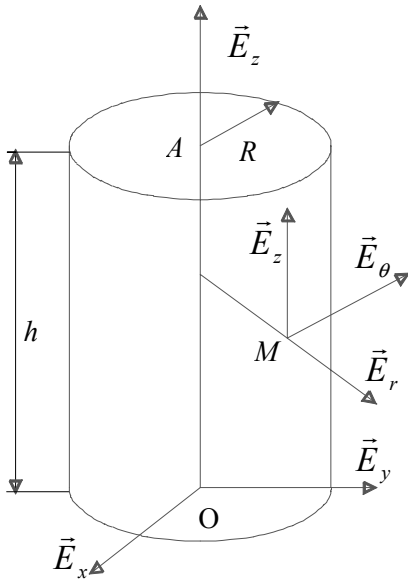
- 6- Application numérique:

$$L = 120 \text{ mm} \quad h = 20 \text{ mm} \quad e = 5 \text{ mm} \quad F = 100 \text{ N} \quad P = 500 \text{ N}$$

$$E = 200 \text{ Gpa} \quad \nu = 0,29$$

Au point d'abscisse $x = 80 \text{ mm}$, sur la face AB , on colle une rosette à 45° , telle que une jauge soit dans la direction \bar{X} et une autre dans la direction \bar{Y} . Que vont donner les mesures de déformation?

Sollicitation dans un cylindre



Un cylindre de révolution homogène a pour rayon R , pour hauteur h et pour axe $(O; \vec{E}_z)$.

En coordonnées cartésiennes le champ des contraintes est donné par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} -2Kxy & K(x^2 - y^2) & Byz \\ K(x^2 - y^2) & Cxy & Axz \\ Byz & Axz & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)}$$

Le matériau, isotrope, a une loi de comportement élastique linéaire définie par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

Le cylindre est en équilibre et les forces de volume sont négligeables.

- 1- Calculer les composantes du tenseur des déformations.
- 2- Déterminer, à l'aide des équations d'équilibre et des équations de Beltrami, les constantes A , B et C en fonction de la constante K .
- 3- Définir les champs de déplacement associés à l'état de contrainte.
- 4- On se place maintenant en coordonnées cylindriques $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$. Déterminer les composantes du tenseur des contraintes dans cette nouvelle base.
- 5- Déterminer le chargement de la surface latérale définie par $r = R$.
 Déterminer le chargement des sections droites d'extrémité définies par $z = 0$ et $z = h$. Donner les éléments de réduction du torseur équivalent.
- 6- Déterminer les contraintes principales et les directions principales au point $z = r = R$ et $\theta = 0$.

Chargement d'un cylindre de révolution

(Selon examen CERENSAM Lille janvier 1999)

Le milieu continu étudié est un cylindre plein de révolution, d'axe de symétrie de révolution $(O; \vec{E}_z)$, de rayon extérieur R et de longueur $2h$. Un point quelconque de ce milieu est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z , avec :

$$0 \leq r \leq R \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad -h \leq z \leq h$$

Le milieu est en équilibre par rapport à un repère galiléen et ne supporte pas d'actions à distance (ou de force de volume). Le matériau est supposé homogène, isotrope à comportement élastique linéaire, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . L'état de contrainte en un point quelconque de ce milieu est défini, dans la base cylindro-polaire par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = p \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{h^3} - \frac{9+3\nu}{32} \frac{r^2 z}{h^3} - \frac{3}{8} \frac{z}{h} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = p \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{h^3} - \frac{3}{8} \frac{z}{h} \right) \\ \sigma_{zz} = p \left(-\frac{9+3\nu}{32} \frac{z^3}{h^3} + \frac{27+9\nu}{32} \frac{z}{h} - 1 + \frac{18+6\nu}{32} \right) \\ \sigma_{rz} = p \frac{27+9\nu}{64 h^3} (z^2 - h^2) r \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans ces expressions } p \text{ est une constante positive}$$

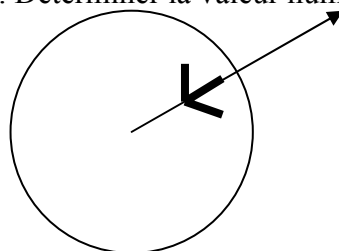
- 1- Les équations d'équilibres sont-elles vérifiées ?
- 2- Donner le chargement sur les bases et la surface latérale du cylindre . Vérifier l'équilibre global du milieu.

Application numérique :

$$R = 50 \text{ cm} \quad h = 5 \text{ cm} \quad E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0,29 \quad p = 4 \text{ daN} / \text{mm}^2$$

3- Au point de coordonnées $r = R/2$ et $z = 0$, déterminer numériquement le cisaillement maximal, la contrainte équivalente de Von Misès et l'énergie de déformation volumique.

4- Sur la face $z = -h$, en un point de rayon $r = R/2$, on installe une rosette de trois jauges à 60° selon le schéma ci-dessous. Déterminer la valeur numérique donnée par chacune des trois jauges.

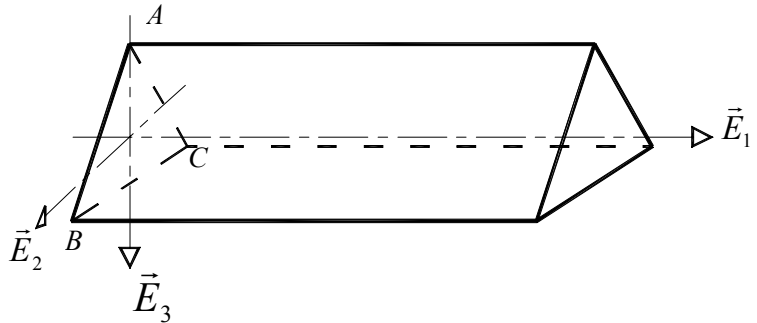


Etude d'une poutre de section triangle équilatéral

Toutes les questions sont indépendantes

Le milieu continu étudié est une poutre droite de section droite constante, de ligne moyenne \vec{E}_1 , de longueur L . La section droite a la forme d'un triangle équilatéral déterminé par les points extrémités de la base :

$$\begin{cases} \vec{OA} = -2a \vec{E}_3 \\ \vec{OB} = \sqrt{3} a \vec{E}_2 + a \vec{E}_3 \\ \vec{OC} = -\sqrt{3} a \vec{E}_2 + a \vec{E}_3 \end{cases}$$



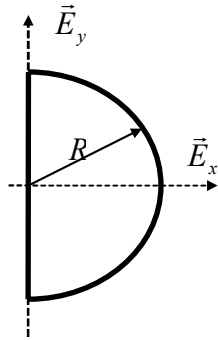
Le tenseur contrainte en un point M quelconque de cette poutre est définie dans la base cartésienne par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{12} = K(x_2^2 - x_3^2 - 2ax_3) \\ \sigma_{13} = -2Kx_2(x_3 - a) \end{cases}$$

La poutre est en équilibre par rapport à un repère galiléen. Le matériau est supposé à loi de comportement élastique linéaire.

- 1- A quelle(s) condition(s) les équations d'équilibre sont-elles vérifiées ?
- 2- Quel est le chargement de la surface latérale de la poutre ?
- 3- Définissez le chargement de la base $x_1=L$; précisez en particulier la résultante et le moment résultant en G_L barycentre de cette section, sachant que le tenseur des inerties d'une section triangulaire équilatérale est sphérique.
- 4- Les conditions de compatibilité sont-elles vérifiées ?
- 5- Déterminer la forme des composantes du champ de déplacement d'un point quelconque de la poutre.

Poutre demi cylindrique



Une poutre droite, d'axe parallèle à $(O; \vec{E}_z)$ a une section droite en forme de demi cylindre de rayon R . Sa surface latérale n'est pas chargée et les forces de volume sont négligeables. Le matériau est supposé homogène, isotrope, à loi de comportement élastique linéaire de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . La longueur de la poutre est l .

Dans la base cartésienne $(\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ la matrice représentant l'état de contrainte est donnée par :

$$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = 0 & \sigma_{xy} = 0 & \sigma_{xz} = Axy \\ \sigma_{xy} = 0 & \sigma_{yy} = 0 & \sigma_{yz} = B + Cx^2 + Dy^2 \\ \sigma_{xz} = Axy & \sigma_{yz} = B + Cx^2 + Dy^2 & \sigma_{zz} = \frac{8P(z-l)y}{\pi R^4} \end{array}$$

A, B, C, D et P sont des constantes

- 1- Déterminer A, B, C, D en fonction de P, R et ν en utilisant les équations d'équilibre, les équations de Beltrami et les conditions aux limites.
- 2- Calculer les composantes du champ de déplacement associé.
- 2- Déterminer les composantes de la résultante du torseur équivalent dans une section droite de cote z .

Etude des critères de limite élastique

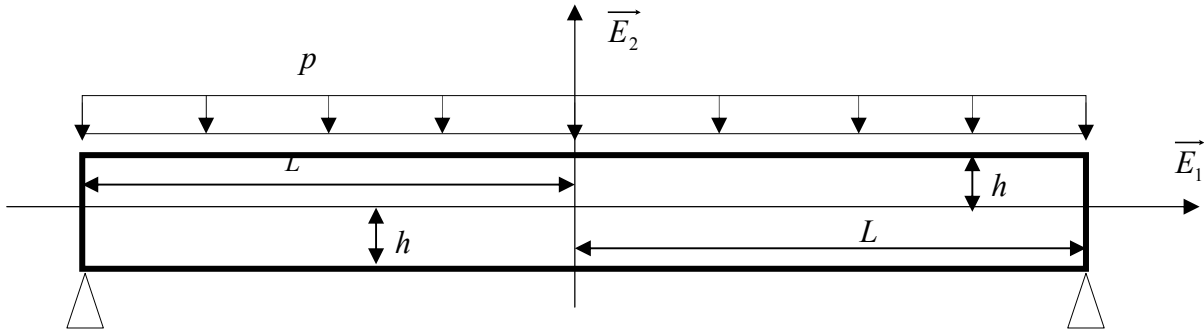
Définir le lieu représentant la surface limite du critère de Von Misès dans l'espace des contraintes principales.

On considère une poutre droite sollicitée en flexion - torsion.

- 1- En admettant les résultats de la théorie des poutres, donner l'état de contrainte en un point courant de la poutre.
- 2- Représenter, dans le plan des contraintes normales et tangentiels, les courbes limites des critères de Von Misès et de Tresca.
- 3- Donner les courbes limites dans le plan moment de flexion - moment de torsion.

Poutre en flexion

On considère un parallélépipède rectangle de longueur totale $2L$ suivant l'axe \vec{E}_1 , de hauteur $2h$ suivant l'axe \vec{E}_2 et d'épaisseur e suivant l'axe \vec{E}_3 . Le barreau est en appui simple à ses deux extrémités sur la face de normale $-\vec{E}_2$. Sur la face antagoniste, de normale \vec{E}_2 , on applique une pression uniforme d'intensité p . Le domaine est en équilibre et les forces de volume sont négligeables.



On cherche à définir l'état de contrainte. Pour cela on suppose que l'état est plan et que le tenseur contrainte est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$$

- 1- Donner les expressions des contraintes principales. Quelle est la forme de la contrainte équivalente de Von Misès ?

De plus en s'inspirant de la théorie des poutres on suppose que l'on a : $\sigma_{11} = (a x_1^2 + c)x_2$

- 2- En utilisant les conditions aux limites pour les faces de normales $\pm \vec{E}_1$, déterminer la constante c .
- 3- En utilisant les équations d'équilibre et les conditions aux limites pour les faces de normales $\pm \vec{E}_2$, déterminer la forme de la fonction σ_{12} en fonction de a, h, x_1 et x_2 .
- 4- En utilisant les équations d'équilibre et les conditions aux limites pour les faces de normales $\pm \vec{E}_2$, déterminer la forme de la fonction σ_{22} en fonction de p, h et x_2 .
- 5- On se place en une section droite d'abscisse $x_1 = k$. Déterminer les éléments de réduction du torseur équivalent à la distribution de contraintes sur la section de normale \vec{E}_1 . Contrôler ce résultat avec la théorie des poutres.
- 6- Pouvons nous satisfaire aux équations de compatibilité ?

Flexion composée d'une poutre demi cylindrique

(Selon examen CERENSAM Lille janvier 2003)

On considère un demi milieu cylindrique continu défini dans un repère orthonormé $(O; \vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ par :

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq L \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le matériau constituant ce milieu est supposé homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . Le milieu est en équilibre statique. En tout point l'état de contrainte est défini dans la base cartésienne par :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{xz} = -\left(\frac{1+2\nu}{1+\nu}\right) \left(\frac{2Pxy}{\pi R^4}\right) \\ \sigma_{yz} = \left(\frac{3+2\nu}{1+\nu}\right) \left(\frac{P}{\pi R^4}\right) \left[R^2 - y^2 - \left(\frac{1-2\nu}{3+2\nu}\right) x^2 \right] \\ \sigma_{zz} = \frac{8P(z-L)y}{\pi R^4} \end{cases}$$

P étant une constante.

- 1- A quelles conditions les équations d'équilibre sont-elles vérifiées ?
- 2- Analyser le chargement sur la surface latérale ($x = 0$ et $x^2 + y^2 = R^2$) du corps étudié.
- 3- Analyser le chargement de la base $z = L$ du corps étudié. Préciser en particulier la résultante des actions qui s'exercent sur cette surface et le moment résultant au point A $(0,0, L)$ des actions qui s'exercent sur cette surface.
- 4- Montrer qu'il existe un ensemble de points (que l'on précisera) par rapport auxquels le moment résultant des actions exercées est nul. Conclure.
- 5- Les équations de compatibilité des déformations sont-elles vérifiées ?
- 6- Au point B $(0,0,L/2)$ on installe une rosette de trois jauges extensométriques à 45° dans le plan $(\vec{E}_x; \vec{E}_z)$, la jauge centrale étant placée selon la direction \vec{E}_z . Déterminer les valeurs données par ces trois jauges. Donner en ce point le tricerclé de Mohr des contraintes et des déformations. Déterminer la valeur de l'énergie de déformation du milieu étudié.

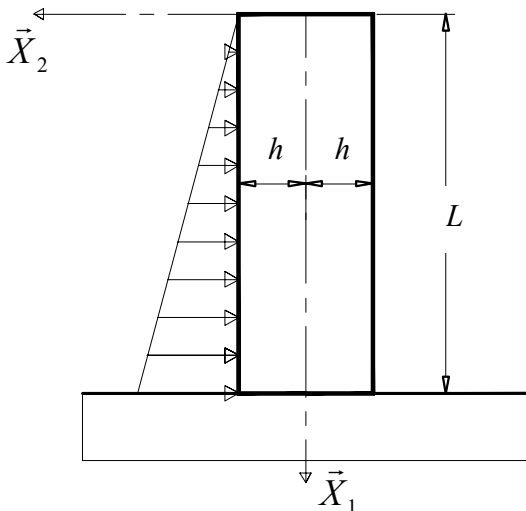
Etude d'un barrage

(Selon examen CERENSAM Angers février 1999)

Un barrage est constitué par un mur vertical à loi de comportement élastique linéaire, de largeur $2h$ et de hauteur L . Il est défini dans le repère $(O; \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ selon la figure ci-contre. L'axe $(O; \vec{X}_1)$ est vertical descendant. La face supérieure est notée S_s , la face inférieure en appui sur la sol S_i et les deux parois verticales S_h et S_{-h} . Sur toute la hauteur de la paroi S_h s'exerce la poussée d'un fluide de poids volumique $\varpi = \rho g$ selon l'axe $(O; \vec{X}_2)$. Les forces de volume dans le corps seront négligées. On considérera un état plan de déformation selon l'axe $(O; \vec{X}_3)$ c'est à dire un état déterminé par $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$.

Le tenseur des contraintes dans le barrage peut être représenté par les fonctions :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\varpi x_1^3 x_2}{4h^3} + \frac{\varpi}{4h^3} \left[\frac{6}{5} h^2 x_1 x_2 - 2 x_1 x_2^3 \right] \\ \sigma_{22} = -\frac{\varpi x_1}{2} + \varpi x_1 \left[\frac{x_2^3}{4h^3} - \frac{3x_2}{4h} \right] \\ \sigma_{12} = \frac{3\varpi x_1^2}{8h^3} [h^2 - x_2^2] - \frac{\varpi}{8h^3} [h^4 - x_2^4] + \frac{3\varpi}{20h} [h^2 - x_2^2] \end{cases}$$



- 1- Démontrer que ce tenseur vérifie les équations d'équilibre.
- 2- Vérifier que les conditions aux limites sur les deux parois verticales S_h et S_{-h} sont bien respectées.
- 3- Si la face supérieure S_s est libre, montrer que ce tenseur ne rend pas exactement compte des conditions aux limites sur la face mais que l'effort tranchant résultant des contraintes de cisaillement est nul.

Le liquide est de l'eau de poids volumique $\varpi = 9810 \text{ N/m}^3$. Les dimensions du barrage sont $h = 0,5 \text{ m}$ et $L = 5 \text{ m}$. Le coefficient de Poisson du matériau est $\nu = 0,25$.

- 4- Tracer le tricerclé de Mohr de l'état de contrainte pour les points $M_1(L, 0)$ et $M_2(L, h)$.
- 5- En quel point est située la contrainte de cisaillement maximale et quelle est sa valeur ?

Calcul des dimensions d'un réservoir sphérique

Un réservoir sphérique de rayon interne $R_i = 200 \text{ mm}$ est soumis à une pression interne $P_i = 1200 \text{ bars}$ très grande devant la pression externe. L'acier utilisé est à comportement élastique linéaire caractérisé par son module d'Young $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ et son coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Les forces de volume sont négligeables.

- 1- Sachant que la contrainte maximale admissible pour l'acier utilisé est $\sigma_e = 340 \text{ N/mm}^2$, calculer l'épaisseur minimale du réservoir. Tracer les tricerclés de Mohr de l'état de contrainte, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.
- 2- Donner les composantes du champ de déplacement en un point quelconque de la sphère.
- 3- Calculer la variation de volume du réservoir entre l'état naturel et l'état de déformation dû à la pression d'utilisation maximale.

Taraudage d'un tube

Un tube de rayon intérieur R_i , de rayon extérieur R_e , de longueur L , et d'axe $(O; \vec{E}_z)$ est maintenu dans les mors d'un tour par la surface extérieure. On réalise un taraudage intérieur. On suppose que cela est équivalent à une répartition uniforme des contraintes purement tangentielles et orthogonales à l'axe \vec{E}_z , de valeur τ_0 sur la surface intérieure uniquement.

On suppose en outre que les forces volumiques et d'inertie sont négligeables et que le matériau suit la loi de Hooke.

On considère que l'on travaille dans un repère lié aux mors.

Le champ de déplacement est de la forme:

$$\vec{U}(M) = U_\theta(r) \vec{E}_\theta \quad \text{avec} \quad \vec{OM} = r \vec{E}_r + z \vec{E}_z$$

- 1- Calculer la dilatation volumique.
- 2- A partir des équations d'équilibre, déterminer l'équation différentielle que doit vérifier $U_\theta(r)$.
- 5- Donner la solution générale de l'équation différentielle.
- 4- Calculer alors le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes.
- 5- Calculer les constantes A et B en fonction des conditions aux limites.
- 6- Quelles sont les valeurs des contraintes principales et les directions principales?
- 7- Quelle est la valeur de la contrainte tangentielle maximale?

Déplacement radial

Dans un milieu continu le champ de déplacement en coordonnées polaires est donné par :

$$\vec{U}(M) = U_r \vec{E}_r \quad \text{la fonction } U_r \text{ ne dépendant que de la variable } r$$

- 1- Démontrer la relation entre la déformation linéaire circonférentielle $\varepsilon_{\theta\theta}$ et le déplacement radial U_r .
- 2- En l'absence de forces de volume, démontrer la relation traduisant l'équation d'équilibre d'un domaine infinitésimal, équation en projection sur l'axe \vec{E}_r .

Etude d'un assemblage fretté

On considère un cylindre circulaire creux de longueur infinie, de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e . Ce cylindre est soumis à une pression intérieure p_i sur sa face intérieure. Les efforts exercés sur la face extérieure sont négligeables. On négligera les effets de la pesanteur.

- 1- Représenter sur un diagramme l'évolution de la contrainte radiale σ_{rr} et de la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de r .

AN: $R_i = 200 \text{ mm} \quad R_e = 300 \text{ mm} \quad p_i = 400 \text{ bar}$

- 2- On veut réaliser la même fonction que précédemment mais en utilisant deux cylindres.

Cylindre	Rayon intérieur	Rayon extérieur	Pression intérieure	Pression extérieure	Module d'Young	Coefficient de Poisson
C_1	R_i	$R + \delta$	p_i	?	E	ν
C_2	R	R_e	?	0	E	ν

Le cylindre C_1 est emmanché à force dans le cylindre C_2 puis on applique la pression intérieure p_i .

- 2-1- On étudie le montage de C_1 dans C_2 lorsque la pression intérieure p_i est nulle. Représenter sur un diagramme l'évolution de la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ pour C_1 et C_2 . On prendra les valeurs numériques précédentes, $R = 250 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,3$. Les calculs seront faits avec les valeurs suivantes de δ :

$$0,025 \text{ mm} \quad 0,05 \text{ mm} \quad 0,1 \text{ mm}$$

- 2-2- Mêmes questions que précédemment en prenant $p_i = 400 \text{ bar}$. Que peut-on déduire de cette étude?
- 2-3- La pression intérieure p_i est nulle. Le matériau a une limite d'élasticité σ_e . En utilisant le critère de Von Mises, calculer la valeur limite du serrage δ .

Etude de cylindres élastiques en compression radiale

On considère un cylindre plein à section circulaire, de rayon R et de grande longueur. Le milieu est supposé homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire. Il est mis en compression sur la face cylindrique externe par l'application d'une pression uniforme : $T(M, E_r) = -p \vec{E}_r$.

On suppose que le champ de déplacement est de la forme :

$$\vec{u}(M) = \frac{-p}{2(\lambda + G)} r \vec{E}_r \quad \text{où } \lambda \text{ et } G \text{ représentent les deux coefficients de Lamé.}$$

1- Déterminer les composantes des tenseurs des déformations et des contraintes. Les équations d'équilibre sont-elles vérifiées ?

A présent le cylindre de rayon R est creux, centré sur un noyau central indéformable de rayon R_0 . Sur la face extérieure, la pression p est toujours exercée. On peut montrer que le champ de déplacement radial a alors pour expression :

$$\vec{u}(M) = \frac{-p}{2\lambda + 2G \left[1 + \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right]} \left[r - \frac{R_0^2}{r} \right] \vec{E}_r$$

2- Exprimer les composantes des tenseurs des déformations et des contraintes. Montrer qu'à la limite, les solutions sont compatibles avec celles du premier cas.

Le matériau du cylindre est un polymère de type PC (polycarbonate). En première approximation, on suppose son comportement élastique linéaire. Le module d'Young est $E = 2400 \text{ MPa}$ et le coefficient de Poisson est $\nu = 0,38$. La limite élastique est $\sigma_e = 63 \text{ MPa}$. La pression appliquée est de 80 bars et les rayons sont $R_0 = 0,05 \text{ m}$ et $R = 0,2 \text{ m}$.

3- Tracer les tricerclés de Mohr de l'état de contrainte en un point quelconque du tube.

4- Calculer la contrainte équivalente de Von Misès. Le critère de limite élastique est-il respecté ?

Pièces de révolution

Il s'agit d'étudier un certain nombre de pièces verticales, faites de matériaux à loi de comportement élastique linéaire et de masse volumique ρ . Ces pièces sont toutes de grande longueur suivant la verticale ascendante $(O; \vec{E}_3)$ et cylindriques de révolution autour de cet axe. Les efforts imposés sont distribués uniformément autour de cet axe de révolution et indépendants de la variable x_3 . Les seules forces volumiques sont dues à la pesanteur. Compte tenu de ces hypothèses, on suppose que le champ de déplacement est indépendant des variables x_3 et θ .

- 1- A partir des équations d'équilibre, donner la forme des composantes du champ de déplacement.
- 2- Déterminer la forme des tenseurs déformations et contraintes.

Etude d'un palier lisse

On veut réaliser un palier lisse en frettant une bague sur un arbre. L'arbre, de grande longueur, de section cylindrique, a un rayon extérieur R . Il est réalisé dans un matériau à loi de comportement élastique linéaire caractérisée par un module d'Young E_a et un coefficient de Poisson ν_a .

La bague est caractérisée par un rayon intérieur R_i et un rayon extérieur R_e . Le matériau, toujours à loi de comportement élastique linéaire, est défini par le module d'Young E_b et le coefficient de Poisson ν_b . On note δ la différence entre le rayon extérieur de l'arbre et le rayon intérieur de la bague :

$$\delta = R - R_i$$

1- Pour réaliser l'assemblage, on se propose d'exercer un effort de traction sur la bague de tel sorte que l'assemblage puisse être glissant juste. Quel est la valeur de l'effort de traction à appliquer?

2- L'assemblage étant fait, quel est alors l'état de contrainte dans l'arbre et la bague? On précisera les contraintes dans le référentiel choisi en fonction de R , δ , R_e , E_a , ν_a , E_b et ν_b .

3- Application numérique:

L'arbre est en acier : $E_a = 210 \text{ GPa}$ $\nu_a = 0,29$

La bague est en bronze : $E_b = 100 \text{ GPa}$ $\nu_b = 0,31$

$R = 30 \text{ mm}$ $\delta = 0,01 \text{ mm}$ $R_e = 35 \text{ mm}$

Quelle est alors la valeur de la plus grande contrainte équivalente au sens de Von Misès dans la bague?

Encastrement d'un pion cylindrique dans une plaque

Un axe de diamètre $2R$ est emmanché à force dans l'alésage d'une plaque plane dont les dimensions (mise à part l'épaisseur) sont assez grandes pour qu'on puisse les considérer comme infinies.

On note : R le rayon nominal de l'assemblage R_a le rayon de l'axe avant le montage

R_p le rayon de l'alésage avant le montage

E_a, ν_a les caractéristiques élastiques du matériau de l'axe

E_p, ν_p les caractéristiques élastiques du matériau de la plaque.

1- Calculer la pression de serrage en fonction de R , E_a , ν_a , E_p , ν_p et du serrage $(R_a - R_p)$

2- L'assemblage est :

$$2R = 20 \text{ H7 p6}$$

On a donc des écarts en microns sur la cote nominale qui sont :

(0 ; +21) pour l'alésage

(+22 ; +35) pour l'axe

Calculer les pressions de serrages extrêmes dans le cas où :

$$E_a = 220 \text{ GPa} \quad E_p = 100 \text{ GPa} \quad \nu_a = \nu_p = 0,29$$

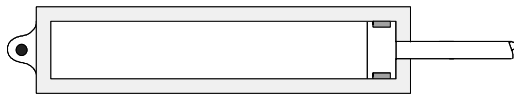
Etude d'un vérin

On se propose d'étudier une chemise de vérin hydraulique. Les dimensions du vérin sont les suivantes:

- $R_e = 30mm$ Rayon extérieur
- $R_i = 20mm$ Rayon intérieur
- $L = 200mm$ Longueur utile
- $P = 200bars$ Pression d'utilisation

Le matériau constituant la chemise a une loi de comportement élastique linéaire définie par son module d'Young $E = 200 \text{ GPa}$ et son coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

- 1- Un essai en pression amène le piston en butée dans la chemise.



- 1-1 Calculer l'effort de traction exercé par le fond sur la surface latérale du cylindre.

- 1-2 Déterminer l'état de contrainte en un point M situé à mi-longueur sur la paroi intérieure. En déduire l'état de déformation associé. Donner les valeurs numériques de ces deux tenseurs.

- 1-3 Quelle est la variation du rayon intérieur? Quelle est variation relative de longueur de la chemise?

- 2- En fonctionnement, la course du piston est de 180 mm. La chemise étant libre de s'allonger, dans la base cylindro-polaire, le tenseur des contrainte est de la forme :



$$\underline{\underline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

- 2-1 Calculer numériquement les valeurs du tenseur des déformations.

- 2-2 Quelle est la variation du rayon intérieur de la chemise? Quelle est la variation relative de longueur de la chemise?

- 3- La course étant toujours de 180 mm, le montage empêche la dilatation axiale de la chemise. Dans ce cas le tenseur des déformations est dans la base cylindro-polaire :



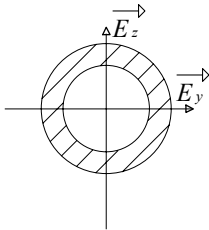
$$\underline{\underline{\varepsilon(M)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & 0 \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

- 3-1 Donner les valeurs numériques du tenseur des contraintes.

- 3-2 Quelle est la variation du rayon intérieur de la chemise? Quelle est la variation relative de longueur de la chemise?

Canalisation hydraulique

On se propose de vérifier la section droite d'une canalisation d'un circuit hydraulique de commande d'un laminoir. Les constantes élastiques du matériau employé sont le module d'Young ($E = 200 \text{ GPa}$) et le coefficient de Poisson ($\nu = 0,3$).



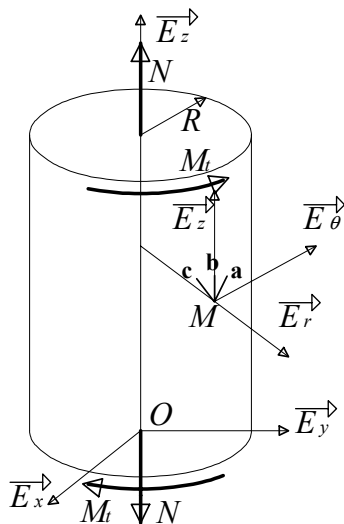
On a donc un tube de forte épaisseur ($R_i = 75 \text{ mm}; R_e = 100 \text{ mm}$) sollicitée par une pression intérieure ($p_i = 300 \text{ bar}$). De plus, vu la grande longueur de la canalisation, on peut aussi considérer que l'on a à traiter un problème de poutre.

Les conditions aux limites (liaisons, chargement ...) nous amènent à étudier plus précisément une section particulière pour laquelle le torseur des forces de gauche est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Résultante: } \vec{N} = N \vec{E}_x & N = 1500 \text{ daN} \\ \text{Moment résultant en G: } \vec{M} = M_i \vec{E}_x + M_f \vec{E}_z & M_i = 200 \text{ m.daN} \quad M_f = 1600 \text{ m.daN} \end{cases}$$

1- Donner en un point quelconque de la section droite (coordonnées y et z) les tenseurs contraintes associés aux sollicitations élémentaires (pression, traction, cisaillement, torsion, flexion pure). Le résultat sera présenté sous forme numérique (en U.S.I.). Pour chaque cas on précisera le repère utilisé.

2- En utilisant le critère de Tresca, et en considérant que le point le plus sollicité est situé sur le rayon extérieur, calculer le minimum de la limite d'élasticité du matériau.



En un point M de la surface extérieure, on a collé une rosette à 45° , la jauge centrale ayant sa direction confondue avec l'axe du cylindre. Sous ces efforts, la rosette permet d'enregistrer les résultats suivants :

$$\varepsilon_{aa} = 600 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{bb} = 300 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{cc} = -250 \cdot 10^{-6}$$

3- Déterminer, par la méthode de votre choix, les directions principales et les déformations principales dans le plan tangent ($M; \vec{E}_\theta, \vec{E}_z$). On tracera précisément les directions principales par rapport aux trois directions ($\vec{E}_a, \vec{E}_b, \vec{E}_c$) de la rosette.

4- Tracer les tricerclés de Mohr de l'état de contrainte et de l'état de déformation.

Déplacement orthoradial

On considère un domaine constitué d'un matériau à loi de comportement élastique linéaire caractérisée par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν . Dans un système de coordonnées cylindrique, le champ de déplacement est orthoradial et il n'est fonction que des variables r et z : $\vec{U}(M) = U_\theta \vec{E}_\theta$

avec $U_\theta = U_\theta(r, z)$

- 1- Donner les composantes du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes dans la base cylindro-polaire $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$.
- 2- En l'absence de forces de volume, donner les équations différentielles qui permettent de définir la fonction U_θ . En supposant que cette fonction dépend linéairement de z , résoudre ces équations et en déduire la forme du champ de déplacement, de l'état de déformation et de l'état de contrainte.
- 3- Le domaine est en fait un tube de rayon intérieur R_i , de rayon extérieur R_e et de grande longueur. On impose simplement un moment de torsion M_t aux sections extrémités du tube. Donner alors l'état mécanique en tout point du tube (déplacement, déformation, contrainte) en fonction des coordonnées du point (r, θ, z) , des cotes dimensionnelles (R_i, R_e) , du moment de torsion M_t et des caractéristiques mécaniques du matériau (E, ν) .
- 4- Le tube précédent est sollicité par une pression intérieure P_i et un moment de torsion M_t . Une rosette à 45° est collée sur la paroi extérieure du tube de telle sorte que la jauge a soit axiale et la jauge c circonférentielle. On enregistre alors les déformations suivantes :

$$\varepsilon_{aa} = 16 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{bb} = 864 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{cc} = 1125 \cdot 10^{-6}$$

Donner la valeur de la déformation linéaire d'une jauge d qui serait dans le plan de la rosette et orthogonale à la jauge b .

Que pouvons déduire des résultats de mesure de la rosette ?

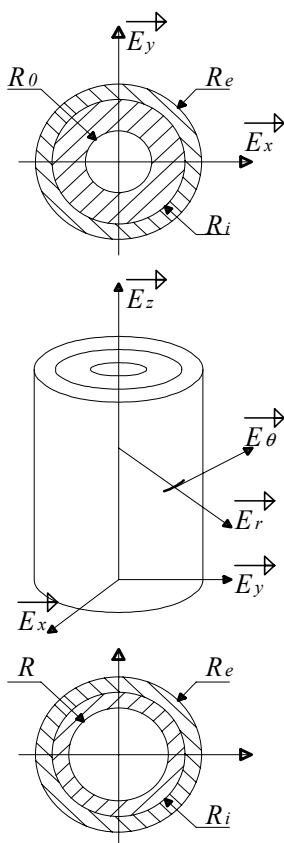
Etude d'un assemblage cylindrique

On considère un tube cylindrique circulaire de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e . Le matériau le constituant a une loi de comportement élastique linéaire caractérisée par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

On a placé une jauge de déformation sur la surface cylindrique extérieure, suffisamment éloignée des extrémités du tube, et destiné à mesurer la dilatation linéaire dans la direction orthoradiale ($\epsilon_{\theta\theta}$).

On emmanche à force dans ce tube un autre tube de rayon extérieur $R_i + \delta$ et de rayon intérieur R_0 . Le second tube est réalisé dans le même matériau que le premier. Le serrage est tel que l'assemblage reste dans le domaine élastique linéaire. Aucune charge extérieure n'est appliquée sur l'ensemble monté.

Les résultats seront toujours donnés sous forme numérique et en U.S.I.



On prendra comme valeurs numériques :

$$E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0,27$$

$$R_i = 60 \text{ mm} \quad R_e = 75 \text{ mm} \quad R_0 = 30 \text{ mm} \quad \epsilon_{\theta\theta} = 2 \cdot 10^{-4}$$

- 1- Calculer la pression de contact p qui règne entre les deux tubes en fonction des données dimensionnelles et des caractéristiques mécaniques du matériau.
- 2- Donner la valeur du serrage δ en fonction de R_i, R_e, R_0, E, ν et de $\epsilon_{\theta\theta}$.

- 3- Donner la valeur la plus élevée de la contrainte équivalente de Von Misès.

On effectue un alésage circulaire de rayon R ($R = 45 \text{ mm}$) dans le cylindre intérieur. L'axe de l'alésage coïncide avec l'axe de l'assemblage. Une pression intérieure p_i ($p_i = 300 \text{ bar}$) est exercée sur la paroi intérieure (rayon R).

- 4- Calculer la nouvelle pression entre le tube et le cylindre alésé.
- 5- Donner la nouvelle valeur fournie par la jauge.

Etude de liaisons cylindriques

(Le sujet est issu du site web de l'université de Rennes)

Il s'agit d'étudier un certain nombre de pièces verticales, faites de matériaux élastiques, de coefficients de Lamé λ et μ , de masse volumique ρ . Ces pièces sont toutes de grande longueur suivant la direction verticale $(O; \vec{E}_z)$ et cylindriques de révolution autour de $(O; \vec{E}_z)$. Dans chaque cas considéré, les efforts imposés sont distribués uniformément autour de $(O; \vec{E}_z)$ et indépendants de z ; les seules forces volumiques sont dues à la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{E}_z$. On se limitera aux cas où la composante u_z du vecteur déplacement est indépendante de z .

1-Etude préliminaire

Compte tenu des différentes hypothèses, le champ de déplacement est choisi de la forme suivante :

$$\vec{u} = u_r(r) \vec{E}_r + u_\theta(r) \vec{E}_\theta + u_z(r) \vec{E}_z$$

1-1 Montrer que le champ de déplacement a des composantes de la forme :

$$u_r = Ar + \frac{B}{r} \quad u_\theta = Cr + \frac{D}{r} \quad u_z = Fr^2 + G \ln r + H$$

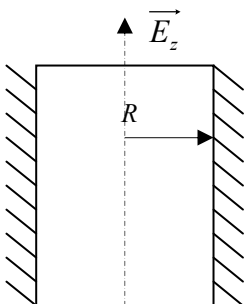
où A, B, C, D, G, H sont des constantes et $F = \frac{\rho g}{4\mu}$

1-2 Déterminer le tenseur des déformations et celui des contraintes en fonction des constantes ci-dessus.

2-Détermination des constantes

On se propose d'utiliser les résultats établis précédemment à diverses applications pratiques en considérant ici que les forces volumiques dues à l'attraction gravitationnelle ne peuvent pas être négligées.

2-1 *Manchon cylindrique indéformable*



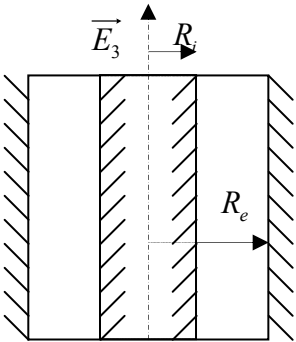
On étudie le cas d'un matériau élastique placé dans un manchon cylindrique indéformable de rayon R et soumis à son seul poids.

2-1-1 Ecrire toutes les conditions aux limites associées à l'étude du domaine élastique.

2-1-2 Déterminer complètement les composantes du vecteur déplacement et du tenseur des contraintes. En déduire la valeur de la résultante des efforts exercés sur le manchon par unité de hauteur.

2-2 *Entrefer de deux tubes indéformables*

On étudie cette fois le cas d'un matériau élastique placé dans l'entrefer de deux tubes indéformables de rayons respectifs R_e pour le tube extérieur et R_i pour le tube intérieur.

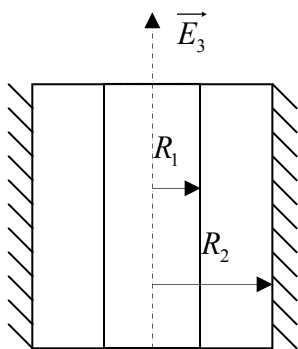


2-2-1 Ecrire toutes les conditions aux limites associées à l'étude du domaine élastique.

2-2-2 Déterminer complètement les composantes du vecteur déplacement et du tenseur des contraintes. En déduire la valeur de la résultante des efforts exercés sur le manchon par unité de hauteur.

2-2-3 Que donnent les résultats dans le cas limite où le rayon intérieur tend vers zéro ?

2-3 *Deux matériaux élastiques*



On imagine que l'on utilise dans le cas précédent un matériau élastique pour remplacer le tube intérieur. On a ainsi deux matériaux solidaires au niveau de leur contact au rayon R_1 . L'un, de caractéristiques mécaniques $(\lambda_1, \mu_1, \rho_1)$, de rayon R_1 , est disposé à l'intérieur de l'autre, de caractéristiques mécaniques $(\lambda_2, \mu_2, \rho_2)$. L'ensemble de ces deux pièces est placé à l'intérieur d'un manchon cylindrique indéformable de même axe, dont le rayon R_2 est le même que le rayon extérieur du deuxième corps.

2-3-1 Ecrire toutes les conditions aux limites associées à l'étude du domaine élastique.

2-3-2 Montrer que seules les constantes H_1, H_2 et G_2 ne sont pas nulles et les calculer.

2-3-3 On admet que les masses volumiques des matériaux sont identiques ($\rho_1 = \rho_2$). Quelle remarque peut-on faire ? Comparer les formes des tenseurs contraintes dans les deux matériaux.

2-3-4 On suppose en plus que les modules de Coulomb des matériaux sont identiques. Comparer les résultats avec ceux du premier cas et conclure.

3-Exploitation de résultats

En un point de la surface supérieure du cylindre une rosette à 45° est collée, l'une des jauges est radiale ($\vec{a} = \vec{E}_r$), la troisième étant circonférentielle ($\vec{c} = \vec{E}_\theta$). Les résultats de mesure de déformations sont les suivants :

$$\varepsilon_{aa} = 1260 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{bb} = 940 \cdot 10^{-6} \quad \varepsilon_{cc} = 625 \cdot 10^{-6}$$

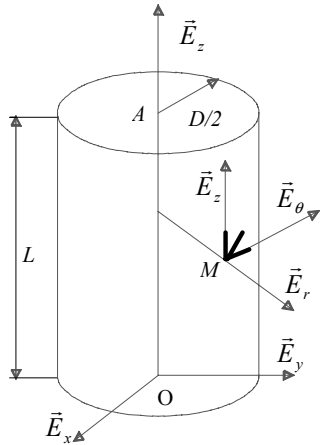
3-1 Quelles sont les valeurs des déformations principales et les directions principales de déformations.

3-2 Sachant que la surface supérieure n'est pas chargée, déterminer les composantes du tenseur des contraintes. On prendra comme valeur numérique :

$$\begin{aligned} \text{Module d'Young} & \quad E = 200 \text{ Gpa} \\ \text{Coefficient de Poisson} & \quad \nu = 0,25 \end{aligned}$$

Etude du changement eau-glace

(les questions 1-1, 1-2 et 1-3 sont indépendantes)

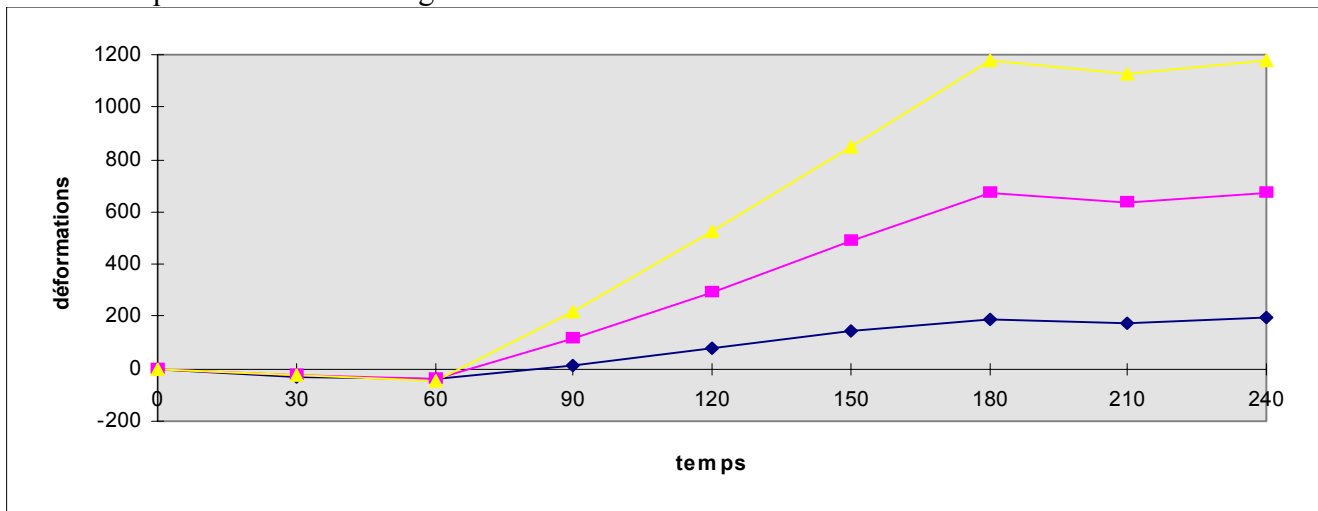


On se propose d'étudier les effets mécaniques du changement d'état eau-glace. Pour cela on utilise un tube métallique de diamètre extérieur $D = 88,9$ mm, d'épaisseur $e = 3,2$ mm et de longueur $L = 300$ mm. Les extrémités de ce tube sont fermées par des plaques métalliques de fortes épaisseurs soudées. Par un trou percé sur une des plaques, on introduit de l'eau dans le récipient étanche, puis on ferme hermétiquement le trou par un bouchon fileté. Une rosette à 45° est disposée sur la paroi extérieure de l'enceinte, à mi-hauteur. Une jauge (a) est axiale, une autre (c) est située dans le plan de section droite, la troisième jauge (b) étant dans la direction bissectrice. L'équilibrage des jauges est fait à la température ambiante. L'ensemble est placé dans une enceinte thermique à -5°C .

Les résultats de mesure en fonction du temps sont les suivants :

temps (mn)	0	30	60	90	120	150	180	210	240
Déformation a * 10^6	0	-30	-38	15	75	147	190	172	197
Déformation b * 10^6	0	-24	-40	114	294	490	675	637	672
Déformation c * 10^6	0	-23	-43	217	526	851	1175	1130	1175

Ce qui nous donne le diagramme suivant :



- 1- Interpréter les résultats de mesure en particulier pour $t < 60$ mn
- 2- On se place à l'instant $t = 180$ mn. Les résultats de mesure sont alors les suivants :
 $\epsilon_{aa} = 190 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_{bb} = 675 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_{cc} = 1175 \cdot 10^{-6}$

2-1 Calculer les valeurs des déformations principales dans le plan tangent $(\vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$ et donner les directions principales. Aurait-on pu prévoir ce dernier résultat?

2-2 Le matériau a une loi de comportement élastique linéaire définie par un module d'Young $E = 210$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,27$. Déterminer complètement le tenseur contrainte au point M de collage de la jauge. On donnera les composantes du tenseur contrainte dans la base $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$.

2-3 Quelle est variation relative de diamètre de l'enveloppe?

3- On envisage d'utiliser les résultats précédents pour calculer l'état de contrainte dans une conduite d'eau gelée. On considère que le changement d'état de l'eau se traduit par un chargement de type pression uniforme sur la paroi intérieure de la conduite.

Pour une conduite de diamètre extérieur $D = 273$ mm et d'épaisseur $e = 6,3$ mm la pression p est évaluée à 20 MPa.

3-1 Donner les composantes du tenseur contrainte en un point M de la paroi extérieure dans la base $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$ en considérant que la conduite est libre de se dilater axialement.

3-2 Du fait de la grande longueur de la conduite, on suppose que la dilatation linéaire axiale est nulle. Donner alors les composantes du tenseur contrainte en un point M de la paroi extérieure dans la base $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$.

Cisaillement plan dans une plaque percée

On considère une plaque de faible épaisseur sollicitée en cisaillement simple c'est à dire de tel sorte qu'en tout point l'état de contrainte soit de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{E}_i)}$$

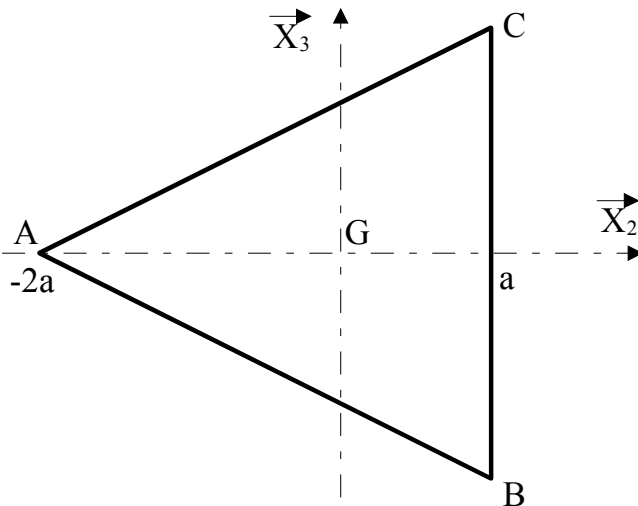
1- Calculer les directions principales et les contraintes principales.

2- Cette plaque est trouée. Le rayon du trou est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que la présence du trou ne perturbe pas l'état de contrainte des points périphérie de la plaque.

En vous aidant largement des résultats du cours, donner une méthode permettant de définir l'état de contrainte au voisinage du trou et de calculer le coefficient de concentration de contrainte.

Quel est alors le coefficient de concentration de contrainte?

Torsion d'une poutre de section triangulaire



On étudie la torsion d'une poutre dont la section droite représentée ci-contre est un triangle équilatéral.

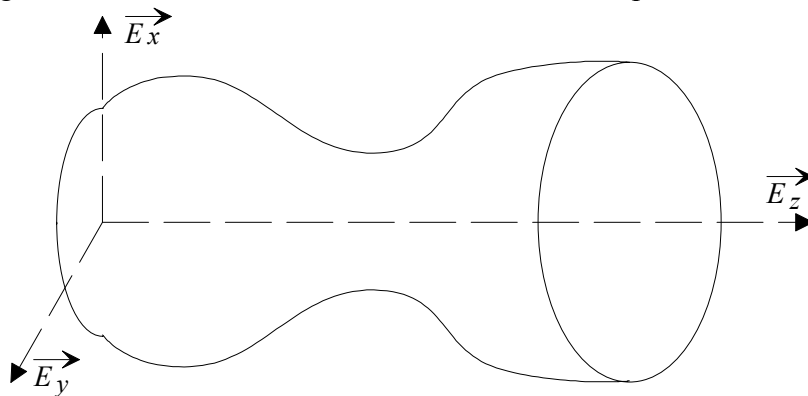
Suite à l'étude théorique de St Venant, on envisage comme solution éventuelle la fonction :

$$\varphi(x_2, x_3) = m(x_2 - a)(x_2^2 - 3x_3^2 + 4ax_2 + 4a^2)$$

- 1- Montrer que la condition aux limites, $\varphi = 0$ est satisfaite sur le contour de la section.
- 2- Calculer les contraintes σ_{12} et σ_{13} et vérifier l'équation de compatibilité.
- 3- Etudier la répartition des contraintes σ_{13} sur la section droite pour $x_3 = 0$, puis pour $x_3 = a$. Indiquer la contrainte tangentielle maximale.
- 4- Etablir la relation entre le couple de torsion et le coefficient m .
- 5- Calculer la fonction de déplacement. Si on considère la solution particulière telle que le point O de coordonnées $(0,0,0)$ ne subit ni déplacement, ni rotation, calculer l'angle unitaire de rotation de la poutre. Déterminer les points dont le déplacement longitudinal est nul, ainsi que le déplacement longitudinal maximal sur le bord BC de la section. Représenter sur une vue en perspective l'image de la transformée du bord de la section droite.

Torsion d'un solide de révolution

On considère un arbre ayant la forme d'un solide de révolution d'axe $(O; \vec{E}_z)$. La loi d'évolution de la génératrice en fonction de la variable z est donné par la fonction $R(z)$.



Dans le repère local $(M; \vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$ associé à chaque point M, le champ de déplacement est exprimé par :

$$u_r = 0; \quad u_\theta = u_\theta(r, z); \quad u_z = 0$$

Ce domaine matériel est soumis à une sollicitation de torsion par l'intermédiaire de torseurs-couple appliqués aux sections extrémités du domaine ($z=0$ et $z=h$). Les forces de volumes sont négligeables. Le matériau constituant le domaine a une loi de comportement élastique linéaire.

1- Donner la forme du tenseur des contraintes associé au champ de déplacement suggéré. Exprimer les différentes composantes de ce tenseur en fonction de u_θ , de ses dérivées par rapport aux variables z et r , du module d'Young du matériau E et du coefficient de Poisson ν .

2- A partir des équations d'équilibre, montrer qu'il existe une fonction $\Phi(r, z)$ telle que :

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \sigma_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

3- Montrer que la fonction $\Phi(r, z)$ satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

4- Montrer que l'on a :

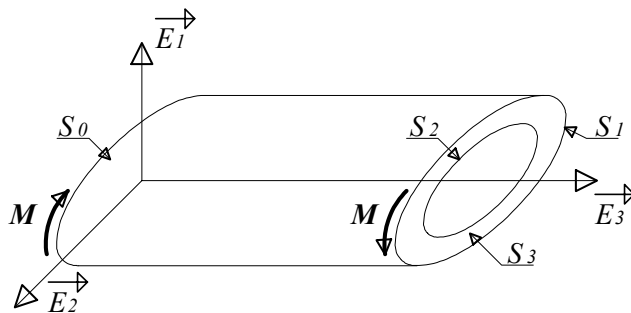
$$C = 2\pi [\Phi(0, z) - \Phi(R(z), z)] \quad \text{avec} \quad C: \text{ Couple de torsion}$$

Torsion d'un tube elliptique

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ un tube elliptique a pour frontières :

$$\begin{cases} (S_0) x_3 = 0 \\ (S_1) x_1^2 + k^2 x_2^2 = R_e^2 \\ (S_2) x_1^2 + k^2 x_2^2 = R_i^2 \\ (S_3) x_3 = l \end{cases} \quad \text{avec } 0 < R_i < R_e$$

La densité volumique de forces est nulle. D'autre part, il existe sur les surfaces extrémités (S_0) et (S_3) une densité surfacique de forces dont les éléments de réduction en O des torseurs associés sont respectivement :



$$\text{sur } (S_0) \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = -M \vec{E}_3 \end{cases} \quad \text{sur } (S_3) \begin{cases} \vec{R}' = \vec{0} \\ \vec{M}'_O = M \vec{E}_3 \end{cases}$$

Enfin la densité surfacique de forces sur les surfaces (S_1) et (S_2) est nulle.

Pour traiter ce problème, on suppose que le déplacement d'un point courant M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) est de la forme :

$$\vec{U}(M) = \alpha \left[-x_2 x_3 \vec{E}_1 + x_3 x_1 \vec{E}_2 + \varphi(x_1, x_2) \vec{E}_3 \right]$$

- 1- Donner un schéma de résolution possible pour une cette étude. On justifiera les différentes étapes.
- 2- Montrer qu'il existe une fonction $\chi(x_1, x_2)$ à partir de laquelle on peut déduire les contraintes par les relations :

$$\sigma_{13} = G \alpha \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \quad \sigma_{23} = -G \alpha \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \quad \text{avec } G \text{ module d'élasticité transversal}$$
- 3- A partir des conditions d'équilibre, donner la valeur du laplacien de la fonction χ .
- 4- Montrer que les conditions aux limites exigent d'avoir $\chi = \chi_1 = cte$ sur la surface S_1 et $\chi = \chi_2 = cte$ sur la surface S_2 . Pour la suite on prendra $\chi_1 = 0$.
- 5- Montrer que l'équation de la surface S_1 peut aider à déterminer la fonction $\chi(x_1, x_2)$ du problème posé. En déduire les contraintes en fonction de α .
- 6- Donner la relation existant entre α et le couple de torsion M . Quel est l'interprétation physique de la constante α ?

Champ de force radial

Le système à étudier est un tube cylindrique de rayon moyen R et d'épaisseur $2e$. Le matériau a une loi de comportement élastique linéaire caractérisée par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν . On désigne par O le centre géométrique du cylindre. Le solide est en équilibre par rapport au repère $(O; \vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ galiléen. D'autre part on considérera la base cylindro-polaire $(M; \vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$ en un point M courant.

La surface cylindrique frontière du solide n'est soumise à aucune charge. La densité volumique des forces de volume est définie par :

$$\vec{f}(M) = Kr^2 \vec{E}_r \quad \text{avec} \quad K \text{ constante positive}$$

Pour trouver la solution du problème, on propose d'essayer un champ de déplacement déterminé par :

$$\vec{U}(M) = u_r \vec{E}_r \quad \text{avec} \quad u_r = u_r(r)$$

- 1- Donner les tenseurs déformations et contraintes dans la base $(M; \vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$.
- 2- En utilisant les équations d'équilibre, donner la forme de la fonction $u_r(r)$.
- 3- En utilisant la condition aux limites sur la surface latérale cylindrique, calculer les constantes d'intégration. En déduire la valeur de la contrainte normale pour une section droite σ_{zz} . Donner la contrainte équivalente maximale au sens de Von Misès.
- 4- En fait, le cylindre est entraîné en rotation uniforme autour de son axe à la fréquence ω . En considérant que l'épaisseur du tube est petite vis-à-vis du rayon, donner la valeur limite de cette fréquence de rotation pour un matériau de limite élastique σ_e .
- 5- Les conditions de liaison du cylindre empêchent la variation de longueur de l'axe. En utilisant le principe de superposition, calculer l'effort de traction qu'il faut exercer sur la section droite pour respecter cette condition.

Chargement d'un barreau rectangulaire

(Selon examen CERENSAM Lille janvier 1996)

Les cinq questions peuvent se traiter dans n'importe quel ordre.

Dans un repère orthonormé direct $(O / \vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ le milieu continu étudié est défini par :

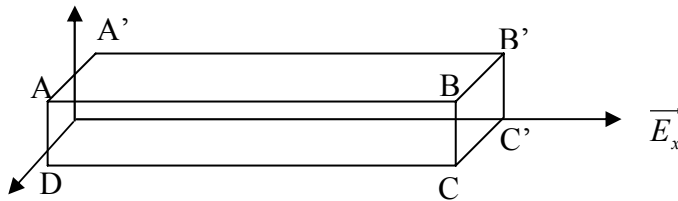
$$0 \leq x \leq L \quad ; \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \quad ; \quad -\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}$$

La section définie par $x = L$ est encadrée dans un milieu galiléen indéformable. En l'absence de forces de volume, l'état de contrainte en tout point $M(x,y,z)$ est défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{P}{eh} - 12 \frac{Fxy}{eh^3} \\ \sigma_{xy} &= \frac{3F}{2eh} \left[4 \frac{y^2}{h^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

Dans ces expressions P et F représentent des constantes.

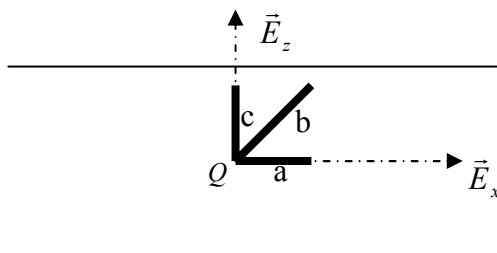
Le matériau est supposé homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire, de module d'YOUNG E et de coefficient de POISSON ν .



- 1- Les équations d'équilibre sont-elles vérifiées ?
- 2- Quel est le chargement sur les faces $ABB'A'$ ($y = h/2$) et $CDD'C'$ ($y = -h/2$) ?
- 3- Quel est le chargement s'exerçant sur la face $ADD'A'$ ($x = 0$) ? Préciser en particulier la résultante et le moment résultant en $O(0,0,0)$. Commentaire.

- 4- On a : $L = 120 \text{ mm}$; $h = 20 \text{ mm}$; $e = 5 \text{ mm}$; $F = 100 \text{ N}$; $P = 500 \text{ N}$
 $E = 200 \text{ Gpa}$; $\nu = 0,29$

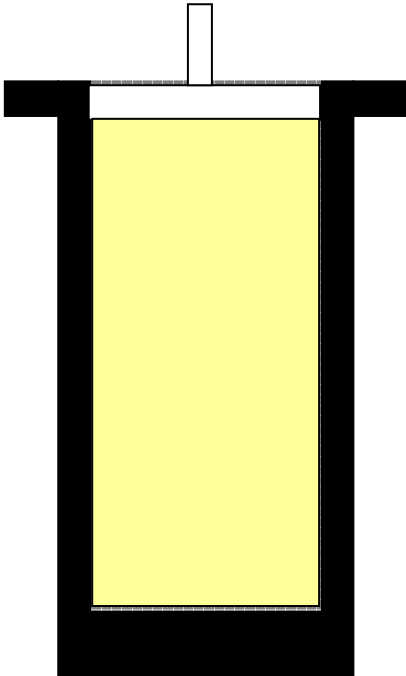
Au point $Q(80,10,0)$ situé sur la face AB , on colle une rosette de trois jauges à 45° selon le schéma ci-dessous. Quelles doivent être les valeurs données par ces trois jauges ?



- 5- Les équations de compatibilités sont-elles satisfaites ?

Enveloppe cylindrique

Dans le problème, les quatre cas de charge sont dissociés et les quatre parties peuvent être traitées indépendamment.



On se propose d'étudier le comportement d'une enveloppe cylindrique sous l'action de différents chargements. Le matériau constituant cette enveloppe a une loi de comportement élastique linéaire définie par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν . La masse volumique du matériau supposé homogène est ρ .

Cette enveloppe est déterminée par une section droite annulaire de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e . La longueur L de l'enveloppe est supposée être très grande. On ne s'intéresse qu'à la section située à mi-hauteur et on peut donc considérer que les effets de bord dû aux extrémités sont négligeables. On associe un référentiel cylindro polaire au domaine, l'axe de l'enveloppe étant définie par la direction \vec{E}_z . L'une des extrémités ($z = L$) est ouverte à l'air libre, l'autre ($z = 0$) est fermée par un disque homogène d'épaisseur h (cote comprise entre 0 et $-h$). L'extrémité ouverte est solidaire d'un bâti fixe. Un piston coulissant permet de mettre éventuellement le fluide en pression.

Une rosette à 45° est collée sur la surface externe de l'enveloppe à mi-hauteur ($z = L/2$). L'une des jauges est colinéaire à la direction circonférentielle ($\vec{a} = \vec{E}_\theta$), une autre est colinéaire à la direction axiale ($\vec{c} = \vec{E}_z$), la dernière (\vec{b}) étant collée selon la direction bissectrice des deux précédentes.

Pour les applications numériques on prendra les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{llll} E = 210 \text{ Gpa} & \nu = 0,3 & \rho = 7800 \text{ Kg/m}^3 & \\ R_i = 100 \text{ mm} & R_e = 120 \text{ mm} & L = 1 \text{ m} & h = 50 \text{ mm} \end{array}$$

1- Actions gravitationnelles

L'axe $(O; \vec{E}_z)$ représente la direction verticale ascendante ($\vec{g} = -g \vec{E}_z$). On suppose que le tenseur des contraintes en un point courant est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z) \quad \text{avec } \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(z)$$

1-1 En utilisant les équations d'équilibre du domaine et les conditions aux limites sur les forces, déterminer σ_{zz} en fonction de z, R_i, R_e, ρ, h et g .

1-2 Donner les composantes du tenseur des déformations en fonction de z, R_i, R_e, ρ, h, g et des constantes élastiques E et ν .

1-3 Donner l'expression de la variation de diamètre en fonction de z, R_i, R_e, ρ, h, g et des constantes élastiques E et ν .

1-4 Calculer numériquement les valeurs des dilatations linéaires données par les trois jauges de la rosette. Calculer numériquement la variation de longueur du cylindre ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

2- Pression

Un piston permet de mettre en pression le fluide contenu à l'intérieur de l'enveloppe.

2-1 Donner les composantes du tenseur des contraintes en fonction de la pression intérieure P et des rayons R_i, R_e et r . On négligera la pression extérieure.

2-2 Donner les composantes du tenseur des déformations en fonction de P, R_i, R_e, r et des constantes élastiques E et ν .

2-3 Calculer numériquement les valeurs des dilatations linéaires données par les trois jauges de la rosette. Calculer numériquement la variation relative d'épaisseur du cylindre.

3- Rotation

L'ensemble est mis en rotation uniforme autour de l'axe $(O; \vec{E}_z)$ à la vitesse angulaire ω .

3-1 Donner l'expression de la force de volume par unité de volume $\vec{f}(M)$.

3-2 On suppose que le champ de déplacement est de la forme :

$$\vec{U}(M) = u_r \vec{E}_r + u_z \vec{E}_z \quad \text{avec} \quad u_r = u_r(r) \quad \text{et} \quad u_z = u_z(z)$$

3-2-1 En utilisant les équations d'équilibre, donner deux équations différentielles permettant de définir les composantes du vecteur déplacement.

3-2-2 Intégrer ces équations et déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions aux limites.

4- Traction et torsion

Le chargement imposé au tube est une sollicitation de traction – torsion dans une section droite. Les valeurs des dilatations linéaires données par les jauges de la rosette sont :

$$\varepsilon_{aa} = 10^{-4} \quad \varepsilon_{bb} = -2 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_{cc} = 3 \cdot 10^{-4}$$

4-1 Calculer numériquement les valeurs des déformations principales dans le plan de la rosette. Donner les directions principales dans le plan $(M; \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$.

4-2 Calculer numériquement toutes les composantes du tenseur des contraintes.

Sollicitation combinée d'un cylindre

Le milieu continu étudié est un cylindre plein de révolution, d'axe de symétrie de révolution $(O; \vec{E}_z)$, de rayon extérieur R et de longueur $2h$. Un point quelconque de ce milieu est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z , avec :

$$0 \leq r \leq R \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad -h \leq z \leq h$$

Le milieu est en équilibre par rapport à un repère galiléen et ne supporte pas d'actions à distance (ou de force de volume). Le matériau est supposé homogène, isotrope à comportement élastique linéaire, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν .

L'état de contrainte en un point quelconque de ce milieu est défini, dans la base cylindro-polaire par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = p \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{h^3} - \frac{9+3\nu}{32} \frac{r^2 z}{h^3} - \frac{3}{8} \frac{z}{h} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = p \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{h^3} - \frac{3}{8} \frac{z}{h} \right) \\ \sigma_{zz} = p \left(-\frac{9+3\nu}{32} \frac{z^3}{h^3} + \frac{27+9\nu}{32} \frac{z}{h} - 1 + \frac{18+6\nu}{32} \right) \\ \sigma_{rz} = p \frac{27+9\nu}{64 h^3} (z^2 - h^2) r \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{cases} \quad \text{dans ces expressions } p \text{ est une constante positive}$$

1- Les équations d'équilibres sont-elles vérifiées ?

2- Donner le chargement sur les bases et la surface latérale du cylindre . Vérifier l'équilibre global du milieu.

Application numérique :

$$R = 50 \text{ cm} \quad h = 5 \text{ cm} \quad E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0,29 \quad p = 4 \text{ daN} / \text{mm}^2$$

3- Au point de coordonnées $r = R/2$ et $z = 0$, déterminer numériquement le cisaillement maximal, la contrainte équivalente de Von Misès et l'énergie de déformation volumique.

Transformation hélicoïdale

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$, supposé galiléen, le milieu continu étudié est défini par :

$$0 \leq x \leq L ; a^2 \leq y^2 + z^2 \leq b^2$$

Le matériau est supposé homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire, de module de YOUNG E et de coefficient de Poisson ν . Le milieu étudié est en équilibre par rapport au repère défini ci-dessus et les actions à distance sont nulles. Sous l'effet du chargement, le champ des déplacements se présente sous la forme suivante :

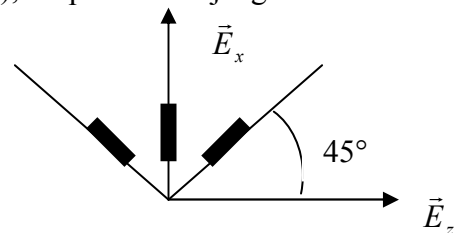
$$\vec{U}(P) = \nu \vec{E}_y + w \vec{E}_z \quad \text{avec} \quad \nu = -kxz \quad \text{et} \quad w = kxy \quad \left(\vec{OP} = x \vec{E}_x + y \vec{E}_y + z \vec{E}_z \right)$$

- 1- Montrer que les équations d'équilibre sont satisfaites.
- 2- Analyser le plus précisément possible le chargement qui s'exerce sur le milieu étudié.
- 3- Déterminer, en un point P quelconque, la matrice associée à l'état de contrainte dans la base naturelle en coordonnées cylindriques.

Application numérique :

$$L = 1 \text{ m} ; a = 0,04 \text{ m} ; b = 0,05 \text{ m} ; E = 200 \text{ Gpa} ; \nu = 0,29 ; k = 0,02 \text{ m}^{-1}$$

- 4- Calculer la contrainte normale maximale et la contrainte de cisaillement maximale dans ce milieu.
- 5- Au point particulier $M (x = L/2, y = b, z = 0)$, on place trois jauges d'extensométrie selon le schéma ci-contre. Que va-t-on mesurer ?



Etude d'un volant d'inertie

Un volant d'inertie à la forme d'un cylindre de révolution, homogène, de rayon R , de hauteur $2h$ et de masse volumique ρ . Il est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de son axe. On se propose de calculer les contraintes internes provenant de la rotation. On néglige l'action de la pesanteur.

Par hypothèse, nous admettrons que le tenseur des contraintes a l'expression suivante dans une base cylindro-polaire :

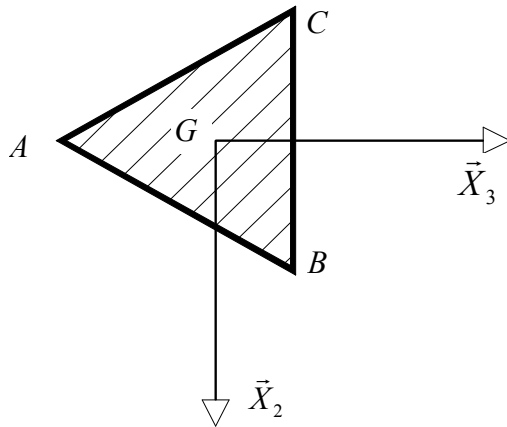
$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z) \quad (\sigma_{rr} \text{ et } \sigma_{\theta\theta} \text{ sont des fonctions de } r \text{ et de } z).$$

On désigne par :

- S_0 la surface latérale définie par $r = R$
- S_I la section droite définie par $z = h$
- S'_I la section droite définie par $z = -h$

- 1- Donner les formes générales des fonctions σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ qui satisfont aux conditions d'équilibre et de Beltrami.
- 2- Préciser les fonctions σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ permettant de satisfaire aux conditions aux limites.
- 3- Donner le champ de déplacement. On admettra que la plan $z = 0$ est un plan de symétrie.
- 4- Quelle est la déformée de la section droite S_I . Quelle est la déformée d'un segment parallèle aux génératrices défini par r et θ constants. En déduire la forme de la pièce après déformation et la valeur de son épaisseur au centre.

Poutre triangulaire



Le milieu continu étudié est une poutre droite de section droite constante, de ligne moyenne $(G; \vec{X}_1)$, de longueur L . La section droite a la forme d'un triangle équilatéral. Dans une section droite $(x_1 = cte)$, les coordonnées des sommets du triangle sont :

$$\begin{aligned} A : x_2 = 0 & \quad x_3 = -2a \\ B : x_2 = a\sqrt{3} & \quad x_3 = a \\ C : x_2 = -a\sqrt{3} & \quad x_3 = a \end{aligned}$$

La matrice associée au tenseur des contraintes en un point quelconque M (de coordonnées x_1, x_2 et x_3) de cette poutre est définie, dans la base orthonormée $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ par :

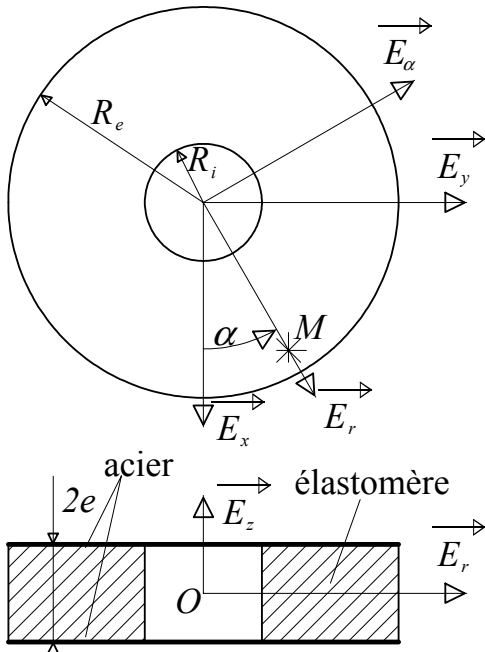
$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{13} = -K x_2 (x_3 - a) \\ \sigma_{12} = K (x_2^2 - x_3^2 - 2a x_3) / 2 \end{cases} \quad (K \text{ est une constante positive})$$

La poutre est en équilibre par rapport à un repère galiléen de référence. Le matériau est supposé homogène, isotrope, à loi de comportement élastique linéaire définie par son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν

- 1- A quelle(s) condition(s) les équations d'équilibre sont - elles vérifiées ?
- 2- Quel est le chargement de la surface latérale de cette poutre ?
- 3- Analyser le chargement de la base $x_1 = L$; Préciser en particulier la résultante et le moment résultant en G_1 , barycentre de cette base, des actions qui s'exercent sur cette base; Conclusion ?
- 4- Les conditions de compatibilité des déformations sont - elles vérifiées ?
- 5- Déterminer les composantes de déplacement d'un point quelconque de la poutre en admettant que la section d'abscisse $x_1 = 0$ est bloquée.
- 6- Application Numérique :
 $a = 30 \text{ mm} \quad K = 0,01 \text{ daN/mm}^4 \quad E = 20000 \text{ daN/mm}^2 \quad \nu = 0.29$
 - 6-1- Déterminer la valeur du cisaillement maximal dans cette poutre.
 - 6-2- Sur la face AC , au point $N (x_3 = 0)$, on place une rosette de 3 jauges extensométriques à 45° dont la face centrale est parallèle à \vec{X}_1 . Que va - t - on mesurer sur chacune de ces trois jauges ?

Etude d'un appui circulaire à trou circulaire en élastomère

Nous nous proposons de développer une théorie linéaire de l'appui en élastomère de forme circulaire, comportant un trou central circulaire, cet appui étant soumis à une charge verticale (réf. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics, série "théories et méthodes de calcul" N° 191 de Janvier 1976).



Les données sont les suivantes :

$(O; \vec{E}_z)$ axe vertical ascendant

R_e rayon extérieur

R_i rayon intérieur

$2e$ épaisseur de l'élastomère

E Module d'Young de l'élastomère

ν Coefficient de Poisson de l'élastomère

L'élastomère est compris entre deux plaques annulaires en acier supposées indéformables.

$\vec{OM} = r\vec{E}_r + z\vec{E}_z$ représente le vecteur position d'un

$\vec{U} = u_r\vec{E}_r + \bar{u}_\alpha\vec{E}_\alpha + u_z\vec{E}_z$ est le vecteur

point courant
 déplacement.

Les hypothèses faites sont les suivantes :

- a- L'élastomère est incompressible, donc sans variation de volume.
- b- La déformée d'une fibre verticale ($\alpha = \text{cte}$ et $r = \text{cte}$) est une parabole :

$$u_r = (e^2 - z^2)A \quad \text{où } A \text{ est une fonction de } r \text{ à déterminer.}$$
- c- Les déformations sont assez petites pour qu'on puisse utiliser la théorie de l'élasticité linéaire.
- d- Sous l'application de la charge F , les plaques en acier restent parallèles et se rapprochent de la quantité 2δ .
- e- Par raison de symétrie, la variable angulaire α n'intervient pas et le déplacement circonférentiel est nul.

On demande alors de répondre aux questions suivantes :

- 1- En utilisant la première hypothèse, montrer que le coefficient de Poisson de l'élastomère est de 0,5.

2- Exprimer les composantes du tenseur des déformations en fonction du module d'Young et des composantes du tenseur des contraintes.

3- Exprimer les composantes du tenseur déformation en fonction de e, z, r, A et u_z .

4- En utilisant l'incompressibilité du matériau $\left(\theta = \sum_I \varepsilon_{II} = 0\right)$, donner une équation différentielle reliant les fonctions u_z et A . Intégrer cette équation et donner l'expression de u_z en fonction de e, z et δ .

5- Dédire du calcul précédent une seconde équation différentielle du premier ordre pour la fonction A . Montrer que la solution générale de cette équation différentielle est :

$$A = \frac{3\delta}{4e^3} r + \frac{K}{r} \quad K: \text{constante d'intégration.}$$

6- Calculer les composantes du tenseur des déformations en fonction de e, z, r, δ et K .

7- Calculer $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}$ et σ_{rz} en fonction des composantes du tenseur des déformations, du module d'Young et de σ_{zz} , puis en fonction de e, r, z, δ, K, E et σ_{zz} .

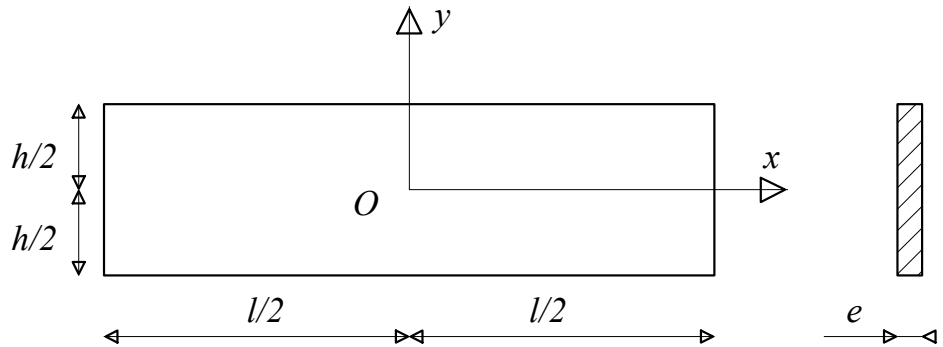
8- En utilisant les équations d'équilibre calculer σ_{zz} . Conclusion?

Elasticité plane en coordonnées cartésiennes

1^{er} Exercice

On étudie une poutre droite, de section rectangulaire étroite, en état plan de contraintes.

On note E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau (comportement élastique linéaire).



En l'absence de forces de volume, la fonction d'Airy est de la forme :

$$\varphi(x, y) = \frac{q}{5eh^3} \left(y^5 - 5x^2 y^3 + \frac{y^3}{4} (5l^2 - 2h^2) + \frac{15h^2 x^2 y}{4} - \frac{5h^3 x^2}{4} \right)$$

- 1- Montrer que c'est bien une fonction d'Airy.
- 2- Déterminer l'état de contrainte associé.
- 3- Quel est le chargement sur les faces déterminées par $y = \pm \frac{h}{2}$?
- 4- Définir le chargement sur les faces déterminées par $x = \pm \frac{l}{2}$. Préciser en particulier les éléments de réduction au centre géométrique de chaque face.
- 5- Comparer l'état de contrainte obtenu avec celui fourni par la théorie des poutres.
- 6- Déterminer les composantes du vecteur déplacement d'un point de la poutre. On précisera les conditions aux limites utilisées.

2^{ème} Exercice

La poutre précédente, encastrée dans la section définie par $x = -l/2$ est sollicitée en cisaillement. L'état de contrainte en un point quelconque est alors de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

- 1- En l'absence de toute force volumique, quelle est la forme des fonctions d'Airy possible?
- 2- En prenant $\varphi(x, y) = axy$, donner le champ de déplacement dans la poutre.

Elasticité plane en coordonnées cylindriques

Un solide élastique est en équilibre vis à vis d'un référentiel galiléen. L'état de contrainte est plan, la normale au plan directeur étant l'axe \vec{E}_z . Cet état est caractérisé par la matrice suivante dans la base cylindro-polaire :

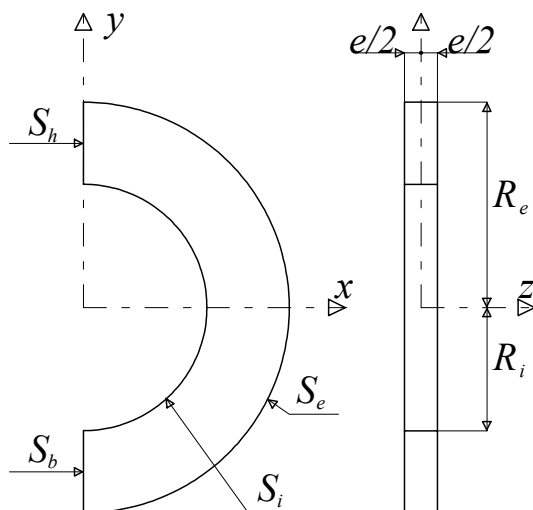
$$\underline{\underline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

$$\sigma_{rr}(M) = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \cos(\theta)$$

avec $\sigma_{\theta\theta}(M) = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \cos(\theta)$ A, B, C désignent des constantes

$$\sigma_{r\theta}(M) = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{C}{r} \right) \sin(\theta)$$

- 1- Calculer la densité des forces de volume.
- 2- Montrer que l'équation de compatibilité en contrainte (Beltrami) est satisfaite.
- 3- Montrer que l'état de contrainte pouvait être obtenu par une fonction d'Airy de la forme :
 $\varphi(r, \theta) = g \cos(\theta)$ g étant une fonction de r que l'on précisera.
- 4- Le solide élastique considéré est la plaque demi-circulaire représentée ci-dessous.



On note E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau. On note respectivement S_e, S_i, S_h et S_b les parties de surfaces frontières cylindriques circulaires extérieure et intérieure et des surfaces planes ainsi précisées sur la figure.

Les conditions suivantes sont réalisées:

- * les surfaces frontières S_e et S_i ne sont pas chargées
- * le torseur des actions extérieures exercées sur la surface frontière S_h est un torseur-vecteur de résultante $F \vec{E}_2$ et de moment nul en O .

- 4-1- Calculer les constantes A, B et C . On calculera le torseur des actions extérieures exercées sur la surface frontière S_b .

4-2- Trouver les coordonnées radiale et orthoradiale du vecteur déplacement. On déterminera les constantes d'intégration par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_\theta(r = R, \theta = 0) = 0 \\ u_\theta(r = R, \theta = \frac{\pi}{2}) = 0 \\ u_\theta(r = R, \theta = -\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad R \text{ dé signe une valeur fixé e de } r$$

4-3- Calculer le déplacement radial pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

4-4- On prend $R_e = R + \rho$ et $R_i = R - \rho$. En faisant l'hypothèse que ρ est très petit devant R , montrer que la quantité $u_r\left(R, \frac{\pi}{2}\right)$ est équivalente à $\frac{3\pi F}{8 E e} \left(\frac{R}{\rho}\right)^3$.

4-5- Exprimer la quantité approchée précédente en fonction F , E , R et I (moment quadratique central relatif à la direction \vec{E}_z d'une section normale).

Contrainte en pointe de fissure

On considère, en coordonnées polaires, le champ de contraintes planes donné en point d'une fissure et défini par :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{K}{\sqrt{r}} \left(\frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) & \sigma_{rz} &= 0 \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K}{\sqrt{r}} \left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) & \sigma_{\theta z} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K}{\sqrt{r}} f(\theta) & \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned}$$

K représente une constante. Les forces de volume sont négligeables et le domaine est en équilibre.

1-1 Déterminer la fonction $f(\theta)$. Vérifier les équations de compatibilité.

1-2 En utilisant le critère de Von Misès, déterminer la courbe limite du domaine élastique sous la forme paramétrée : $r_e = g(\theta)$

1-3 On se place à $\theta = \pi/3$. Tracer le cercle de Mohr des contraintes.

Déterminer les contraintes principales et les directions principales. Quelle est la valeur de la cission maximale?

Calculer les déformations principales sachant que le module d'Young du matériau est E et que son coefficient de Poisson est ν .

Poutre courbe

(Selon examen CERENSAM Bordeaux janvier 1996)

Une poutre courbe possède une section rectangulaire constante, d'épaisseur e et un plan de symétrie $(O; \vec{X}, \vec{Y})$. La poutre est limitée par deux portions de cylindres de révolution d'axe $(O; \vec{Z})$, de rayons respectifs R et $2R$. En coordonnées cylindriques, on a pour un point M de la poutre :

$$R \leq r \leq 2R \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad -\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}$$

L'état de contrainte est plan. On néglige les forces de volume. La surface latérale de la poutre n'est pas chargée. Les sections droites d'extrémité, de centre de surface G_0 et G_1 , sont soumises à des forces extérieures non représentées. On se place dans les hypothèses de l'élasticité linéaire.

On donne le champ des contraintes :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B \operatorname{Ln} r + C$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B \operatorname{Ln} r + D \quad A, B, C, D : \text{constantes} \quad \operatorname{Ln} \text{ Logarithme népérien}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

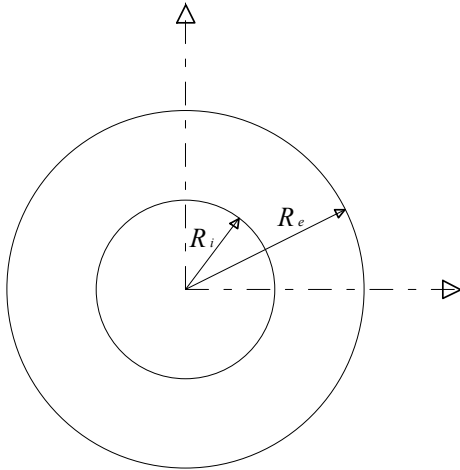
1- Ecrire les équations d'équilibre, les équations de compatibilité et les conditions aux limites. Calculer les constantes A et B en fonction de C , D et R .

2- On donne :

$$C = -\frac{4M(4 \operatorname{Ln} 2 + 3 \operatorname{Ln} R)}{eR^2(9 - 16(\operatorname{Ln} 2)^2)} \quad D = -\frac{4M(4 \operatorname{Ln} 2 + 3 \operatorname{Ln} R - 3)}{eR^2(9 - 16(\operatorname{Ln} 2)^2)}$$

Déterminer les éléments de réduction du torseur des forces de gauche dans une section droite de la poutre. En déduire une interprétation physique de M .

Cylindre en pression



On considère un corps cylindrique infiniment mince de section circulaire creuse. Ce corps est chargé radialement sur son pourtour extérieur R_e par une pression uniforme p_e . Le contour intérieur R_i est en contact avec un noyau que l'on suppose infiniment rigide. Le problème est à symétrie axiale et les forces de volumes sont négligeables.

1- A-t-on un problème de contraintes planes ou de déformations planes? Justifiez votre réponse.

2- Donner l'équation différentielle permettant de calculer la fonction d'Airy φ .

3- Eventuellement en utilisant un changement de variable du type $t = \ln r$, résoudre cette équation différentielle et donner la forme générale de la solution.

4- Calculer les contraintes en fonction du rayon r et des constantes d'intégration.

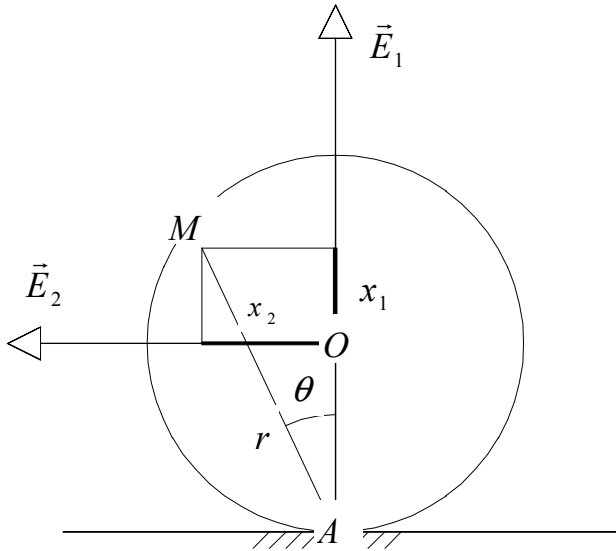
5- En utilisant les conditions aux limites, déterminer les valeurs des constantes d'intégration. En déduire les expressions du tenseur des contraintes, du tenseur des déformations et du vecteur déplacement.

6- Application numérique:

On a : $R_i = 50 \text{ mm}$ $R_e = 100 \text{ mm}$ $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0,25$ $\sigma_e = 50 \text{ daN / mm}^2$

Quelle est la valeur de la pression limite pour ne pas dépasser la limite d'élasticité selon le critère de Tresca?

Etude des contraintes dans un disque pesant



Un disque circulaire pesant de rayon R , d'épaisseur unité, est défini dans le repère $\mathbf{R} \{O; \vec{E}_1, \vec{E}_2\}$.

L'axe $\{O; \vec{E}_1\}$ est vertical ascendant.

Le disque repose, suivant une génératrice, sur un plan horizontal, la force au point d'appui est $\vec{F} = \rho g \pi R^2 \vec{E}_1$ avec ρ la masse volumique du matériau.

Ailleurs qu'au point de contact le disque est libre de toute sollicitation.

Nous proposons d'étudier la répartition des contraintes dans ce disque soumis à son propre poids.

Nous formulons l'hypothèse d'état plan de contrainte.

1- Si nous considérons la solution type de Mitchell, la répartition des contraintes, en coordonnées polaires aurait pour expression :

$$\sigma_{rr} = -\frac{2F \cos \theta}{\pi r}; \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0$$

Exprimer les contraintes sur la surface latérale libre du disque ($\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R$) induite par cette répartition. Donner leur expression dans le repère $\mathbf{R} \{O; \vec{E}_1, \vec{E}_2\}$.

2- Pour éliminer ces contraintes, nous proposons un nouveau système de contraintes qui se détermine à partir de la fonction d'Airy :

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{\rho g}{4} \left[-\frac{x_1^3}{3} + R(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2^2 \right]$$

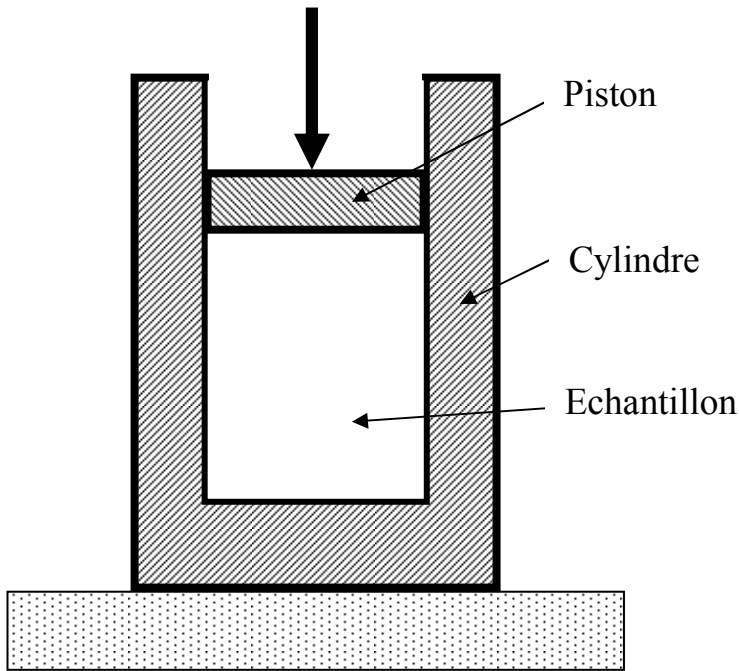
2-1- Montrer que φ est bien une fonction d'Airy.

2-2- Exprimer ces nouvelles contraintes.

3- Par superposition des deux systèmes de contraintes, exprimer le tenseur des contraintes dans le disque. Vérifier à nouveau la condition aux limites.

Etude d'un oedomètre

(selon sujet d'examen du CERENSAM Bordeaux du 19 juin 2002)



Un oedomètre est un appareil utilisé en génie civil pour mesurer la compressibilité oedométrique (cf question N°6) du sol. Cet appareil se compose d'un cylindre très rigide dans lequel on place l'échantillon de sol à tester (du sable par exemple) et d'un piston qui va comprimer l'échantillon de sol.

Nous nous proposons d'étudier l'état de déformations et de contraintes de l'échantillon de sol en cours de test. Pour cela nous supposons que le cylindre est indéformable et que l'étanchéité entre le piston et le cylindre est suffisamment bonne pour qu'aucune particule de l'échantillon testé ne remonte entre le cylindre et le piston. D'autre part le piston sera supposé indéformable et la pression p exercée par ce piston sur l'échantillon de sol sera supposée uniformément répartie sur la face du piston

en contact avec l'échantillon. La hauteur initiale de l'échantillon non comprimée est h_0 .

L'échantillon de sol testé sera supposé homogène et isotrope à comportement élastique linéaire (dans le domaine de déformations et de contraintes où il est sollicité) de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν (coefficients de Lamé λ et μ). On négligera les effets de la pesanteur devant ceux engendrés par la pression d'huile dans le vérin qui commande le piston.

- 1- Compte tenu des hypothèses faites précédemment, expliquez précisément pourquoi on peut raisonnablement supposer qu'en tout point M de l'échantillon de sol le champ des déplacements est de la forme : $\vec{U}(M) = U_z(z) \vec{E}_z$
- 2- En déduire l'allure du tenseur des déformations et celle du tenseur des contraintes dans la base cylindro polaire en tout point M de l'échantillon.
- 3- Donner les équations différentielles qui régissent le système.
- 4- Résoudre ces équations pour calculer $U_z(z)$ sans chercher à déterminer la (ou les) constante(s) qui apparaîtront.
- 5- Ecrire la (ou les) condition(s) aux limites permettant d'identifier ces constantes. Donner l'expression analytique de chacune de ces constantes en fonction des paramètres nécessaires.
- 6- Déterminer l'expression analytique de la compression oedométrique, c'est-à-dire du rapport $\frac{p}{\epsilon_{zz}}$. Préciser son unité.

- 7- Donner en fonction du module F de la force exercée sur le piston la valeur de la dilatation linéaire ε_{zz} et celle du déplacement du piston.
- 8- Déterminer les expressions analytiques des termes non nuls du tenseur des contraintes.
- 9- Montrer qu'en tout point de la surface intérieure du cylindre en contact avec l'échantillon de sol, il existe une pression q (à définir) exercée par l'échantillon de sol sur les parois du cylindre.
- 10- On suppose maintenant que le cylindre n'est plus indéformable. Le matériau le constituant à une loi de comportement élastique linéaire définie par un module d'Young E' et un coefficient de Poisson ν' (constantes de Lamé λ' et μ'). On souhaite instrumenter la surface extérieure de ce cylindre avec des jauges de déformation afin de déterminer expérimentalement la pression exercée par l'échantillon de sol sur les parois du cylindre. En supposant que la hauteur h_0 est suffisamment grande par rapport au diamètre (ce qui est très discutable), déterminer l'état de contrainte et de déformation en un point de la surface extérieure du cylindre, le paramètre de charge étant le module F de la force exercée sur le piston. Proposer alors une instrumentation du cylindre en la justifiant.
- 11- Le cylindre est à nouveau considéré comme indéformable, mais on souhaite prendre en compte le poids propre de l'échantillon (masse volumique ρ). Donner alors la nouvelle distribution des pressions exercées par l'échantillon sur la paroi latérale du cylindre.

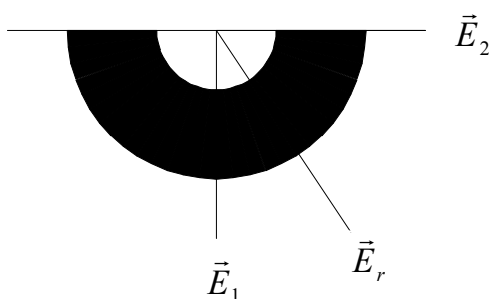
Pression de Hertz

On considère un massif semi infini en état plan de déformation. On lui associe un repère cylindrique.

- 1- En l'absence de force de volume, montrer que la fonction suivante peut être une fonction d'Airy :

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta$$

- 2- Donner l'expression du tenseur des contraintes en un point M quelconque dans la base cylindrique.
- 3- Quel est le tenseur des déformations associé ?
- 4- Le domaine est un demi anneau d'épaisseur unité, de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et d'angle au sommet π .



- 4-1 Déterminer le chargement sur chacune des faces de cet anneau. Quelle remarque pouvons faire dans le cas d'un rayon R_1 infiniment petit ?

- 4-2 En utilisant le critère de Von Misès, montrer que les lignes d'iso contraintes sont des cercles dont on précisera les centres.

- 5- Donner l'expression du champ de déplacement.

Milieu demi cylindrique

Ce sujet est largement inspiré du sujet d'examen du CERENSAM Lille du 21 janvier 2003

On considère un demi milieu cylindrique continu défini dans un repère orthonormé $(O; \vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z)$ par :

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq L \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le matériau constituant ce milieu est supposé homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . Le milieu est en équilibre statique. En tout point l'état de contrainte est défini dans la base cartésienne par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{xz} = -\left(\frac{1+2\nu}{1+\nu}\right) \left(\frac{2Pxy}{\pi R^4}\right) \\ \sigma_{yz} = \left(\frac{3+2\nu}{1+\nu}\right) \left(\frac{P}{\pi R^4}\right) \left[R^2 - y^2 - \left(\frac{1-2\nu}{3+2\nu}\right) x^2 \right] \\ \sigma_{zz} = \frac{8P(z-L)y}{\pi R^4} \end{cases}$$

P étant une constante.

- 7- A quelles conditions les équations d'équilibre sont-elles vérifiées ?
- 8- Analyser le chargement sur la surface latérale du corps étudié.
- 9- Analyser le chargement de la base $z = L$ du corps étudié. Préciser en particulier la résultante des actions qui s'exercent sur cette surface et le moment résultant au point A $(0,0, L)$ des actions qui s'exercent sur cette surface.
- 10- Montrer qu'il existe un ensemble de points (que l'on précisera) par rapport auxquels le moment résultant des actions exercées est nul. Conclure.
- 11- Les équations de compatibilité des déformations sont-elles vérifiées ?
- 12- Au point B $(0,0,L/2)$ on installe une rosette de trois jauges extensométriques à 45° , la jauge centrale étant placée selon la direction \vec{E}_z . Déterminer les valeurs données par ces trois jauges. Donner en ce point le tricerclé de Mohr des contraintes et des déformations.
- 13- Déterminer la valeur de l'énergie de déformation du milieu étudié.

Pion indéformable dans une plaque

(Selon le sujet d'examen du CERENSAM Cluny du 3 juin 2008)

Un pion métallique (cylindre de diamètre $D+\delta$, de longueur l) est complètement emmanché à force dans un trou de diamètre D fait dans une plaque en polycarbonate de hauteur $h = l$ et dont les autres dimensions sont très grandes devant le diamètre du pion. Contenu des matériaux en présence, on suppose que le pion est indéformable et que le polycarbonate a un comportement élastique linéaire caractérisé par un module d'Young E , un coefficient de Poisson ν et une limite élastique σ_e .

1. Déterminer l'état de contrainte dans la plaque. Quelle est la valeur limite admissible δ_{\max} pour le serrage δ ?

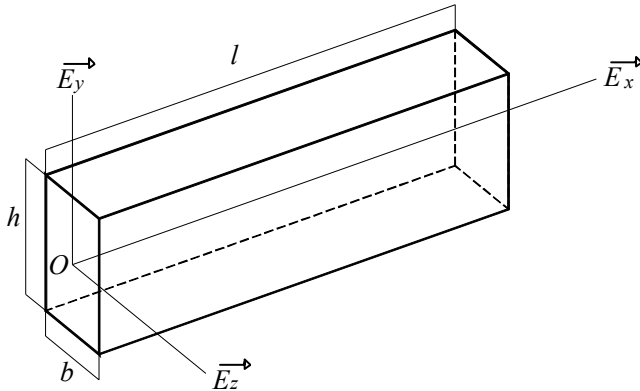
Le serrage est en fait égal à $\delta_{\max}/2$. On tourne le pion d'un angle α autour de son axe. Il n'y a aucun glissement au niveau du contact pion – plaque.

2. Quel est alors le nouvel état de contrainte dans la plaque. Quel est l'angle limite α_{\max} de rotation pour ne pas dépasser la limite élastique du polycarbonate ?
3. Quel est la valeur du couple à appliquer au pion pour obtenir cette rotation ?

Au niveau de l'interface entre les deux pièces, nous avons un coefficient de frottement f .

4. Quel est alors le couple limite que l'on peut appliquer ?

Poutre en état plan de contrainte



Une poutre de forme parallélépipédique a pour longueur l , pour hauteur h et pour largeur b . Elle est soumise à des efforts extérieurs mais les forces de volume sont négligeables. On désigne par $(O; \vec{E}_x)$ la ligne des centre de gravité des sections droites.

L'état de contrainte est plan. Il est défini par la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi(x, y) = (x-l)(\alpha y^3 + \beta y^2)$$

(α , β et c représentent des constantes).

1- Vérifier que l'on a bien une fonction d'Airy et déterminer la matrice des contraintes en un point de la poutre de coordonnées x, y, z .

2- Déterminer le chargement sur chacune des faces de la poutre.

Calculer les constantes α et β sachant que les forces extérieures exercées dans la section droite $x=0$ se réduisent, au centre de gravité de la section, en un torseur dont la résultante est $P\vec{E}_y$. Calculer le moment de ce torseur en O . Quel doit être alors le chargement sur les autres faces?

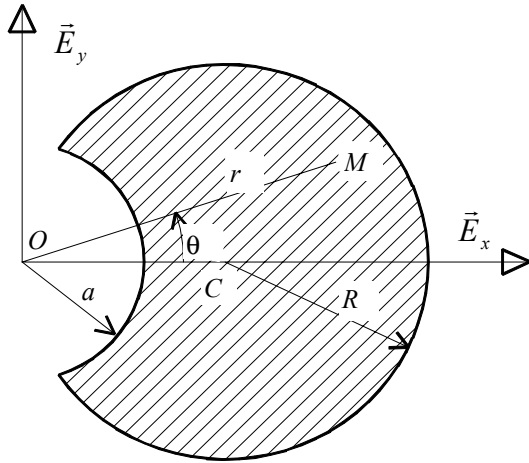
3- Déterminer le tenseur des déformations en admettant pour le matériau une loi de comportement élastique linéaire caractérisée par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

4- On a :

$l = 1 \text{ m}$	$h = 0,10 \text{ m}$	$b = 0,02 \text{ m}$
$E = 210^5 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$P = 6000 \text{ N}$

On considère le point M ($x=0,5\text{m}; y=0,01\text{m}; z=0$). Tracer en ce point le tricercle de Mohr des contraintes. Déterminer les directions principales et les contraintes principales. Quelles sont les valeurs des déformations principales?

Arbre entaillé



La section droite d'un arbre est représentée ci-contre. Elle est limitée par un arc de cercle (C_1) de centre C ($x=R, y=0$), de rayon R et un arc de cercle (C_2) de centre O et de rayon a ($a < R$).

Le champ des contraintes est donné en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases}
 \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = 0 \\
 \sigma_{rz} = HR \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \sin \theta \\
 \sigma_{\theta z} = H \left[-R \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \cos \theta + r \right]
 \end{cases}$$

H est une constante physique positive. On néglige les forces de volume

- 1- Vérifier les équations d'équilibre.
- 2- Déterminer le chargement sur la surface latérale de l'arbre.
- 3- Déterminer, dans une section droite, pour les points de l'axe $(O; \vec{E}_x)$, la valeur maximale de la norme du vecteur contrainte. Comparer sa valeur limite (quand a tend vers 0) avec celle d'un arbre plein. Conclusion?

Réaction d'un sol élastique sur une conduite flexible

Nous considérons une conduite flexible d'axe $(O; \vec{E}_z)$ placée dans un milieu élastique de module d'élasticité longitudinal E et de coefficient de Poisson ν . On se propose de calculer les pressions normales exercées par le sol sur la conduite en se plaçant dans le cas de l'élasticité linéaire en déformations planes (cylindre infini). On travaillera essentiellement en coordonnées cylindro-polaires et on étudiera le sol.

- 1- Nous supposons que le champ de déplacement d'un point est donné par :

$$\vec{U}(M) = u_r \vec{E}_r + u_\theta \vec{E}_\theta.$$

- 1-1- Calculer les composantes du tenseur des déformations.

1-2- Donner les composantes du tenseur des contraintes en fonction des composantes du tenseur des déformations $(\epsilon_{rr}, \epsilon_{r\theta}, \epsilon_{\theta\theta})$ et des caractéristiques élastiques du matériau (E, ν) . Que deviennent-elles en fonction des composantes du champ de déplacement (u_r, u_θ) et des caractéristiques élastiques du matériau?

1-3- Le problème étant un problème d'élasticité plane, on envisage l'emploi d'une fonction d'Airy Φ . Quelles relations avons-nous entre les composantes du tenseur des contraintes et la fonction d'Airy?

2- Nous supposons que la conduite impose au sol une déformée donnée par le champ de déplacement $\vec{U}(M) = U \cos(2\theta) \vec{E}_r$ pour $r=R$ (rayon extérieur de la conduite). On recherche alors une solution pour la fonction d'Airy en prenant :

$$\Phi(r, \theta) = f(r) \cos(2\theta)$$

- 2-1- Quelles sont alors les expressions des contraintes?

- 2-2- Quelle est l'équation différentielle qui doit être satisfaite par la fonction $f(r)$?

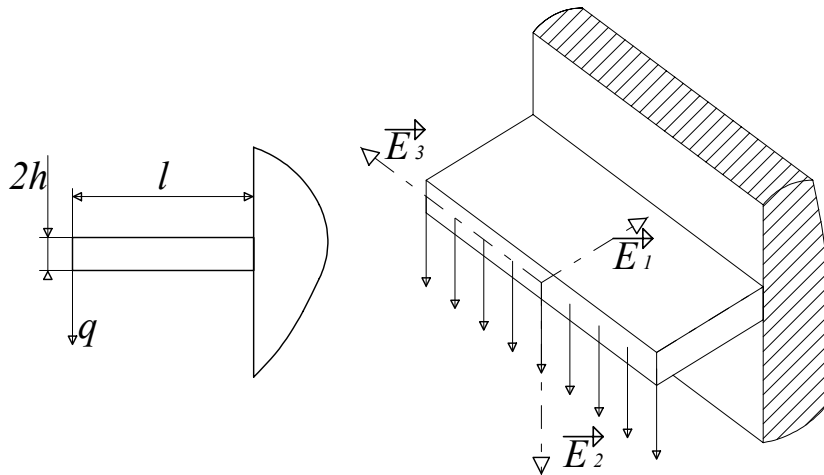
- 2-3- Intégrer cette équation différentielle sachant que l'on a :

$$r \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \left(\frac{d}{dr} \left(r^3 \left(\frac{df}{dr} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) = \frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2 d^3 f}{r dr^3} - \frac{9 d^2 f}{r^2 dr^2} + \frac{9 df}{r^3 dr}$$

2-4- Quelles sont alors les expressions générales de la fonction d'Airy et des composantes du tenseur des contraintes?

2-5- On suppose que pour r très grand les contraintes sont nulles alors que pour $r=R$ le vecteur contrainte ne peut qu'être normal à la conduite. Déterminer alors les constantes d'intégration et donner le tenseur des contraintes ainsi que le champ de déplacement.

Console



On veut déterminer la distribution de contraintes dans une poutre console de longueur l et de hauteur $2h$. La charge appliquée à l'extrémité libre est une force linéique caractérisée par une densité q .

Comme les dimensions selon la direction \vec{E}_3 sont grandes, le problème est traité en déformation plane. On néglige les forces de volume.

1- Donner les conditions aux limites de ce problème.

2- On imagine la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi = C_0 (x_1^4 + x_2^4) + C_1 x_1 x_2^3 + C_2 x_1^3 x_2 + C_3 x_1^3 + C_4 x_1^2 x_2 + C_5 x_1^2 + C_6 x_1 x_2 + C_7 x_1 + C_8 x_2 + C_9$$

A quelle(s) condition(s) sur les constantes C_i la fonction précédente représente-t-elle effectivement une fonction d'Airy?

3- Calculer le tenseur des contraintes obtenu à partir de cette fonction.

4- Pouvons-nous satisfaire toutes les conditions aux limites?

5- Déterminer les composantes du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement.

Plaque en contrainte plane

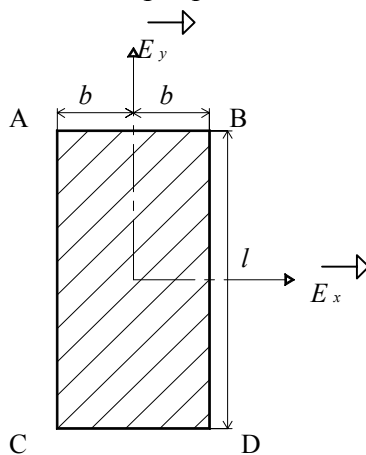
Pour l'étude d'une plaque plane de faible épaisseur, en état plan de contrainte et en l'absence de forces de volume, on adopte une fonction d'Airy de la forme suivante :

$$\Phi(x, y) = f(y) \cos(\alpha x)$$

1- Montrer que la fonction $f(y)$ est nécessairement de la forme :

$$f(y) = \lambda_1 \operatorname{ch}(\alpha y) + \lambda_2 \operatorname{sh}(\alpha y) + \lambda_3 y \operatorname{ch}(\alpha y) + \lambda_4 y \operatorname{sh}(\alpha y) \quad \lambda_i \text{ constantes}$$

2- La plaque, un rectangle de longueur l et de largeur $2b$, est définie ci-dessous.



2-1 Les faces AB et CD sont soumises à des charges purement normales, de résultantes $F \vec{E}_y$ sur AB, $-F \vec{E}_y$ sur CD et de moments nuls aux centres des faces (F représente l'effort normal par unité d'épaisseur de plaque).

Montrer que ce chargement implique que les constantes λ_2 et λ_3 soient nulles.

Exprimer les deux autres constantes λ_1 et λ_4 en fonction de F , α , l et b .

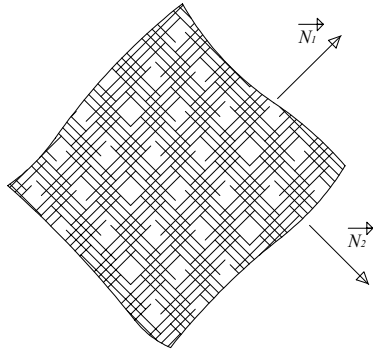
2-2 Déterminer le chargement des faces AC et BD lorsqu'on choisit $\alpha = \frac{\pi}{2b}$.

3- Application numérique :

$$\alpha = \frac{\pi}{2b} \quad \frac{l}{b} = 10 \quad \frac{F}{b} = 1 \text{ daN/mm}^2$$

Tracer les évolutions de σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} en fonction de x/b pour des valeurs de y/l égales à 0, 0,25 et 0,5. Que peut-on conclure?

Réalisation d'un tube en matériau composite



On se propose de réaliser des tubes en matériau composite de type "fibre de verre longues/résine époxy".

Le tissu fibre de verre est constitué de plusieurs nappes superposées. Chaque nappe est réalisée par des fils identiques tous alignés dans la même direction.

Les nappes superposées sont orientées alternativement dans deux directions perpendiculaires \vec{N}_1 (fils **A**) et \vec{N}_2 (fils **B**). Pour assurer la cohésion, l'ensemble des nappes est noyé dans une résine époxy **R**.

Première partie

Dans un premier temps, on veut déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau équivalent **E**.

On rappelle que pour un matériau quelconque à comportement élastique linéaire on a :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\sigma} = \hat{C} \hat{\varepsilon}$$

1-1 La résine a un comportement isotrope. Ce dernier est défini par le module d'élasticité longitudinal E_R et le coefficient de Poisson ν_R .

Exprimer la matrice de raideur en fonction des constantes élastiques. On précisera la base utilisée.

1-2 Chaque fibre de verre est caractérisée par sa rigidité k . Pour la déterminer, on soumet un fil d'orientation \vec{N} à une contrainte σ_{NN} . On mesure la dilatation linéaire ε_{NN} et on en déduit $k = \sigma_{NN} / \varepsilon_{NN}$.

On désigne par n le nombre de fils par unité de largeur dans chaque nappe et par $2r$ le nombre total de nappes par unité d'épaisseur (r nappes de fils **A** et r nappes de fils **B**).

On considère que la fibre n'offre aucune résistance aux cisaillements et aux déplacements non parallèles à son sens longitudinal. On en déduit que le comportement des fils **A** est caractérisé par :

$$\sigma_{ijA} = 0 \quad \text{sauf} \quad \sigma_{11A} = K \varepsilon_{11A} \quad \text{dans la base } (\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3).$$

1-3 Donner la valeur de K en fonction de k , n et r . Que peut-on dire pour caractériser le comportement des fils **B**?

1-4 On se place dans l'hypothèse des petits déplacements. Ceci nous amènera à considérer que les déplacements sont les mêmes pour la matrice, pour les fils et pour le matériau homogène équivalent.

Le calcul de la matrice de raideur du matériau équivalent sera fait suivant le principe d'égalité des énergies de déformation :

$$U_{\text{déf mat équi}} = U_{\text{déf rés}} + U_{\text{déf filsA}} + U_{\text{déf filsB}} \Leftrightarrow U_E = U_P + U_A + U_B$$

On rappelle que la densité d'énergie, qui est un invariant, se calcule suivant la formule :

$$\frac{dU}{dv} = \frac{1}{2} \tau \hat{\sigma} \cdot \hat{\epsilon}$$

On désigne par $\eta_A = V_A/V_T$ (resp. $\eta_B = V_B/V_T$) la densité volumique de fibres A (resp. fibres B).

1-5 A partir du résultat précédent, donner l'expression de la matrice de raideur du matériau équivalent dans la base $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)$.

1-6 En fait l'enroulement des fibres est réalisé autour d'un cylindre de tel sorte que l'on ait :

$$\bar{N}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{N}_\alpha - \bar{N}_z) \quad \bar{N}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{N}_\alpha + \bar{N}_z) \quad \bar{N}_3 = \bar{N}_r$$

Donner alors l'expression de la matrice de raideur du matériau équivalent dans la base cylindro-polaire $(\bar{N}_r, \bar{N}_\alpha, \bar{N}_z)$.

Deuxième partie

Dans la réalité les fibres **A** (resp **B**) forment un angle de 55° (resp -55°) avec la direction axiale du cylindre \bar{N}_z . En tenant compte de l'application numérique, les calculs ont conduit à la valeur suivante de la matrice de raideur du matériau équivalent **E** dans la base cylindro-polaire $(\bar{N}_r, \bar{N}_\alpha, \bar{N}_z)$:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 2247 & 1210 & 1210 & 0 & 0 & 0 \\ 1210 & 18024 & 8945 & 0 & 0 & 0 \\ 1210 & 8945 & 6040 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4386 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 519 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 519 \end{pmatrix} \quad (\text{en MPa})$$

Les tubes ont un rayon extérieur $R_e = 90$ mm et un rayon intérieur $R_i = 80$ mm. Un fluide circule à l'intérieur de ces tubes à la pression de 7 bar. La pression extérieure est de 1 bar. Les conditions sont telles que l'on suppose avoir un état plan de déformations des tubes. Le poids propre de la structure et du fluide sont négligeables devant les efforts mis en jeu.

2-1 Ecrire les équations locales d'équilibre du cylindre en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

2-2 Quelles hypothèses pouvons-nous faire sur le champ de déplacement? En déduire l'expression du tenseur des déformations dans la base cylindro-polaire $(\bar{N}_r, \bar{N}_\alpha, \bar{N}_z)$.

2-3 Réécrire les équations d'équilibre en fonction des composantes du champ de déplacement.

2-4 Intégrer les équations précédentes et déterminer les constantes d'intégrations. On recherchera des solutions de la forme $y = x^n$.

2-5 Calculer alors la valeur de la contrainte de compression du tube σ_{zz} .

Déformations plastiques d'un tube en pression

On considère un tube épais sollicité par une pression intérieure. Les données numériques sont les suivantes :

Rayon intérieur :	$R_i = 40 \text{ mm}$	Rayon extérieur :	$R_e = 50 \text{ mm}$
Module d'Young :	$E = 210 \text{ GPa}$	Coefficient de Poisson :	$\nu = 0,25$
Pression extérieure :	$P_e = 0 \text{ bar}$	Pression intérieure :	$P_i = p$
Limite élastique :	$\sigma_e = 200 \text{ MPa}$		

1- On suppose que le tube travaille en contrainte plane.

1-1 En utilisant le critère de Tresca, calculer la valeur de la pression élastique p_e associée à un début de plastification du tube.

1-2 On suppose que le matériau a une loi de comportement élastique parfaitement plastique. La contrainte d'écoulement σ_0 est donc constante et égale à la limite élastique du matériau σ_e .

1-2-1 En utilisant le critère de Tresca et les équations d'équilibre, calculer l'état de contrainte associé à une valeur de pression supérieure à la pression élastique p_e .

1-2-2 Montrer que pour une valeur de pression seuil p_s le tube est dans un état complètement plastique.

2- Vu la grande longueur du cylindre, on formule l'hypothèse d'un état plan de déformation.

2-1 En utilisant le critère de Von Misés, calculer la valeur de la pression élastique p_e associée à un début de plastification du tube.

2-2 On suppose que le matériau a une loi de comportement élastique parfaitement plastique. La contrainte d'écoulement σ_0 est donc constante et égale à la limite élastique du matériau σ_e .

2-2-1 En utilisant le critère de Von Misés et les équations d'équilibre, calculer l'état de contrainte associé à une valeur de pression supérieure à la pression élastique p_e .

2-2-2 Montrer que pour une valeur de pression seuil p_s le tube est dans un état complètement plastique.

2-3 La pression intérieure est la demi somme de la pression élastique et de la pression seuil :

$$p = \frac{p_e + p_s}{2}$$

2-3-1 Déterminer la zone ayant dépassée la limite élastique.

2-3-2 A partir de l'état précédent, on relâche la pression intérieure jusqu'à atteindre la valeur nulle. Déterminer alors l'état de contrainte dans le tube.

Sollicitation élastoplastique d'une sphère

On considère une sphère épaisse sollicitée par une pression intérieure. Les données numériques sont les suivantes :

Rayon intérieur :	$R_i=80mm$
Rayon extérieur :	$R_e=100mm$
Module d'Young :	$E=200GPa$
Limite élastique :	$\sigma_e=200MPa$
Coefficient de Poisson :	$\nu=0,25$
Pression intérieure :	$P_i=p$

1- En utilisant le critère de Von Misés, calculer la valeur de la pression élastique p_e associée à un début de plastification.

2- On suppose que le matériau a une loi de comportement élastique parfaitement plastique. La contrainte d'écoulement est notée $\sigma_0=\sigma_e$.

2-1 En utilisant les conditions de symétrie sphérique, le critère de Von Misés et les équations d'équilibre (données en annexe), calculer l'état de contrainte associé à une valeur de pression supérieure à la pression élastique p_e .

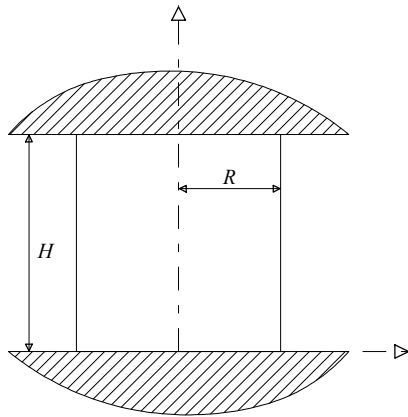
2-2 Montrer que pour une valeur de pression seuil p_s , la sphère est dans un état complètement plastique.

2-3 La pression intérieure est la demi-somme de la pression élastique et de la pression seuil :

2-3-1 Déterminer la zone ayant dépassée la limite élastique.

2-3-2 A partir de l'état précédent, on relâche la pression intérieure jusqu'à atteindre la valeur nulle. Déterminer alors l'état de contrainte dans la sphère.

Ecrasement d'un lopin cylindrique.



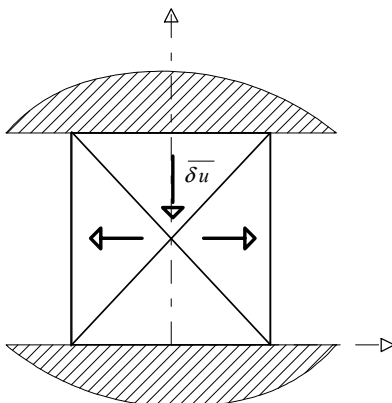
On considère un cylindre droit à base circulaire placé entre les deux tas d'une presse. On effectue alors l'écrasement de ce lopin. On désire définir la valeur de l'effort presseur nécessaire pour déformer plastiquement la pièce. Les données sont les suivantes :

Rayon intérieur R
 Hauteur H

Matériau à comportement rigide parfaitement plastique caractérisé par une contrainte d'écoulement σ_0 .

L'interface entre la pièce et les plateaux de la presse peut être modélisée par un frottement de type couche limite avec un coefficient m .

1- Détermination de l'effort presseur par la méthode de la borne supérieure.



1-1 Le champ de déplacement de type blocs rigides retenu est représenté par la figure ci-contre. Le déplacement du plateau supérieur de la presse est donné par la valeur δu .

1-1-1 Donner le diagramme des déplacements.

1-1-2 Calculer l'énergie dissipée.

1-1-3 En déduire une borne supérieure de la valeur de l'effort presseur. Quelle remarque pouvons-nous faire?

1-2 Afin d'améliorer le résultat précédent, on envisage un champ de déplacement continu conçu à partir des remarques suivantes :

La composante axiale est une fonction linéaire de la variable z $\delta u_z = k z$

La composante radiale n'est fonction que de la variable r $\delta u_r = u_r(r)$

1-2-1 En utilisant l'incompressibilité du matériau, démontrer que la déformation linéaire radiale actuelle est égale à la déformation linéaire circonférentielle actuelle. En déduire la valeur de la déformation actuelle équivalente.

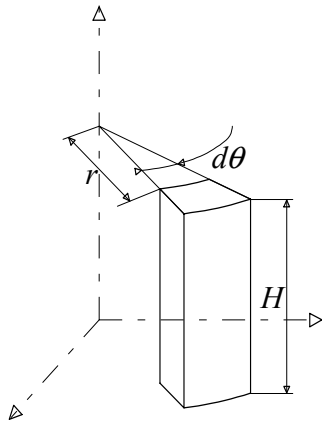
1-2-2 Calculer l'énergie dissipée par déformation.

1-2-3 Calculer l'énergie dissipée par frottement.

1-2-3 Donner alors une nouvelle valeur de la borne supérieure de l'effort presseur. Vérifier la compatibilité du résultat avec le précédent.

2- Détermination de l'effort presseur par la méthode des tranches.

Dans ce cas la tranche retenue est un tube de hauteur H , de rayon moyen r et d'épaisseur dr .



2-1 Ecrire les équations d'équilibre d'un secteur angulaire d'angle $d\theta$.

2-2 En se servant de la relation d'incompressibilité, calculer le déplacement δu_r , en fonction de la déformation linéaire axiale actuelle $(\delta \epsilon)_{zz}$.

2-3 Déterminer alors les composantes du tenseur des contraintes.

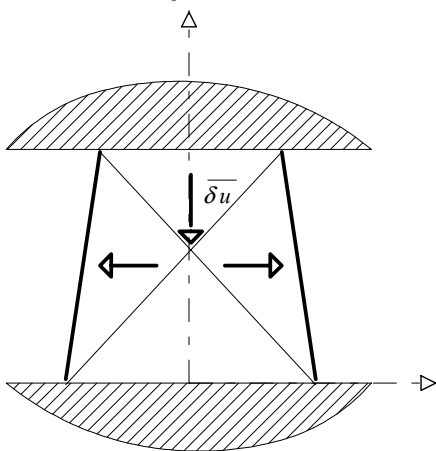
2-4 En déduire l'effort de forgeage ainsi que la pression moyenne correspondante.

Détermination d'un effort de presse

On considère un prisme droit à base trapézoïdale placé entre les deux tas d'une presse. La longueur du prisme est très grande devant les dimensions de la base. On effectue alors l'écrasement de ce lopin. On désire définir la valeur de l'effort presseur nécessaire pour déformer plastiquement la pièce. Les données sont les suivantes :

- Grande largeur de la base : L
- Petite largeur de la base : l
- Hauteur de la base : H

Matériau à comportement rigide parfaitement plastique caractérisé par une contrainte d'écoulement σ_0 .



L'interface entre la pièce et les plateaux de la presse peut être modélisée par un frottement de type couche limite avec un coefficient m .

On se propose de déterminer l'effort presseur par la méthode de la borne supérieure en utilisant des blocs rigides.

Le champ de déplacement de type blocs rigides retenu est représenté par la figure ci-contre. Le déplacement du plateau supérieur de la presse est donné par la valeur $\overline{\delta u}$.

- 1- Donner le diagramme des déplacements.
- 2- Calculer l'énergie dissipée.
- 3- En déduire une borne supérieure de la valeur de l'effort presseur. Quelle remarque pouvons-nous faire?

Examen LILLE 30 mai 2002

durée : 2 heures
notes de cours, d'exercices et de travaux pratiques autorisées

Seuls les résultats clairement démontrés seront pris en compte. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation

L'épreuve comporte un exercice et un problème qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE (5 points) :

Pour mesurer les propriétés élastiques d'un matériau, on effectue deux types d'essais sur le même type d'éprouvette (cylindre plein de révolution de hauteur h et de diamètre d). Pour le dépouillement des essais, on admet que le matériau est homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire.

Lors du premier essai, l'éprouvette est soumise, sur toute sa surface extérieure, à la même pression : pour une pression de 75 Mpa, on mesure une variation relative de volume égale à
-0,012

Lors du second essai, l'éprouvette n'est pas chargée sur sa surface latérale ($r = d/2$) et supporte sur ses deux bases une pression uniformément répartie : pour une pression égale à 30 Mpa, on mesure une variation relative de longueur de l'éprouvette égale à
-0,003

Déterminer les valeurs du module de YOUNG et du coefficient de POISSON du matériau étudié.

PROBLÈME (15 points) : *les trois questions peuvent se traiter dans n'importe quel ordre*

Le milieu continu étudié est un cylindre plein de révolution, d'axe de symétrie de révolution $(O; \vec{E}_z)$, de rayon extérieur R et de longueur $2h$. Un point quelconque de ce milieu est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z , avec :

$$0 \leq r \leq R ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; -h \leq z \leq +h$$

Ce milieu est en équilibre par rapport à un repère galiléen et ne supporte pas d'actions à distance.

Le matériau constituant ce milieu est supposé homogène, isotrope, à comportement élastique linéaire de module de YOUNG E et de coefficient de POISSON ν .

En un point quelconque du milieu, l'état de contraintes est défini, dans la base naturelle en coordonnées cylindriques, $(\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$ par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} (\vec{E}_r, \vec{E}_\theta, \vec{E}_z)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = p \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{h^3} - \frac{3}{32} [3+\nu] \frac{r^2 z}{h^3} - \frac{3z}{8h} \right) \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = p \left(\frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{8h} \right) \\ \sigma_{zz} = p \left(\frac{9[3+\nu]}{32} \frac{z}{h} - \frac{3[3+\nu]}{32} \frac{z^3}{h^3} - 1 + \frac{6[3+\nu]}{32} \right) \\ \sigma_{rz} = \frac{9p[3+\nu]}{64h^3} [z^2 - h^2] r \end{array} \right. \quad \text{Dans ces expressions, } p \text{ est une constante positive.}$$

1/ Les équations d'équilibre sont-elles vérifiées ?

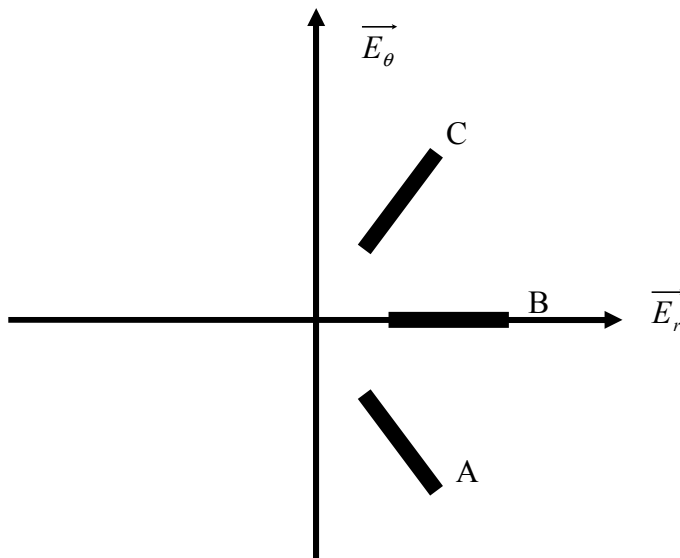
2/ Analyser le chargement qui s'exerce sur chacune des parties de la surface extérieure de ce milieu ; vérifier l'équilibre global de la pièce étudiée.

3/ Application numérique :

$$R = 50 \text{ cm} ; E = 21000 \text{ daN/mm}^2 ; p = 4 \text{ daN/mm}^2 ; h = 5 \text{ cm} ; \nu = 0,29$$

a/ au point de coordonnées $r = R/2$ et $z = 0$, déterminer le cisaillement maximal, la contrainte équivalente de VON MISES, et l'énergie de déformation volumique.

b/ en un point situé au rayon $r = R/2$ de la base $z = -h$, on place une rosette de trois jauges extensométriques à 60° selon le schéma ci-dessous ; déterminer ce que va mesurer chacune des trois jauges.



Examen METZ 12 janvier 2004

V. FAVIER

Documents et notes de cours autorisés.

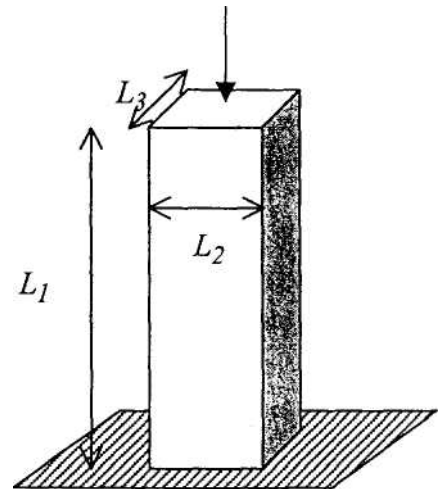
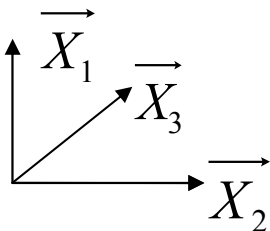
Durée : 2 heures

Le problème à traiter comporte trois parties indépendantes. Il concerne un caoutchouc utilisé dans deux applications différentes. On supposera que le comportement du caoutchouc obéit à la loi de Hooke et que ses propriétés mécaniques sont isotropes.

Les résultats présentés doivent être clairement justifiés.

1. Caractérisation du module d'Young et du coefficient de Poisson du matériau

1.1 Pour caractériser les constantes élastiques du caoutchouc étudié, on effectue un essai de compression sur un parallélépipède rectangle de dimensions $L_1 \times L_2 \times L_3 = 5\text{cm} \times 2\text{cm} \times 1\text{cm}$. Après l'application d'un effort F_c de 400 N (voir figure), on mesure deux de ses nouvelles dimensions et on trouve $L_1 = 4,5\text{cm}$ et $L_2 = 2,06\text{cm}$



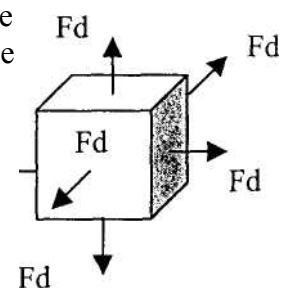
Que vaut la nouvelle dimension L_3 ?

Calculer le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν . En déduire la variation relative de volume.

Que vaudrait-elle si le coefficient de Poisson ν était égal à 0,5 ?

Comment qualifie-t-on alors le matériau ?

1.2 A partir du parallélépipède précédent, on découpe un cube de dimensions $L_1 \times L_2 \times L_3 = 1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Le cube en caoutchouc est ensuite étiré sur chaque face avec une force F_d de 200 N(voir figure).

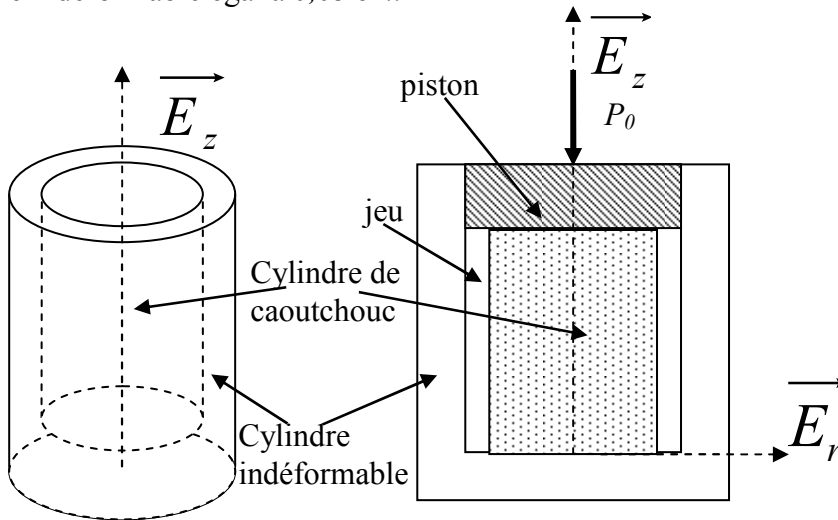


Quelles sont les nouvelles dimensions du cube ?

2. Application : Piston

Une barre cylindrique, de section circulaire de rayon $R = 2 \text{ cm}$, de hauteur $h = 5 \text{ cm}$, fabriquée en caoutchouc de module d'Young $E = 2 \times 10^7 \text{ Pa}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ est placée à l'intérieur d'un cylindre indéformable de rayon $R + j$ ($j = \text{jeu}$). Au moyen d'un piston, on exerce une pression P_0 sur la face supérieure.

2.1. 1^{er} cas : On suppose qu'il existe un jeu initial entre le cylindre de caoutchouc et le rayon intérieur du cylindre indéformable égal à $0,03 \text{ cm}$.

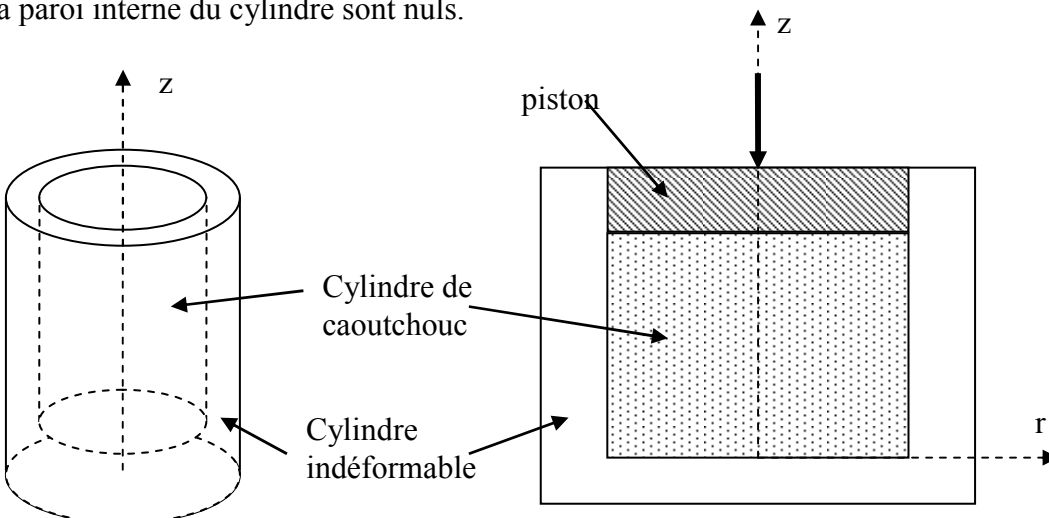


Déterminer le déplacement subi par le cylindre de caoutchouc dans la direction $(O; \vec{E}_z)$.

Montrer que le déplacement radial (selon $(O; \vec{E}_r)$) est égal à $u_r(r) = \frac{\nu P_0}{E} r$.

Calculer alors la pression P_0 pour laquelle le cylindre de caoutchouc rentre en contact avec la paroi intérieure du cylindre indéformable.

2.2. 2^{ème} cas : On suppose maintenant que le jeu entre le cylindre de caoutchouc et la paroi interne du cylindre indéformable est nul. On suppose également que les frottements entre le cylindre de caoutchouc et la paroi interne du cylindre sont nuls.



Expliquer pourquoi le tenseur des déformations peut se mettre sous la forme

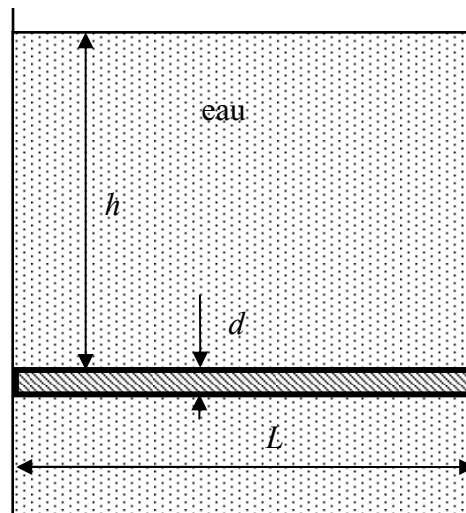
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

Calculer le déplacement subi par la matière dans la direction $(O; \vec{E}_z)$.

En déduire la pression que le cylindre de caoutchouc exerce sur la paroi interne du cylindre indéformable en fonction de la pression exercée par le piston sur la face supérieure..

3. Application : Tige cylindrique de caoutchouc immergée dans l'eau.

Une tige cylindrique en caoutchouc de section circulaire, de diamètre d et de longueur L est placée au milieu d'un bac rempli d'eau et se trouve fixée à ses extrémités sur deux des bords opposés du bac de telle sorte que l'on peut considérer la longueur de la tige comme constante. La barre est située à une hauteur h de la surface de l'eau telle que h est très supérieure à d ($h \gg d$). Les forces volumiques sont négligées. Le caoutchouc possède les mêmes constantes élastiques que dans la partie 2.



On se place dans un système de coordonnées cylindriques. Montrer que le tenseur des déformations est de la forme :

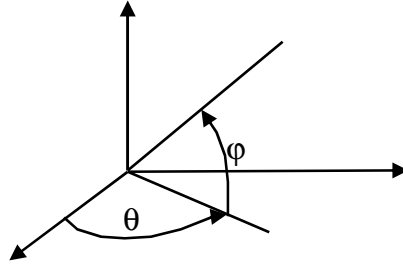
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (r, \theta, z)$$

Comment s'écrit l'équation locale de l'équilibre des forces ?

Montrer que le champ des déplacements radial s'écrit :

$$u_r(r) = - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho gh}{E} r$$

ANNEXE COORDONNEES SPHERIQUES



Relations Déplacement - Déformation

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \right) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - u_\varphi \cos \theta \right) \\ \varepsilon_{\varphi r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \end{aligned}$$

Equations d'équilibre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cotg \theta) + f_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cotg \theta) + f_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cotg \theta) + f_\varphi &= 0 \end{aligned}$$