

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a ; b)$ vérifiant la relation

$$(E) : a^2 - 250507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.
 - a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
 - b. Sachant que $a^2 - 250507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .
 - c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501 ; b)$.
3. On suppose que le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E).
 - a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
 - b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k ; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?