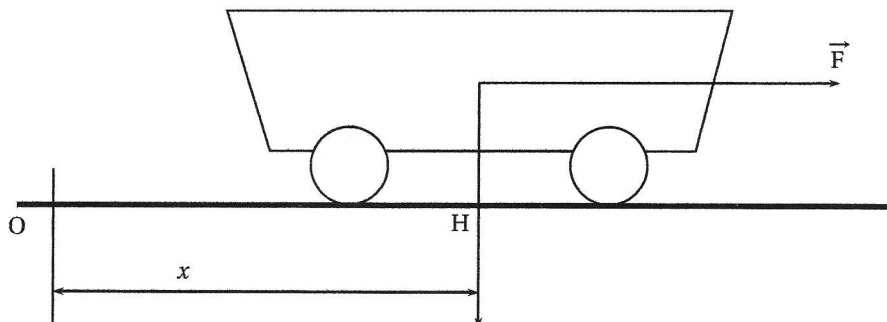


Exercice 5
Commun à tous les candidats

4 points



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante \vec{F} de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue $25 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$.

La position du chariot est repérée par la distance x , en mètres, du point H? l'origine O du repère en fonction du temps t , exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$(E) \quad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t ,

x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t .

- On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).
- On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
 - Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
 - En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.
- Calculer $V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?
- Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.