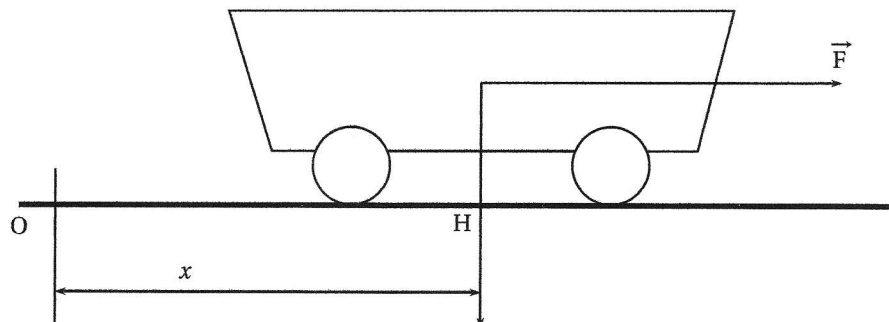


**Exercice 5**  
Commun à tous les candidats

4 points



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante  $\vec{F}$  de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue  $25 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$ .

La position du chariot est repérée par la distance  $x$ , en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps  $t$ , exprimé en secondes. On prendra  $t$  dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ . Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$(E) \quad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

$x'$  est la dérivée de  $x$  par rapport au temps  $t$ ,

$x''$  est la dérivée seconde de  $x$  par rapport au temps  $t$ .

- On note  $v(t)$  la vitesse du chariot au temps  $t$  ; on rappelle que  $v(t) = x'(t)$ .  
Prouver que  $x$  est solution de (E) si et seulement si  $x'$  est solution de l'équation différentielle (F)  $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$ .  
Résoudre l'équation différentielle (F).
- On suppose que, à l'instant  $t = 0$ , on a :  $x(0) = 0$  et  $x'(0) = 0$ .
  - Calculer, pour tout nombre réel  $t$  positif,  $x'(t)$ .
  - En déduire que l'on a, pour tout nombre réel  $t$  positif,  $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$ .
- Calculer  $V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$ . Pour quelles valeurs de  $t$  la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite  $V$  ?
- Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.