EXERCICE 1 :

Etudier la fonction f définie par : $f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$.

EXERCICE 2 :

n étant un entier naturel, f_n désigne la fonction numérique définie par : $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$.

A)

1) Déterminer l'ensemble de définition de f_n et étudier sa dérivabilité.

2) Donner le tableau de variation de f_n pour $n \geq 1$, en distinguant les deux cas : n pair et n impair.

3) Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1 et f_2.

B)

1) Etudier suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation : $f_1(x) = k$.

2) Démontrer que l'équation (E) : $|x\sqrt{1-x}| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \quad \text{et} \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

3) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $u_i = \dfrac{3}{2}\left(x_i - \dfrac{1}{3}\right)$. Démontrer qu'il existe un unique réel θ_i, élément de $[0, \pi]$ tel que : $u_i = \cos\theta_i$.

4) Démontrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont les solutions dans $[0, \pi]$ de l'équation : $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$.

5) Donner alors la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1, x_2 et x_3.