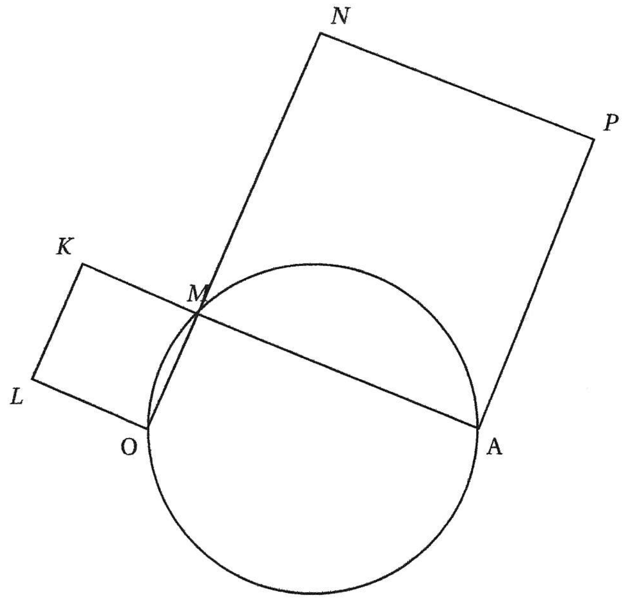
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$, et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.
Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1 - \mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1 + \mathrm{i})m$.
3. **a.** Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

   b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4. **a.** Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

   b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.