CORRIGE DU CONCOURS BLANC N° 2 DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Exercice 1

1. $\frac{2600}{2000} = 1,3$, ce qui correspond à une augmentation en pourcentage de 30%.

2. Appelons a le poids de café Arabica que l'on doit-on ajouter à 200 kg de café Robusta pour obtenir un mélange contenant 75 % de café Arabica : $a + 200$ étant la masse totale du mélange, on doit donc résoudre l'équation $\frac{75}{100}(a + 200) = a$, équivalente à $0,75a + 150 = a$, qui équivaut à $150 = 0,25a$, ce qui donne $a = 600$ kg.

3. Appelons m la masse de la médaille de Marion Jones. Cette médaille contenant 99,9 % d'argent, il est implicite que le reste, c'est à dire 0,1 %, est constitué d'or. On a donc $\frac{0,1}{100}m = 6$, d'où $0,1m = 600$, ce qui donne $m = 6000$ g = 6 kg. La masse de la médaille de Marion Jones est donc de 6 kg ! Le résultat est certainement multiplié par un facteur 100, c'est à dire que le texte a confondu g et cg...

4. Une augmentation de 10 % par an correspond à un facteur multiplicateur de 1,1 par an. En 5 ans, le facteur multiplicateur sera donc de $(1,1)^5 \approx 1,61$. Cela correspond donc à une augmentation de 61 %, qui est nettement supérieur à 50 %.

Exercice 2

1. Un patron en vraie grandeur est donné en annexe 1 : on a construit d'abord le segment $[BR]$, suivi du point U, puis de B_2, suivi de T et enfin de B_1.

2. a. $A(BUTR) = A(UTR) + A(UBR) + A(TRB_1) + A(UTB_2)$.

Or $A(UTR) = 6\times4 = 24$ cm^2, $A(URB) = 6\times2 = 12$ cm^2. Par ailleurs, le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle UTR donne $RT = 10$ cm, d'où $A(TRB_1) = 2\times10 = 20$ cm^2.

De même, le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle UBR donne $BU^2 = 52$, d'où $BU = 2\sqrt{13}$ cm, d'où $A(UTB_2) = 4\times 2\sqrt{13} = 8\sqrt{13}$ cm^2.

On en déduit que $A(BUTR) = 56 + 8\sqrt{13}$ cm^2, ce qui donne $A(BUTR) \approx 85$ cm^2.

b. $V(BUTR) = \frac{1}{3}A(UTR)\times BR$, d'où $V(BUTR) = \frac{1}{3}\times24\times4 = 32$ cm^3.

3. La section de la pyramide $BUTR$ par le plan (ARD) est un polygone P.

a. On a reproduit en annexe 2 le pavé droit $ABCDURST$, en construisant en vraie grandeur la face $DAUT$, avec un angle de fuite de 45°. Pour construire le polygone P sur la figure, on doit trouver l'intersection du plan (ARD) avec chacune des six arêtes de la pyramide.

L'intersection de (ARD) et $[RT]$ est le point R, de même que l'intersection de (ARD) et $[RU]$, ainsi que celle de (ARD) et $[RB]$.

Dans la face rectangulaire $(UABR)$, l'intersection de $[AR]$ et de $[BU]$ est le point I milieu de $[BU]$, donc l'intersection de (ARD) et $[BU]$ est le point I.

De même, dans le plan $(BRTD)$, les deux diagonales $[BT]$ et $[RD]$ se coupent en leur milieu J, donc l'intersection de (ARD) et $[BT]$ est le point J.

Dans le triangle UTB, les points I et J étant les milieux de $[BU]$ et $[BT]$, le théorème des milieux dit que les droites (IJ) et (UT) sont strictement parallèles, donc le plan (ARD) n'a pas d'intersection avec l'arête $[UT]$.

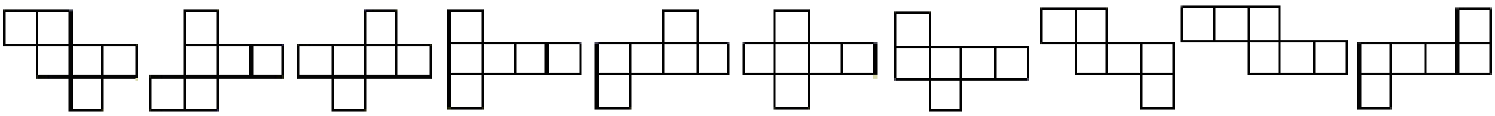
On conclut de ce qui précède que $P = RIJ$.

b. Les droites (IJ) et (UT) étant parallèles, avec (UT) orthogonale à (URB), on en conclut que (IJ) est orthogonale à (URB), et donc à toute droite de (URB). En particulier, (IJ) est perpendiculaire à (IR), donc le triangle RIJ est rectangle en I. On en conclut que $A(RIJ) = \frac{1}{2}IR\times IJ$. Or $IR = \frac{1}{2}BU = \frac{1}{2}\,2\sqrt{13}$, d'où $IR = \sqrt{13}$ cm, et, d'après le théorème des milieux dans UTB, $IJ = 4$ cm, d'où $A(RIJ) = 2\sqrt{13}$. On remarque que c'est le quart de celle de UTB, ce qui s'explique aisément…

***Question complémentaire* (correction inspirée de « Mathématiques, Tome 1 »,de R. CHARNAY et M. MANTE, Hatier,août 2009).**

1. Cette situation est une situation de communication. Les élèves doivent poser des questions pour identifier un solide, mais cela ne signifie pas pour autant qu'ils utiliseront un langage géométrique adapté. Dans un premier temps, il est possible qu'ils utilisent un langage naturel. Les contraintes : « Les questions ne peuvent porter que sur les formes des objets ou sur les éléments géométriques qui constituent ceux-ci » et « Les réponses du groupe R sont fermées, elles ne peuvent être que "oui", "non" ou "on ne peut pas répondre" » vont inciter les élèves à utiliser un vocabulaire beaucoup plus précis qui va se rapprocher du vocabulaire géométrique. Mais pour arriver à des expressions telles que « sommet ». « arête », « face », « rectangle », « triangle », « cercle »..., qui sont les expressions à connaître à ce niveau d'enseignement (cf. annexe 3), une intervention de l'enseignant sera certainement nécessaire.

2. a. Il existe 10 autres patrons du cube, en plus de celui donné en exemple : voir sur Internet http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/cube_patrons.htm.
Deux d'entre eux sont donnés en annexe 3 à l'échelle demandée:



b. Ici l'élève a deux tâches à réaliser :

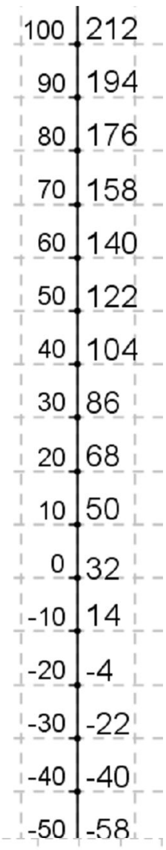
- découper un patron pour reconstituer un cube ;
- construire d'autres patrons de cube en assemblant des faces cartonnées.

On peut donc identifier les compétences suivantes :

- construire un solide à partir d'un patron ;
- reconnaître, compléter et construire un patron de cube.

On pourrait également ajouter : « Établir des relations entre espace et plan » (cf. annexe 3).

c. La construction d'un cube à partir de « tiges » permet de porter l'attention sur les arêtes (concrétisées par les tiges), les faces devant être reconstituées mentalement car elles ne sont plus matérialisées par des surfaces. Ceci permet d'attirer l'attention des élèves sur les propriétés des arêtes d'un cube : nombre, égalité de longueurs, parallélisme, orthogonalité.

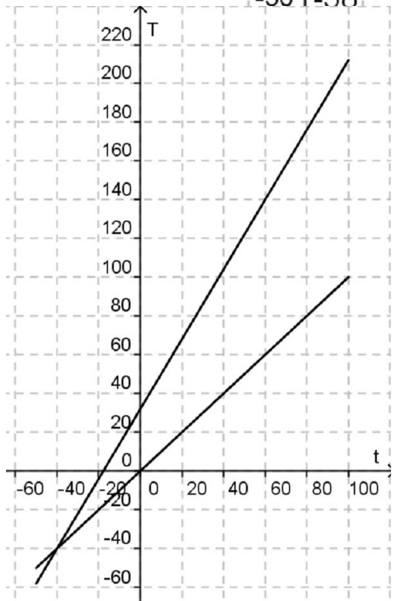


Exercice 3

1. a. Les graduations donnant les valeurs de l'échelle Fahrenheit sont données à droite : on peut les obtenir en remarquant qu'il y a proportionnalité des écarts (« les deux échelles sont régulières ») : l'écart en degrés Celsius entre 0 et 100 est égal à 100 ; il correspond à un écart en degrés Farenheit de 212-32 = 180. On en déduit donc qu'un écart de 10°C correspond à un écart de 18°F : on gradue donc les degrés Farenheit de 18 en 18 à partir de 212 ou de 32.

b. La réponse est NON : il suffit de constater que 0°C ne correspond pas à 0°F. S'il y avait proportionnalité, 0°C correspondrait à 0°F.

2. La fonction $t \to at + b$ est une fonction affine : on sait que a correspond au coefficient de proportionnalité des écarts permettant de passer des °C aux °F, qui est égal à $\dfrac{212-32}{100-0}$ = 1,8 calculé à la question précédente. On a donc $T = 1{,}8t + b$; cette relation est vérifiée en particulier pour $t = 0$ et $T = 32$, ce qui donne l'équation $32 = 1{,}8\times 0 + b$, d'où $b = 32$ (on peut aussi le justifier par l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $T = at + b$). On en déduit bien que : $T = 1{,}8\,t + 32$.



3. a. D'après la question 2, on a $T = 1{,}8\times 25 + 32$, d'où $T = 77$°F.

b. On peut remarquer que 25 étant la moyenne entre 20 et 30 (représenté par le milieu de la graduation entre 20 et 30 : le pas est alors 5), T est la moyenne entre 68 et 86 (représenté par le milieu de la graduation entre 68 et 86 : le pas est alors 9) : on a donc $T = 68 + 9 = 77$.

4. a. On doit résoudre l'équation $T = t$, équivalente à $1{,}8\,t + 32 = t$.
On a donc $0{,}8\,t = -32$, d'où $t = -40$°C : vérification immédiate sur le schéma ...

b. On peut tracer la droite d'équation $T = 1{,}8\,t + 32$, puis regarder son intersection avec la droite d'équation $T = t$. Le point d'intersection aura son abscisse égale à son ordonnée, nombre que l'on obtiendra par lecture graphique : le graphique est donné ci-contre.

Question complémentaire *(inspirée de « Mathématiques, Tome 1 », de R. CHARNAY et M. MANTE).*

1. La notion mathématique principale abordée ici est la proportionnalité : pour répondre à cette question, il faut, comme d'habitude, faire l'activité et identifier les procédures que les élèves peuvent mettre en place pour résoudre correctement la tâche. On constate que, bien que le support de cet exercice évoque les représentations graphiques, les élèves doivent mettre en relation deux grandeurs proportionnelles : la « hauteur » du rectangle et le nombre de livres.
2. Procédures et réponses

- Alexis (CM1)

Il s'appuie sur la hauteur du rectangle représentant les ventes du jour précédent et il fait la comparaison entre les nombres de livres. Si le nombre de livres à représenter est plus grand (plus petit) que le précédent, il construit un rectangle plus haut (plus bas).

Réponse 1 : Il dit ajouter 3 dizaines sans qu'on sache comment il a procédé pour en déterminer la hauteur. Réponse 2 : Il ajoute 1 dizaine et cinq unités.

Réponse 3 : Il retranche 3 dizaines.

Il utilise un raisonnement purement additif, donc inapproprié. Il semble que la hauteur d'une dizaine varie d'un jour à l'autre. Les ordres de grandeur pour les hauteurs des rectangles sont respectés de manière perceptive.

Les réponses du jeudi et du vendredi sont fausses, celle du samedi est exacte (probablement due au hasard).

- Yann(CM2)

La procédure mise en œuvre est constante et les réponses sont correctes. Il prend l'écart entre les rectangles du mardi et du mercredi (« il y a 15 livres »). Il raisonne à partir de la proportionnalité des écarts entre les hauteurs et des écarts entre les nombres de livres. Les procédures de calcul des écarts sont multiplicatives. Pour obtenir la hauteur du rectangle, dans chaque cas, il reporte l'écart calculé :

Réponse 1 : Deux fois l'écart « mardi-mercredi » ($90 - 60 = 30$ et $30 = 15\times2$).

Réponse 2 : Deux fois l'écart « mardi-mercredi » ($105 - 60 = 45$ et $45 = 15\times3$).

Réponse 3 : Une fois l'écart mardi-mercredi ($75 - 60 = 15$).

- Benoît (CM2)

Il ne fait référence qu'à un seul jour : le mardi. Son raisonnement est correct. Il s'appuie sur la linéarité (propriétés additive et multiplicative). Il commence par déterminer, en mesurant, la hauteur qui représente 30 livres, c'est-à-dire la moitié de la hauteur du rectangle représentant 60 livres.

Réponse 1 : il ajoute au rectangle du mardi la hauteur qu'il a trouvée pour 30.

Réponse 2 : il utilise la hauteur trouvée pour 30 pour déterminer la hauteur pour 15, puis il l'ajoute au rectangle du jeudi.

Réponse 3 : il réinvestit la hauteur trouvée pour 15 en l'ajoutant au rectangle du mardi.

Malgré son raisonnement correct, les deux premières réponses sont fausses. Il fait une erreur en reportant les longueurs pour obtenir le rectangle du jeudi. Ensuite il utilise le rectangle du jeudi pour construire le rectangle du vendredi, ce qui conserve l'écart avec la réponse juste. Le samedi est juste car il ne se sert pas du rectangle du jeudi.

- Héloise (CM2)

Elle a remarqué que les rectangles qui servent de support à l'exercice représentent 120 livres (« le maximum ... 120 livres »). Elle raisonne à partir d'une collection de 120 livres et plus particulièrement sur la partie non coloriée des rectangles, donc sur le complément à 120 des nombres proposés. Elle construit son raisonnement en s'appuyant sur la proportionnalité des écarts :

Réponse 1 : Sa procédure consiste à enlever 30 à 120 pour obtenir 90. Pour cela elle part de la partie blanche comme représentant la moitié de 120, c'est-à-dire 60 ; puis elle « coupe » cette moitié (qui représente 60) en deux moitiés représentant chacune 30. Elle reporte la hauteur ainsi obtenue à partir du « sommet » du rectangle.

Réponse 2 : Elle garde la même procédure. Le complément de 105 à 120 est 15 et comme la moitié de 30 est 15, elle prend la moitié de la moitié de la partie blanche du mardi qu'elle reporte à partir du « haut » du rectangle pour le vendredi.

Réponse 3 : Le complément à 120 est 45. Il se trouve que 45 est déjà représenté, car c'est le nombre de livre du mercredi. Il lui suffit de reporter cette longueur.

Les réponses données sont justes. On peut noter que le raisonnement utilisé n'est possible que dans le cas particulier ou l'énoncé autorise le travail sur la proportionnalité des écarts avec les compléments (120 est le double de 60).

3. Autres procédures

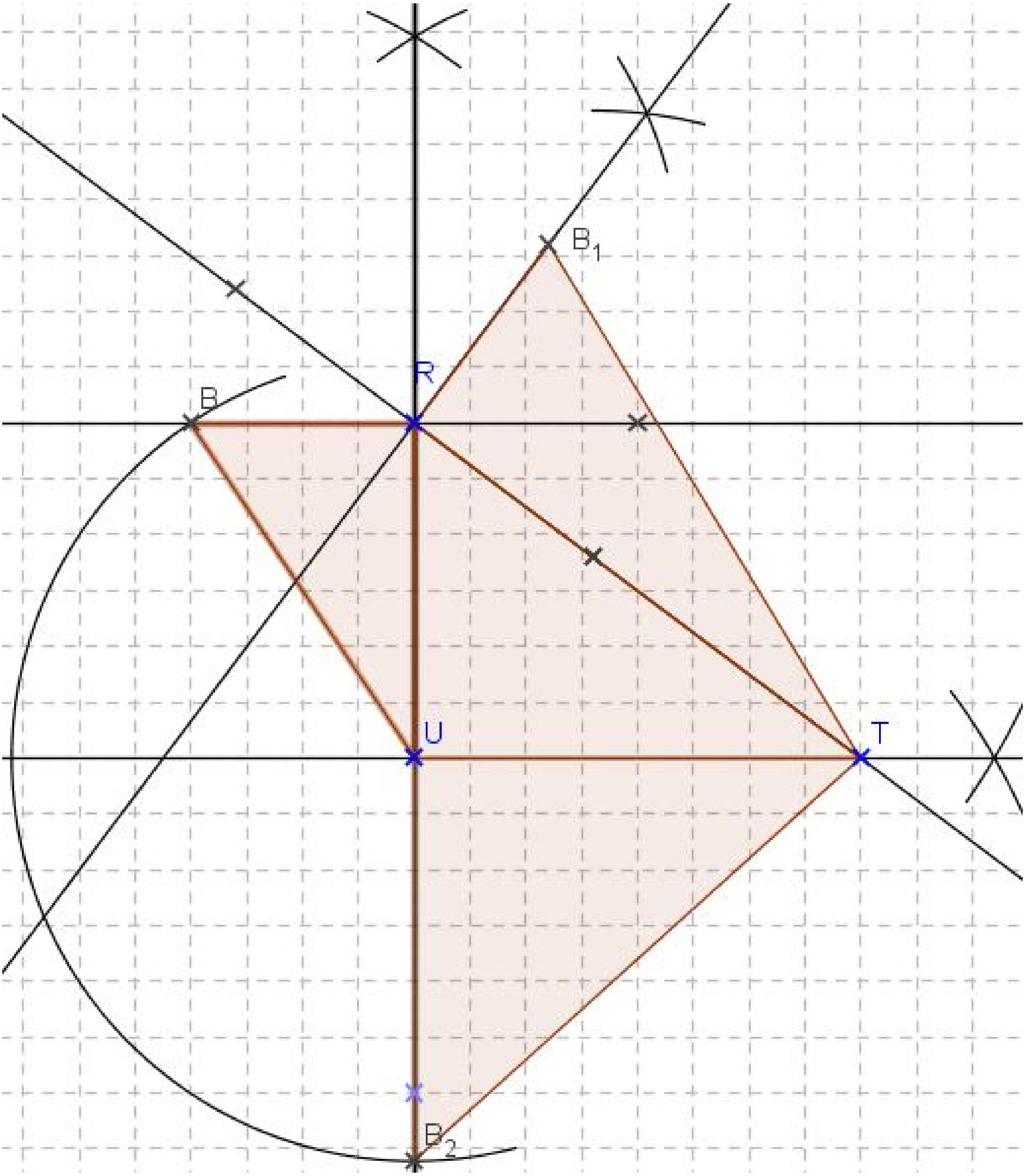
Voici un ensemble d'autres procédures possibles :

- la propriété multiplicative de la linéarité : pour le jeudi, comme 90 est égal à 2 fois 45, ou $1{,}5$ fois 60, on peut multiplier par ces mêmes coefficients les hauteurs pour le mercredi ou le mardi ; de même, pour le samedi, on peut utiliser le passage par la hauteur pour 15 livres (quart de 60 ou tiers de 45), puis la multiplication par 5,
- la propriété additive de la linéarité : le vendredi, 105 c'est $60 + 45$, la hauteur est donc la somme de « celle du mardi » et de « celle du mercredi »,
- le passage à l'unité (coeff. Multiplicateur) : calcul de la hauteur ($0{,}4$ mm) pour un livre (ou 2 mm pour 5 livres),

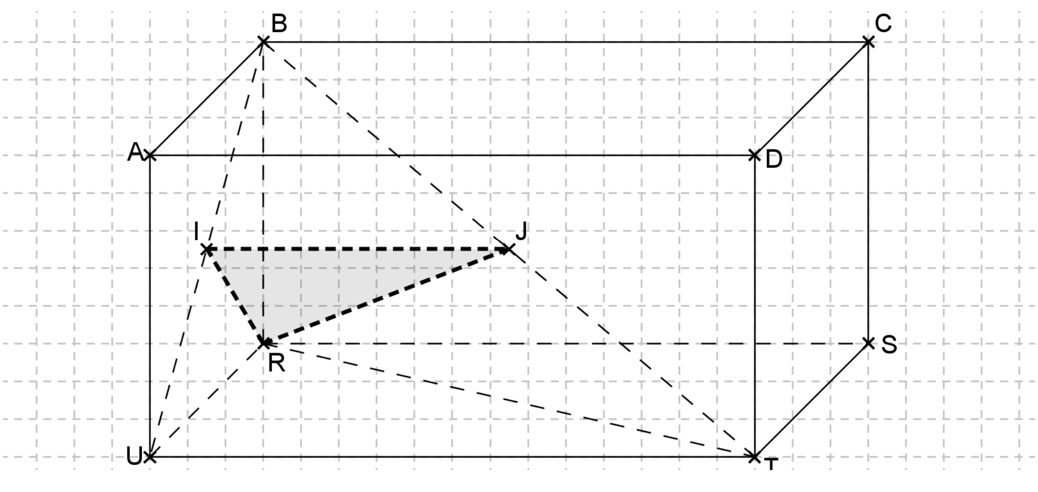
- l'utilisation d'un tableau de proportionnalité : calcul du « produit en croix », 24 désignant la hauteur en mm de 60 livres.

Hauteur (mm)	24	?
Nombre de livres	60	90

Annexe 1

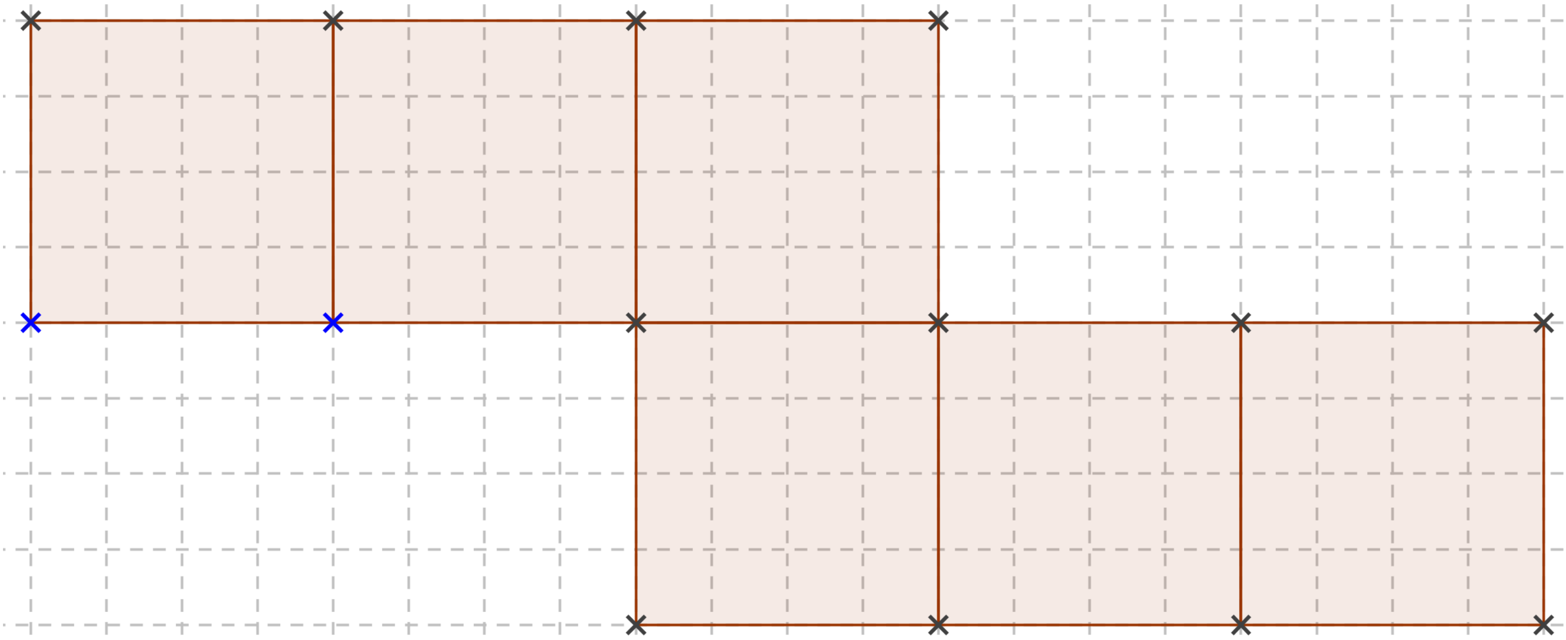


Annexe 2



Annexe 3

- Le seul patron du cube « à deux étages »



- La « croix grecque » traditionnelle :