Exercice 2 (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.*

Le plan p est rapporté à une repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit *f* l'application qui à tout point *M* de p d'affixe non nulle *z* associe le point *M'* d'affixe : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E', image de E par *f*.

2. Déterminer l'ensemble des points *M* tels que *M'* = *M*.

3. On note A et B les points d'affixe respectives 1 et – 1.
Soit *M* un point distinct des points O, A et B.

a) Montrer que, pour tout nombre complexe *z* différent de 0, 1 et – 1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b) En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si *M* est un point de Δ distinct du point O, alors *M'* est un point de Δ.

5. Soit Γ le cercle de diamètre [AB].

a) Montrer que si le point *M* appartient à Γ alors le point *M'* appartient à la droite (AB).

b) Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par *f* ?