Exercice 4 (6 points) *Commun à tous les candidats*

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0;+\infty[$ par $f_1(x)=2x-2+\ln(x^2+1)$.

   a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

   b) Déterminer la dérivée de f_1.

   c) Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit *n* un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x)=2x-2+\dfrac{\ln(x^2+1)}{n}$.

   a) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

   b) Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   c) Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique α_n sur $[0;+\infty[$.

   d) Justifier que, pour tout entier naturel *n*, $0<\alpha_n<1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul *n*, $f_n(\alpha_n)>0$.

4. Étude de la suite (α_n).

   a) Montrer que la suite (α_n) est croissante.

   b) En déduire qu'elle est convergente.

   c) Utilise l'expression $\alpha_n=1-\dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.