Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

PARTIE B

1. Si A et B sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A)$.
2. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$, alors $P(X \in [0,1\,;\,0,6]) = 0,6$.
3. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(1\,;\,-1\,;\,4)$, B$(7\,;\,-1\,;\,-2)$ et C$(1\,;\,5\,;\,-2)$.

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   d. En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2t \\ y &=& -2t-2 \\ z &=& -2t-3 \end{array}\right. \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   a. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).
   b. Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) sont $(3\,;\,1\,;\,0)$.
   c. Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par A.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

L'annexe est à rendre avec la copie

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.

PARTIE A

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan $\mathscr{P}$ et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan $\mathscr{P}$.
En **annexe**, le plan $\mathscr{P}$ est représenté muni du repère $\left(\text{A} ; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ où A est le point de coordonnées $(2 ; 0 ; 0)$.

1. **a.** Déterminer la nature de l'ensemble E_1.

   b. Déterminer la nature de l'ensemble E_2.

2. **a.** Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.

   b. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.

PARTIE B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :
« *soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c.* »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x ; y ; z)$ des surfaces S_1 et S_2 où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier.
On considère un tel point $M(x ; y ; z)$.

1. **a.** Montrer que $y(y - x) = x(2 - x)$.

   b. En déduire que le nombre premier x divise y.

2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   a. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.

   b. En déduire les valeurs possibles de k.

3. Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_\text{A} = -11 + 4\text{i},\ z_\text{B} = -3 - 4\text{i} \quad \text{et} \quad z_\text{C} = 5 + 4\text{i}.$$

2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathscr{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Montrer que l'affixe de E vérifie $z_E = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)\text{i}$.
   Placer le point E.
4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Placer le point D .
5. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
   Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].
   Montrer que B, I et J sont alignés.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~1]$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~1]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
T est la droite d'équation $y = x$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1. **a.** Justifier que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
   b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]0~;~1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0~;~1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0~;~1]$.
   b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0~;~1]$ par

   $$g(x) = 1 + x\ln x - x.$$

   a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0~;1]$ et dresser le tableau de variation de g.
   On ne cherchera pas la limite de g en 0.
   b. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.
4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.
   On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \left[1 - f(x)\right]\,\text{d}x$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.
   c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
   d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et l'axe des ordonnées.

ANNEXE
Exercice 2
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie