PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$(\mathrm{E}) \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. **a.** Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}') \qquad y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}.$$

b. Résoudre (E′).

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\dfrac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\mathrm{M}}{1 + C\mathrm{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \mathrm{M}$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{\mathrm{M}}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{\mathrm{M}}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.

Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (0,5 ; 2). En déduire les valeurs de N_0, T et a.

2. Sachant que $g(0) = \mathrm{N}_0$ et que $\mathrm{M} = 100\ \mathrm{N}_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.

4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II