Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0,72\,;\,-0,71]$.
3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $-1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $]-1;\ 0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}.$$

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition
   a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Sens de variation de g

a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.

3. Tableau de variations et représentation graphique de g

a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

4. Calcul d'aire

Soit a un réel strictement supérieur à 0. On pose :

$$I(a) = \int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Donner, suivant les valeurs de a, une interprétation géométrique du réel $I(a)$.

b. En remarquant que, pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c. Calculer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I(a)$ et $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$.