EXERCICE 2 **5 points**

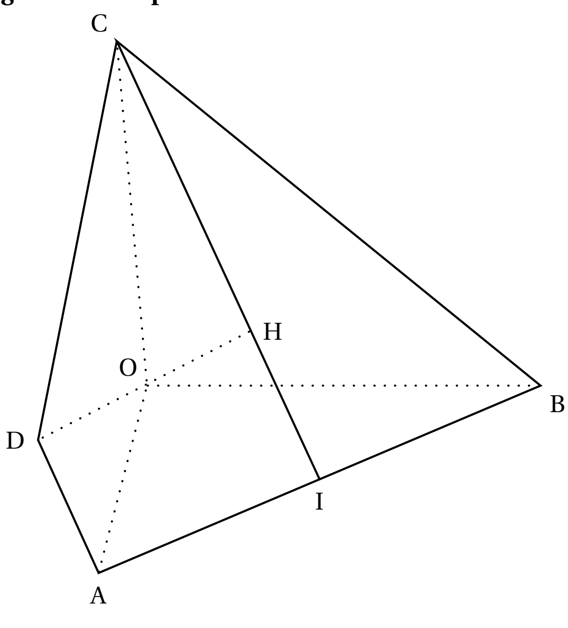
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,

• OA = OB = OC = a.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Calcul de OH

a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $\text{OH} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OA}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OB}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OC}}\right)$.

a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$.

b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.