

**EXERCICE 3****8 points****Partie A**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que la fonction  $f : t \mapsto (2-t)e^t$  est une primitive de  $g : t \mapsto (1-t)e^t$  sur  $[0 ; 1]$ .  
En déduire la valeur de  $u_n$ .
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout  $n$  non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad (\text{R})$$

**Partie B**

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite  $(u_n)$  en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de $n$	Valeur de $u_n$ affichée par la première calculatrice	Valeur de $u_n$ affichée par le deuxième calculatrice
1	7,182 818 284 5E-01	7,182 818 284 6E-01
2	4,365 636 569 1E-01	4,365 636 569 2E-01
3	3,096 909 707 5E-01	3,096 909 707 6E-01
4	2,387 638 830 1E-01	2,387 638 830 4E-01
5	1,938 194 150 8E-01	1,938 194 152 0E-01
6	1,629 164 905 1E-01	1,629 164 912 0E-01
7	1,404 154 335 81E-01	1,404 154 384 0E-01
8	1,233 234 686 9E-01	1,233 235 072 0E-01
9	1,099 112 182 8E-01	1,099 115 648 0E-01
10	9,911 218 282 5E-02	9,911 564 800 0E-01
11	9,023 401 108 0E-02	9,027 212 800 0E-02
12	8,280 813 296 3E-02	8,326 553 600 0E-02
13	7,650 572 852 2E-02	8,245 196 800 0E-02
14	7,108 019 930 9E-02	1,543 275 520 0E-01
15	6,620 298 963 6E-02	1,314 913 280 06E+00
16	5,924 783 418 6E-02	2,003 861 248 0E+01
17	7,213 181 161 2E-03	3,396 564 121 6E+02
18	-8,701 627 390 9E-01	6,112 815 418 9E+03
19	-1,753 309 204 2E+01	1,161 424 929 6E+05
20	-3,516 618 408 5E+02	2,322 848 859 2E+06
21	-7,385 898 658 0E+03	4,877 982 504 3E+07
22	-1,624 907 704 7E+05	1,073 156 149 9E+09
23	-3,737 288 720 9E+06	2,468 259 144 8E+10
24	-8,969 493 030 2E+07	5,923 821 947E+11
25	-2,242 372 585E+09	1,480 955 486 9E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite  $(u_n)$  quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

### Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \geq 0$ .
2. a. Montrer que pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel non nul  $n$

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n.$$

- b. En déduire que pour tout  $n$  non nul,  $u_n \leq \frac{e}{n+1}$ .

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel  $a$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n, v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$  où  $n!$  désigne le produit des  $n$  premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite  $(v_n)$  à l'infini suivant les valeurs de  $a$ .  
(On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ .)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.